

#математика

Планиметрия. Окружность



профиматика

1 Окружность

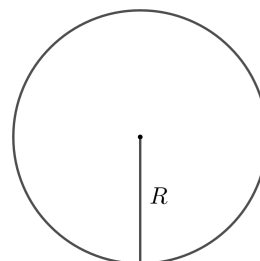
Определение. Окружность – это множество всех точек на плоскости, находящихся на одинаковом расстоянии от данной точки.

1. Длина окружности:

$$C = 2\pi R$$

2. Площадь круга:

$$S = \pi R^2$$

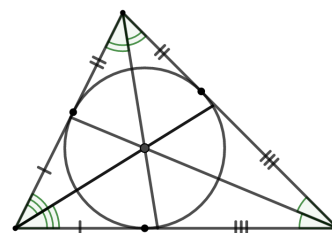


2 Вписанная окружность

1. Центр вписанной окружности совпадает с точкой пересечения биссектрис.

*В треугольнике биссектрисы всегда пересекаются в одной точке, поэтому в треугольник всегда можно вписать окружность. А в многоугольнике биссектрисы не всегда пересекаются в одной точке, поэтому в многоугольник не всегда можно вписать окружность.

Если вы не верите, можете попробовать вписать окружность в прямоугольник.

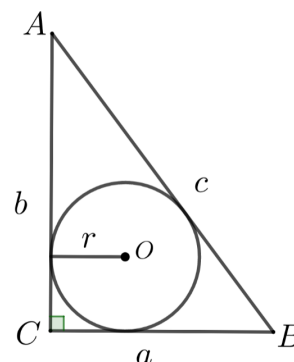


2. Радиус вписанной в прямоугольный треугольник окружности можно вычислить по формулам:

$$r = p - c = \frac{a + b - c}{2}$$

где p – полупериметр ($p = \frac{a+b+c}{2}$)

$$S = pr \Leftrightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{\frac{1}{2}ab}{\frac{a+b+c}{2}} = \frac{ab}{a+b+c}$$

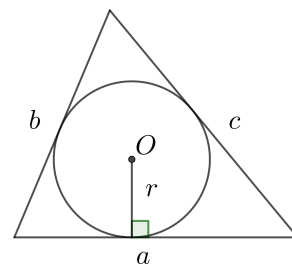


3. Радиус вписанной в треугольник окружности можно найти по формуле:

$$S = pr,$$

где p – это полупериметр.

$$p = \frac{a+b+c}{2}.$$

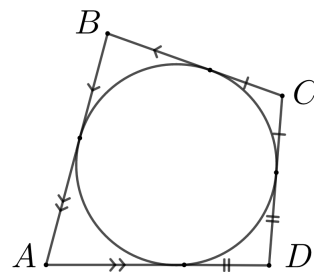


*На самом деле площадь любого многоугольника, в который можно вписать окружность, находится по формуле $S = pr$, где p – полупериметр, а r – радиус вписанной окружности.

4. Когда в четырехугольник можно вписать окружность:

Если $AB + CD = BC + AD$, то в четырехугольник можно вписать окружность.

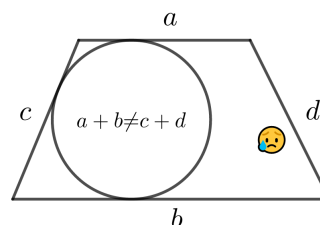
Верно и обратное: если в четырехугольник вписана окружность, то суммы длин противоположных сторон равны.



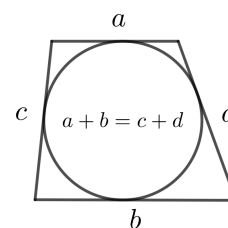
5. Четырехугольники, в которые можно вписать окружность:

а) Трапеция:

обычно нельзя вписать окружность.



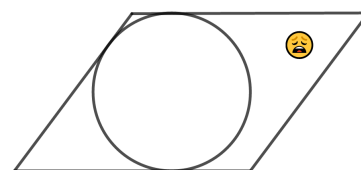
Можно только тогда, когда $a + b = c + d$



б) Параллелограмм:

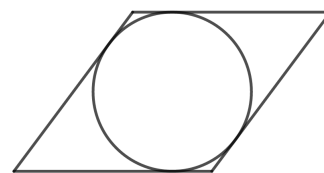
обычно нельзя вписать окружность.

Можно только тогда, когда параллелограмм – ромб.



в) Ромб:

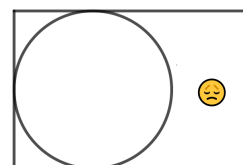
всегда можно вписать окружность.



г) Прямоугольник:

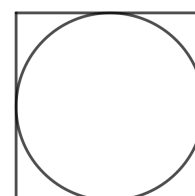
обычно нельзя вписать окружность.

Можно только тогда, когда прямоугольник – квадрат.



д) Квадрат:

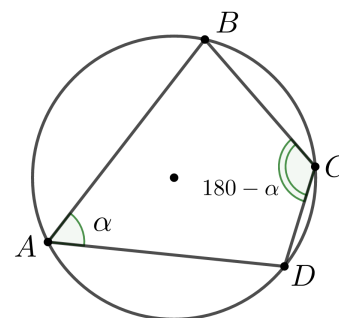
всегда можно вписать окружность.



3 Описанная окружность

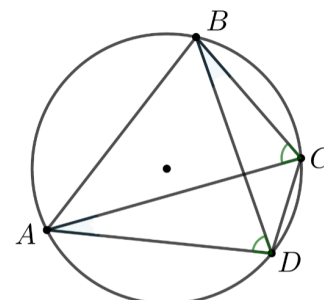
1. I признак четырехугольника, вписанного в окружность:

Четыре точки лежат на одной окружности, если два противоположных угла в сумме дают 180° .

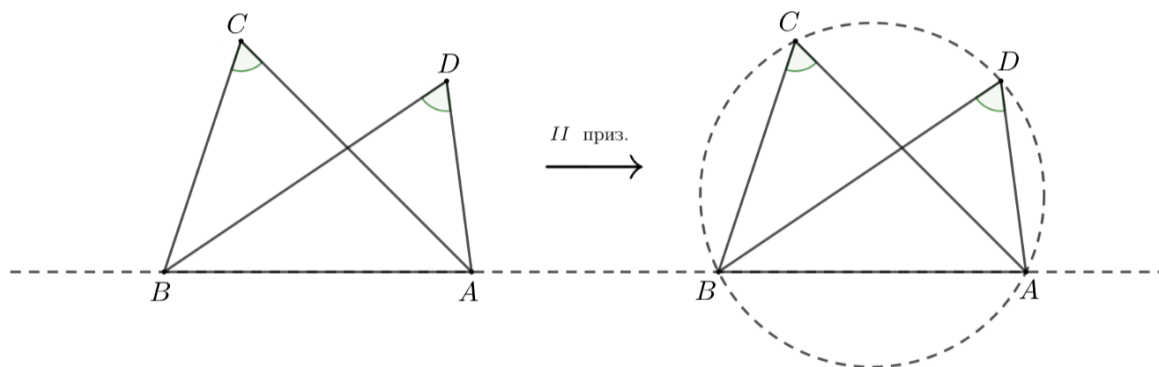


2. II признак четырехугольника, вписанного в окружность:

Точки C и D лежат по одну сторону от прямой, содержащей отрезок AB . Углы ACB и BDA равны тогда и только тогда, когда точки A, B, C и D лежат на одной окружности.



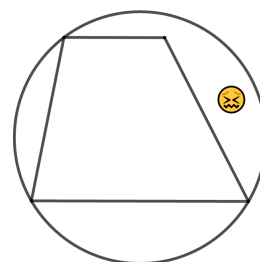
*Чаще всего мы используем это для того, чтобы доказать, что точки A, B, C, D лежат на одной окружности.



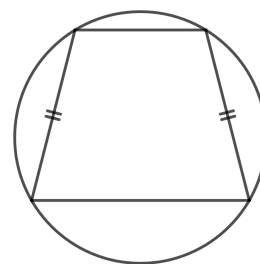
3. Четырехугольники, вокруг которых можно описать окружность:

а) Трапеция:

обычно нельзя описать.



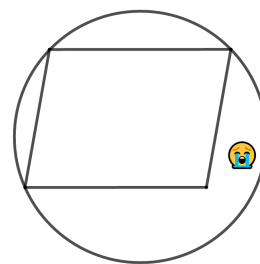
Можно только тогда, когда трапеция равнобедренная.



б) Параллелограмм:

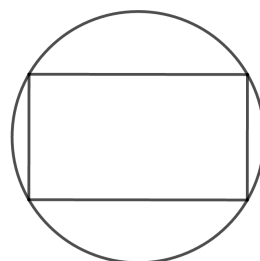
обычно нельзя описать окружность.

Можно только тогда, когда параллелограмм – прямоугольник.



в) Прямоугольник:

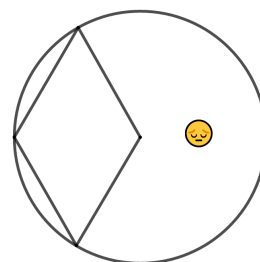
всегда можно описать окружность.



г) Ромб:

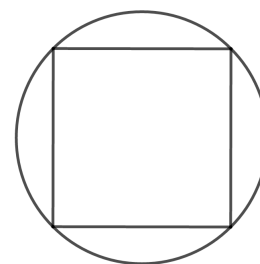
обычно нельзя описать окружность.

Можно только тогда, когда ромб – квадрат.



д) Квадрат:

всегда можно описать окружность.



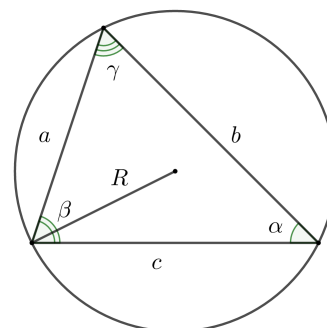
4 Теорема синусов

1. Теорема синусов:

$$2R = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

*Чаще всего мы используем теорему синусов для нахождения радиуса описанной окружности.

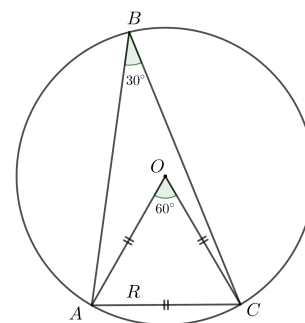
**А еще мы используем теорему синусов, если знаем в треугольнике два угла и одну сторону и хотим найти еще одну сторону.



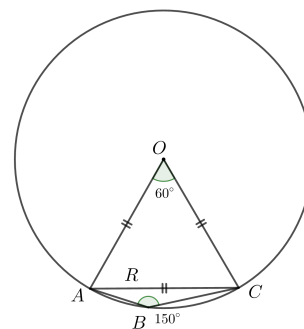
2. Иногда без теоремы синусов:

Вписанный угол, опирающийся на хорду, равную радиусу, равен либо 30° либо 150° :

а) Если точка B лежит на большей дуге AC , то треугольник AOC – равносторонний, а $\angle AOC = 60^\circ$, следовательно, угол $ABC = 30^\circ$.



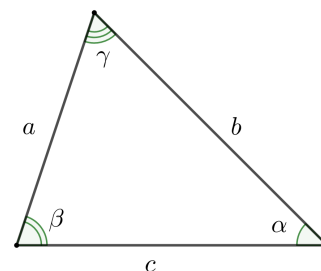
б) Если точка B лежит на меньшей дуге AC , то треугольник AOC – равносторонний, а $\angle AOC = 60^\circ$, следовательно, угол $ABC = 150^\circ$.



5 Теорема косинусов

Теорема косинусов поможет в случае, если нам известны три стороны треугольника и требуется найти какой-нибудь из углов, или если известны две стороны и угол и необходимо найти третью сторону.

$$\begin{aligned}a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha; \\b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta; \\c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.\end{aligned}$$

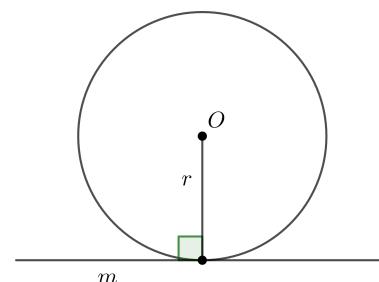


*Теорема косинусов – она как теорема Пифагора, только в теореме Пифагора нет $-2bc \cos \alpha$, ведь $\cos 90^\circ = 0$.

6 Окружность и касательная

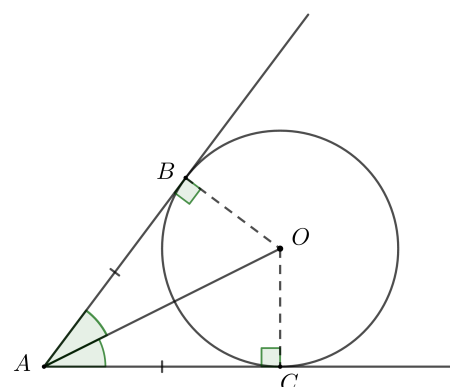
1. Радиус, проведенный к точке касания, перпендикулярен касательной:

$$r \perp m$$



2. Если из точки A провести касательные (две) к окружности, где B и C - точки касания, то $AB = AC$.

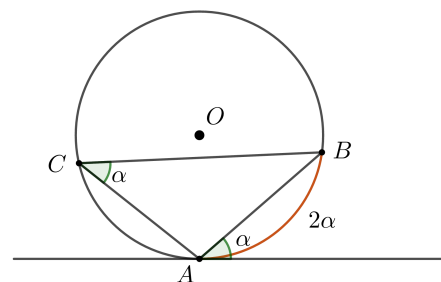
3. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла.



4. Пусть к окружности в точке A проведена касательная, AB – хорда этой окружности, проходящая через точку A , тогда угол α между хордой AB и касательной равен половине угловой величины дуги AB , а значит, любому вписанному углу, опирающемуся на дугу AB .

Угол между касательной и хордой:

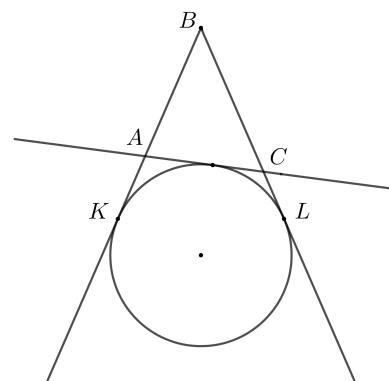
$$\angle \alpha = \frac{1}{2} \overset{\smile}{AB}$$



5. Важное свойство вневписанной окружности:

Пусть периметр треугольника $ABC = P$, тогда $BL = BK = \frac{P}{2}$.

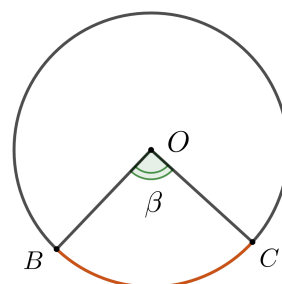
Например, если стороны треугольника $AB = 5$, $AC = 6$, $BC = 7$, то $BL = BK = \frac{AB + AC + BC}{2} = 9$.



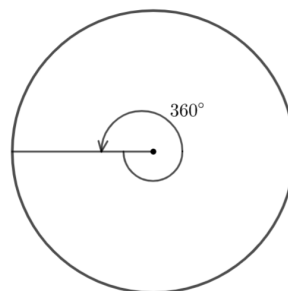
7 Вписанный и центральный углы

1. Центральный угол – угол с вершиной в центре окружности.

$$\angle \beta = \overset{\smile}{BC}$$

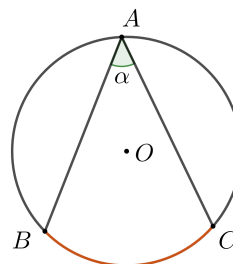


2. Градусная мера всей дуги окружности равна 360° .



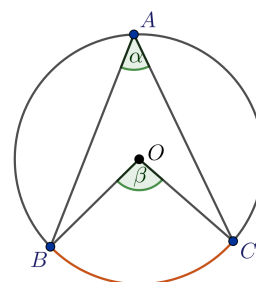
3. Вписанный угол - угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность.

$$\angle \alpha = \frac{1}{2} \overset{\frown}{BC}$$



4. Вписанный угол, опирающийся на ту же дугу, что и центральный, равен его половине.

$$\angle \alpha = \frac{1}{2} \angle \beta$$



5. Вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, равны.

$$\angle BAC = \angle BDC$$

