

# ЕГЭ

Математика

Показательные  
и логарифмические  
уравнения

# Часть I

## Глава I. Уравнения, содержащие показательные функции с постоянным основанием

- §1. Основные формулы для показательной функции.
- §2. Показательные уравнения.
- §3. Замена переменных в уравнении, содержащем показательную функцию.
- §4. Разные уравнения.

### §1. Основные формулы для показательной функции

Прежде чем решать задачи, вспомним *школьные* формулы.

Принимается *без доказательства*, что для *любого положительного* числа  $a$  и *любого действительного* числа  $x$  определено число  $a^x$ . А раз так, то можно рассматривать функцию  $y = a^x$ , определённую на всей действительной оси. При этом опять-таки принимается без доказательства, что если  $a > 1$ , то функция  $a^x$  – монотонно возрастает на  $R$ ; если  $0 < a < 1$ , то функция  $a^x$  монотонно убывает на  $R$ .

Если  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , то функция  $a^x$  отлична от постоянной. Её называют *показательной* функцией с основанием  $a$ . Уточняем, что  $a^x$  определено для *любого*  $a > 0$ , включая  $a = 1$ , но *показательной* мы называем функцию  $y = a^x$ , где  $a > 0$  и  $a \neq 1$ . Это оправдывается тем, что при  $a \neq 1$  функция  $y = a^x$  строго монотонна, в отличие от  $y = 1^x \equiv 1$ .

Область значений показательной функции – множество  $R_+$  всех *положительных* чисел (рис. 1 – 2).

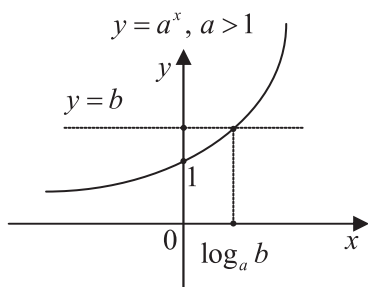


Рис. 1

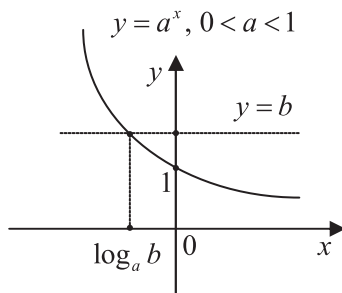


Рис. 2

Чтобы построить график показательной функции, удобно заполнить маленькую табличку, из которой сразу станет ясно, какого типа будет график – как на рис. 1 или как на рис. 2.

|       |               |   |     |
|-------|---------------|---|-----|
| $x$   | -1            | 0 | 1   |
| $a^x$ | $\frac{1}{a}$ | 1 | $a$ |

Построим, например, график  $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ . Заполняем табличку

|                              |    |   |                            |
|------------------------------|----|---|----------------------------|
| $x$                          | -1 | 0 | 1                          |
| $\left(\frac{1}{4}\right)^x$ | 4  | 1 | $\left(\frac{1}{4}\right)$ |

и строим график – рис. 3.

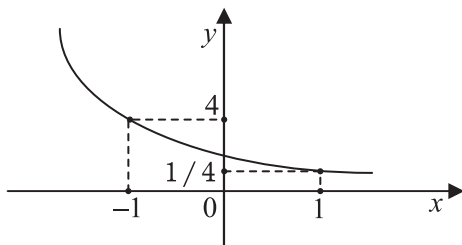


Рис. 3

Всегда ли по трём точкам можно построить график? Нет, конечно. По трём точкам построить график этих функций нельзя, но зная, что это монотонные непрерывные гладкие функции, можно легко прикинуть их эскизы.

Далее тоже принимается *без доказательства*, что для любых положительных чисел  $a$  и  $b$  и любых действительных чисел  $x$  и  $y$  справедливы свойства:

$$\text{П1. } a^x \cdot a^y = a^{x+y}, a > 0; \quad \text{П2. } \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, a > 0;$$

$$\text{П3. } (a^x)^y = a^{xy}, a > 0; \quad \text{П4. } a^x \cdot b^x = (ab)^x, a > 0, b > 0;$$

$$\text{П5. } \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x, a > 0, b > 0.$$

Вы заметили, что в школе свойства 4 и 5 записаны по-другому? Как именно? Вот так:

$$\text{П4*} \cdot (ab)^x = a^x \cdot b^x,$$

$$\text{П5*} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}.$$

Казалось бы, какая разница? Но мы специально записали именно в этом порядке: выражения, стоящие и справа, и слева в первых трёх свойствах П1 – П3, определены для  $a > 0$ , выражения, стоящие слева в П4 и П5 определены для  $a > 0$  и  $b > 0$ , т. е. по крайней мере, все левые части в П1 – П5 имеют одну и ту же область определения.

Но вот ситуация в школьных формулах совсем другая (П4\* и П5\*). Сразу бросается в глаза, что выражения, стоящие слева, определены для  $ab > 0$ , а стоящие справа определены для  $a > 0$  и  $b > 0$ . А если  $ab > 0$ , но  $a < 0$  и  $b < 0$ ? Никак нельзя преобразовать  $(ab)^x$ ? Такая ситуация возникает в задачах, когда надо перейти от  $(ab)^x$  к  $a^x \cdot b^x$ , но знаки  $a$ ,  $b$  заранее не известны.

Рассмотрим внимательней этот случай. Если  $ab > 0$ , но  $a < 0$ , то  $-a > 0$  и  $-b > 0$ . Теперь можно использовать школьные формулы:

$$(ab)^x = ((-a) \cdot (-b))^x = (-a)^x \cdot (-b)^x, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \left(\frac{-a}{-b}\right)^x = \frac{(-a)^x}{(-b)^x}.$$

Учитывая это и П4\* – П5\*, можно записать:

$$\text{П6. } (ab)^x = |a|^x \cdot |b|^x, ab > 0, \quad \text{П7. } \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{|a|^x}{|b|^x}, ab > 0.$$

Таким образом, если  $a > 0$  и  $b > 0$ , то получаются школьные формулы,

а если  $a < 0$  и  $b < 0$ , то  $(ab)^x = (-a)^x (-b)^x$  и  $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{(-a)^x}{(-b)^x}$ .

*Примечание.* Эта же ситуация повторится при изучении свойств логарифмов, где «недооценка» областей определения левой и правой частей школьных формул приводит к неверному решению довольно часто.

## §2. Показательные уравнения

Заметим сначала, что  $1^{f(x)} = 1^{g(x)}$  при любых  $f(x)$  и  $g(x)$  в ОДЗ;  $0^{f(x)} = 0$ , если  $f(x) > 0$ .

Рассмотрим уравнение

$$a^x = a^y.$$

Из монотонности показательной функции следует, что

$$a^x = a^y \Leftrightarrow x = y, \quad a > 0, \quad a \neq 1. \quad (\text{УР П1})$$

Если же решается уравнение  $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ , где  $a$  – параметр, то

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1, \\ a > 0, \quad a \neq 1, \\ f(x) = g(x). \end{cases} \quad (\text{УР П2})$$

Теперь рассмотрим уравнение

$$a^x = b.$$

Из свойств показательной функции следует, что если задано  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , то простейшее показательное уравнение  $a^x = b$  при  $b \leq 0$  не имеет решения. Заметим, что из монотонности показательной функции при этом следует, что для любого положительного числа  $b$  существует единственное число  $x$  такое, что  $a^x = b$ . Это число математики договорились называть логарифмом числа  $b$  по основанию  $a$  и обозначать  $\log_a b$ , т. е.

$$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad b > 0 \quad (\text{УР П3})$$

Из определения следует, что

$$a^{\log_a b} = b \quad \text{в ОДЗ.}$$

Это равенство называется основным логарифмическим тождеством в ОДЗ (только для  $b > 0$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ).

*Примечание.* В том случае, когда по условию  $x = t$ ,  $t \in N$ , уравнение решается по-другому, т. к. операции с  $a^m$ ,  $m \in N$  отличаются от операций с  $a^x$ ,  $x \in R$ !

Умение преобразовать исходное уравнение к более простому является определяющим для успешного решения большинства учебных примеров.

**Решите уравнения 1 – 7 и укажите корень (или сумму корней, если их несколько)**

1.  $7^{5x+6} = 49$ .

► Воспользуемся (УР П1):  $7^{5x+6} = 49 \Leftrightarrow 7^{5x+6} = 7^2 \Leftrightarrow 5x+6=2 \Leftrightarrow x=-0,8$ .

**Ответ.**  $\{-0,8\}$ . ◀

2.  $(3^{2x^2-29} - 27) \cdot \sqrt[4]{5x+18} = 0$ .

► Пример простой, но и при решении показательных уравнений не надо забывать о том, что множители могут влиять на отбор корней:

$$(3^{2x^2-29} - 27) \cdot \sqrt[4]{5x+18} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+18=0; \\ 5x+18 \geq 0, \\ 3^{2x^2-29} - 3^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+18=0; \\ 5x+18 \geq 0, \\ 2x^2-29=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+18=0; \\ 5x+18 \geq 0, \\ x = \pm 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{18}{5}, \\ x = 4 \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 = -\frac{18}{5} + 4 = 0,4.$$

**Ответ.**  $\{-3,6; 4\}; 0,4$ . ◀

3.  $\left(\frac{1}{4}\right)^{1,5x-7,2} = 8$ . 4.  $10^{x+4} - 17 \cdot 10^{x+2} = 83$ . 5.  $\left(\frac{1}{25}\right)^{0,4x-2} = 125$ .

6.  $9^x - 5^{x+1} = 4 \cdot 9^{x-1} - 16 \cdot 5^{x-1}$ . 7.  $3^{\sqrt[3]{x-2}-\sqrt[3]{x-4}} = 9^{\frac{-\sqrt[3]{3x-8}}{2}}$ .

8. Решите уравнение  $5 \cdot \left(\frac{1}{25}\right)^{\sin^2 x} + 4 \cdot 5^{\cos 2x} = 25^{0,5 \sin 2x}$  и укажите

количество корней на промежутке  $[0; 3\pi]$ .

► Нередко уравнения не являются «чисто показательными» — приходится решать и «попутные» проблемы, как в этом примере. Сначала решим уравнение, вспомнив при этом некоторые формулы тригонометрии:

$$5 \cdot 5^{-2 \sin^2 x} + 4 \cdot 5^{\cos 2x} - 5^{\sin 2x} = 0 \Leftrightarrow 5 \cdot 5^{-(1 - \cos 2x)} + 4 \cdot 5^{\cos 2x} - 5^{\sin 2x} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 5 \cdot 5^{\cos 2x} = 5^{\sin 2x} \Leftrightarrow 1 + \cos 2x = \sin 2x \Leftrightarrow 2 \cos^2 x = 2 \sin x \cos x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ \cos x = \sin x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi m, m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Теперь выясним, сколько корней на заданном промежутке:

$$0 \leq \frac{\pi}{2} + \pi n \leq 3\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq n \leq \frac{5}{2} \Rightarrow n = 0; 1; 2.$$

$$0 \leq \frac{\pi}{4} + \pi m \leq 3\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \leq m \leq \frac{11}{4} \Rightarrow m = 0; 1; 2.$$

Итак, 6 корней.

**Ответ.**  $\left\{ \frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{4} + \pi m, n, m \in \mathbb{Z} \right\}, 6.$  ◀

### §3. Замена переменных в уравнении, содержащем показательную функцию

Уравнения, содержащие показательные функции, нередко с помощью замены переменных приводятся к рациональным. Выбор замены переменных часто очевиден.

**Решите уравнения 1 – 21 и найдите сумму квадратов их корней соответственно**

1.  $3^x + 2 \cdot 3^{\frac{x}{2}} - 15 = 0.$

► Видно, что уравнение является квадратным относительно  $3^{\frac{x}{2}}$ .

Поэтому удобно сделать замену переменных:  $3^{\frac{x}{2}} = t, t > 0$ . Тогда уравнение на самом деле примет вид системы:

$$\begin{cases} t > 0, \\ t^2 + 2t - 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = -1 \pm 4.$$

Возвращаемся к старым переменным:  $3^{\frac{x}{2}} = 3 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$ .

**Ответ.**  $\{2\}, 4$ . ◀

*Примечание.* Мы не всегда будем так подробно делать замену переменных в очевидных квадратных уравнениях, а будем решать их «на черновике». Кроме того, не всегда будем писать систему, а просто будем искать положительные решения.

2.  $3^{2x} + 3^{-2x} + 3^x + 3^{-x} = 4$ .

При замене переменных возникающие рациональные уравнения иногда бывают довольно сложными, как в этом примере.

*Первый способ.*

►  Сделаем замену переменных  $3^x = y, y > 0$ , получим уравнение  $y^2 + \frac{1}{y^2} + y + \frac{1}{y} = 4$ . Но как его решить?

Это уравнение называется возвратным – оно не меняется, если заменить  $y$  на  $\frac{1}{y}$ . В этом случае делают замену переменных

$t = y + \frac{1}{y}$ . Тогда

$$\begin{aligned} & \begin{cases} y > 0, \\ \left(y^2 + 2 + \frac{1}{y^2}\right) - 2 + y + \frac{1}{y} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > 0, \\ \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right) - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} y > 0, \\ y + \frac{1}{y} = \frac{-1 \pm 5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow y + \frac{1}{y} = 2 \Leftrightarrow y = 1 \Rightarrow x = 0. \end{aligned}$$

**Ответ.**  $\{0\}, 0$ . ◀

## Второй способ.



Перепишем заданное уравнение

$$3^{2x} + 3^{-2x} + 3^x + 3^{-x} = 4 \Leftrightarrow \left(3^{2x} + \frac{1}{3^{2x}}\right) + \left(3^x + \frac{1}{3^x}\right) = 4. \text{ Теперь его можно}$$

решить и по-другому. Так как  $3^x > 0$ , а сумма двух положительных взаимно обратных чисел всегда не меньше 2, а равна 2 тогда и только тогда, когда число равно 1. Поэтому

$$3^{2x} + \frac{1}{3^{2x}} \geq 2, \quad 3^x + \frac{1}{3^x} \geq 2 \Rightarrow \left(3^{2x} + \frac{1}{3^{2x}}\right) + \left(3^x + \frac{1}{3^x}\right) \geq 4, \quad \text{а так как}$$

$$\left(3^{2x} + \frac{1}{3^{2x}}\right) + \left(3^x + \frac{1}{3^x}\right) = 4, \quad \text{то это возможно тогда и только тогда,}$$

$$\text{когда } \begin{cases} 3^{2x} = 1, \\ 3^x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow x^2 = 0.$$

**Ответ.**  $\{0\}$ , 0. ◀

*Примечание.* Это было любопытное уравнение. Для непрофильного класса, как бы его ни решали, оно, без сомнения, относится к серии С. Если же его решают в профильном классе, то его можно отнести и к серии В – второй способ занимает совсем немного времени.

$$3. \left| 16^{x-\sqrt{12x+4}} - 3 \cdot 4^{x-\sqrt{12x+4}} \right| = 2 \cdot 4^{x-\sqrt{12x+4}} - 4.$$

*Первый способ (поучительный пример на замену переменных!).*

► Пусть  $4^{x-\sqrt{12x+4}} = t$ ,  $t > 0$ , тогда уравнение примет вид

$$|t^2 - 3t| = 2t - 4. \text{ Решим его:}$$

$$|t^2 - 3t| = 2t - 4 \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 2, \\ \begin{cases} t^2 - 3t = 2t - 4 \\ t^2 - 3t = -2t + 4 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4, \\ t = \frac{\sqrt{17} + 1}{2}. \end{cases}$$

Возвращаемся к старым переменным:

$$\begin{cases} 4^{x-\sqrt{12x+4}} = 4, \\ 4^{x-\sqrt{12x+4}} = \frac{\sqrt{17} + 1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2\sqrt{3}\sqrt{x} + 4 = 1, \\ x - 2\sqrt{3}\sqrt{x} + 4 = \log_4 \frac{\sqrt{17} + 1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} (\sqrt{x} - \sqrt{3})^2 = 0, \\ \emptyset, \text{ т. к. } \frac{D}{4} = 3 - 4 + \log_4 \frac{\sqrt{17} + 1}{2} < 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow x^2 = 9.$$

**Ответ.**  $\{3\}$ , 9. ◀

*Примечание.* При решении этого примера часто получается неправильный ответ – школьники *не замечают*, что дискриминант уравнения  $x - 2\sqrt{3}\sqrt{x} + 4 = \log_4 \frac{\sqrt{17} + 1}{2}$  отрицательный.

*Второй способ.*

► Можно уменьшить количество выкладок, если сразу заметить, что  $4^{x - \sqrt{12x} + 4} \equiv 4^{(\sqrt{x} - \sqrt{3})^2 + 1} = t$ ,  $t \geq 4$ . Тогда уравнение примет вид системы:

$$\begin{cases} t \geq 4, \\ |t^2 - 3t| = 2t - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 4, \\ t^2 - 3t = 2t - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 4, \\ t = 1, \Leftrightarrow t = 4. \\ t = 4 \end{cases}$$

Следовательно,  $4^{(\sqrt{x} - \sqrt{3})^2 + 1} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow x^2 = 9$ .

**Ответ.**  $\{3\}$ , 9. ◀

*Примечание.* И там, и там есть «ловушки». Первый способ всё-таки проще – там надо просто быть внимательней с дискриминантом квадратного уравнения, а до оценки  $t$  во втором способе догадаться труднее.

$$4. (26 + 15\sqrt{3})^x - 5(7 + 4\sqrt{3})^x + 6(2 + \sqrt{3})^x + (2 - \sqrt{3})^x = 5.$$

► Замена переменных в этом уравнении не сразу видна – многие забывают о существовании взаимно обратных иррациональных выражений и чисел. Заметим прежде всего, что в нашем случае  $2 - \sqrt{3} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$ . Остальные выражения приходится сравнивать со

степенями  $2 + \sqrt{3}$ . Оказывается, что  $7 + 4\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^2$ ,

$26 + 15\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^3$ . Тогда удобно ввести новую переменную

$t = (2 + \sqrt{3})^x$ ,  $t > 0$ , и уравнение примет вид:

$$t^3 - 5t^2 + 6t + \frac{1}{t} = 5 \Leftrightarrow t^4 - 5t^3 + 6t^2 - 5t + 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 5t + 6 - 5\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} = 0.$$

Опять получили возвратное уравнение. Перепишем его в таком виде:

$$\left(t^2 + 2 + \frac{1}{t^2}\right) - 5\left(t + \frac{1}{t}\right) + 4 = 0 \Leftrightarrow \left(t + \frac{1}{t}\right)^2 - 5\left(t + \frac{1}{t}\right) + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t + \frac{1}{t} = 1 \Leftrightarrow \emptyset, \\ t + \frac{1}{t} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow t = 2 \pm \sqrt{3}. \text{ Возвращаемся к старой переменной:}$$

$$\begin{cases} (2 + \sqrt{3})^x = 2 + \sqrt{3} \Leftrightarrow x = 1, \\ (2 + \sqrt{3})^x = 2 - \sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^{-1} \Leftrightarrow x = -1. \end{cases}$$

**Ответ.**  $\{-1; 1\}, 2.$  ◀

5.  $4^y + \frac{4^{y+1}}{(2^y + 2)^2} = 5.$  6.  $6 \cdot 2^{3x+2} - 10 \cdot 2^{2x+1} + 2^{x+1} + 1 = 0.$

7.  $5^{2x} = 115 \cdot 5^{x-1} + 50.$  8.  $2^{\sqrt{x}} - 2^{3-\sqrt{x}} = 7.$  9.  $7^{3t} + 7^{2t} + 3 \cdot 7^t - 5 = 0.$

10.  $|2 \cdot 3^y + 8| - |3^y - 5| = 12.$  11.  $\frac{1}{2^{1-x} - 1} - \frac{3}{4} \sqrt{\frac{1}{2^{1-x} - 1}} = \frac{1}{4}.$

12.  $\sqrt{2^{3y+1} - 5 \cdot 2^{2y} - 2^{y+3}} + 2 = \sqrt{2}(2^y - 1).$

13.  $\sqrt{2^{3t+2} + 9 \cdot 2^{2t} - 2^{t+2}} + 2 = \sqrt{2^{2t} - 3 \cdot 2^t + 4}.$

14.  $2^{\sqrt{x}-2} + 2 \cdot 2^{2-\sqrt{x}} - 3 = 0.$  15.  $4^x + 2^x - 2 = 0.$

16.  $3 \cdot 9^{x+1} - 6 \cdot 3^x - 1 = 0.$  17.  $4^x + 3 \cdot 2^{x+2} = 64.$

18.  $\sqrt{2^{2y+1} - 2^{y+3}} + 9 = 2^y - 1.$

19.  $5 \cdot 27^x - 3 \cdot 9^x 5^x - 5 \cdot 3^x 25^x + 3 \cdot 5^{3x} = 0.$

20.  $(26 + 15\sqrt{3})^x - 3(7 + 4\sqrt{3})^x - 2(2 + \sqrt{3})^x + (2 - \sqrt{3})^x = 3.$

21.  $4^{2x-2} - 4^x + \left|4^{x-1} - \frac{1}{3}\right| = -\frac{7}{3}.$

22. Решите уравнение  $4^{\sqrt{3x^2-2x+1}} + 2 = 9 \cdot 2^{\sqrt{3x^2-2x}}$  и найдите утроенную сумму всех его корней.

## §4. Разные уравнения

1. Решите уравнение

$$f(g(x)) + g(3 + f(x)) = 30, \quad \text{если} \quad f(x) = 0,5x^4 - 4x + 5, \quad \text{а}$$

$$g(x) = \begin{cases} 25, & x \geq 4, \\ 2^x + \frac{9}{5-x}, & x < 4. \end{cases}$$

► Такие уравнения раньше не встречались.

Можно было бы начать решать с подстановки функций в уравнение, но при  $x < 4$  уравнение получится очень сложное, особенно тогда, когда аргумент функции  $g(x)$  меньше 4. Поэтому начнём со сравнения аргумента функции  $g(x)$  во втором слагаемом уравнения с числом 4:

$$\begin{aligned} (3 + f(x)) - 4 &= 3 + 0,5x^4 - 4x + 5 - 4 = \frac{1}{2}(x^4 - 8x + 8) = \\ &= \frac{1}{2}(x^4 - 4x^2 + 4 + 4x^2 - 8x + 4) = \frac{1}{2}((x^2 - 2)^2 + 4(x - 1)^2) > 0. \end{aligned}$$

Ясно – в задаче  $g(3 + f(x)) \equiv 25$ . Вот это да!

Теперь уравнение легко записать:

$$\begin{aligned} f(g(x)) + g(3 + f(x)) = 30 &\Leftrightarrow f(g(x)) + 25 = 30 \Leftrightarrow \frac{1}{2}g^4 - 4g + \\ + 5 + 25 = 30 &\Leftrightarrow g^4 - 8g = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = 0, \\ g(x) = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Рассмотрим оба случая. Если  $x \geq 4$ , то  $g(x) = 25 > 0$ ; если  $x < 4$ , то тоже  $g(x) = 2^x + \frac{9}{5-x} > 0$  – поэтому первое уравнение не имеет решений. Ясно, что второе уравнение может иметь решение лишь при  $x < 4$ :

$$g(x) = 2 \Leftrightarrow 2^x + \frac{9}{5-x} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^x = \frac{2x-1}{x-5} = \frac{2(x-5+5)-1}{x-5} \Leftrightarrow 2^x = 2 + \frac{9}{x-5}.$$

Уравнение аналитически не решается, но слева стоит монотонно возрастающая функция, а справа – монотонно убывающая. Следовательно, если пересечение существует, то оно единственно. Находим подбором:  $x = -1$ .

Полезно прикинуть эскизы графиков левой  $y_1(x) = 2^x$  и правой  $y_2(x) = 2 + \frac{9}{x-5}$  частей уравнения. Заметим, что  $y_1(0) = 1$ , а  $y_2(0) = 0,2$  (рис. 4). Поэтому графики пересекаются на отрицательной полуоси – пересечение существует, и оно единственно.

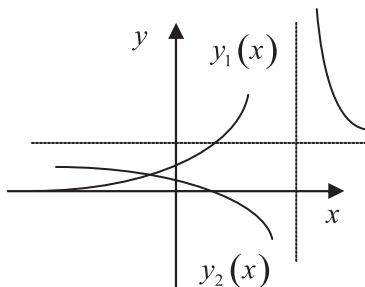


Рис. 4

**Ответ.**  $-1$ . ◀

## Решите уравнения 2 – 17

2.  $\frac{1}{5^x} + \frac{1}{7^x} = 12$ .

► 🤖 Что делать? Это классический пример уравнения, которое алгоритмично не решается. Но мы заметим, что левая часть уравнения является строго убывающей функцией, которая любое положительное значение принимает только один раз. Подбором убеждаемся, что  $x = -1$  является корнем.

**Ответ.**  $-1$ .

*Примечание.* Сейчас что-то часто стали встречаться монотонные функции, где приходится угадывать корень, например, в заданиях ЕГЭ. ◀

$$3. \ 2^{2^{\sin^2 x}} + 2^{2^{\frac{\cos 2x}{2}}} = 2^{1+\sqrt[4]{2}}.$$



Этот пример тоже не решается алгоритмически. Попробуем упростить левую часть.

$$\frac{\cos 2x}{2} = \frac{1 - 2\sin^2 x}{2} = \frac{1}{2} - \sin^2 x \Rightarrow 2^{2^{\sin^2 x}} + 2^{2^{\frac{1}{2} - \sin^2 x}} = 2^{2^{\sin^2 x}} + 2^{\sqrt{2} \cdot 2^{-\sin^2 x}}.$$

Пусть  $t = 2^{\sin^2 x} \Rightarrow 2^{-\sin^2 x} = \frac{1}{t}$ , тогда уравнение примет вид

$2^t + 2^{\frac{\sqrt{2}}{t}} = 2^{1+\sqrt[4]{2}}$ . Уравнение всё равно не решается. Тогда попробуем применить к сумме левой части неравенство Коши для среднего арифметического и среднего геометрического: если  $a > 0, b > 0$ , то  $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ , причём равенство имеет место тогда и только тогда, когда  $a = b$ . Мы дважды воспользуемся этим неравенством. Во-первых,  $2^t + 2^{\frac{\sqrt{2}}{t}} \geq 2 \cdot 2^{\frac{t}{2}} \cdot 2^{\frac{\sqrt{2}}{2t}} = 2 \cdot 2^{\frac{t^2 + \sqrt{2}}{2t}}$ , причём равенство возможно только при  $2^t = 2^{\frac{\sqrt{2}}{t}} \Leftrightarrow t = \frac{\sqrt{2}}{t}$ . Теперь применим неравенство Коши к показателю:

$$\frac{t^2 + \sqrt{2}}{2t} \equiv \frac{(t - \sqrt[4]{2})^2 + 2t\sqrt[4]{2}}{2t} \geq \sqrt[4]{2},$$

причем, равенство возможно только при  $t = \sqrt[4]{2}$ . Тогда

$$2^t + 2^{\frac{\sqrt{2}}{t}} \geq 2 \cdot 2^{\frac{t}{2}} \cdot 2^{\frac{\sqrt{2}}{2t}} = 2 \cdot 2^{\frac{t^2 + \sqrt{2}}{2t}} = 2 \cdot 2^{\frac{(t\sqrt[4]{2})^2 + 2t\sqrt[4]{2}}{2t}} \geq 2 \cdot 2^{\sqrt[4]{2}} = 2^{1+\sqrt[4]{2}}.$$

Следовательно, решением уравнения может быть только  $t$ , удовлетворяющее условиям:

$$\begin{cases} t > 0, \\ t = \frac{\sqrt{2}}{t}, \Leftrightarrow t = \sqrt[4]{2} \Rightarrow 2^{\sin^2 x} = 2^{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \\ t = \sqrt[4]{2} \end{cases}$$

**Ответ.**  $\pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z.$  ◀

4.  $(2^x + 2)^2 + \frac{24}{4^x + 2^{x+2}} = 18.$  5.  $8^x - 13 \cdot 4^x 3^x - 2^x 9^x + 13 \cdot 3^{3x} = 0.$

6.  $ba^x = a \cdot b^{\frac{1}{x}}.$  7.  $9^{\frac{\log_1(x+2)}{3}} = 7^{\frac{\log_1(2x^2+3x+2)}{7}}.$  8.  $500 \cdot 8^x = 8 \cdot 5^{\frac{1}{x}}.$

9.  $x + 27^{2.5|\log_9 \sqrt[3]{x}|} = \frac{10}{3}.$  10.  $2^{2^{\cos^2 x}} + 2^{2^{\frac{\cos 2x}{2}}} = 2^{1+\sqrt[4]{2}}.$

11.  $2(\sqrt{3})^{\sin x + 3\sqrt{1-\cos^2 x}} - 17 \cdot 3^{\sin x} + 33 = 0.$

12.  $2^{|x-2|\sin x} = (\sqrt{2})^{x|\sin x|}.$  13.  $10 \cdot 4^{\frac{1}{\sin^2 x}} - 16 = 4^{2\operatorname{ctg}^2 x + 2}.$

14.  $\sqrt{(4-3^x)^2} + \sqrt{(3^x-6)(3^x+9)} = 3^x - 4.$

15.  $\sqrt{(3-6^x)^2} + \sqrt{(6^x+6)(11-6^x)} = 6^x - 3.$

16.  $4\sqrt{(x-3)^2} + \sqrt{4^x - 34 \cdot 2^x + 64} = 12 - 4x.$

## Глава II. Уравнения, содержащие логарифм с постоянным основанием

### §1. Основные формулы для логарифмической функции

Прежде чем решать задачи, опять вспомним *школьные* формулы.

Тема «Логарифмы» многим кажется простой – запомни формулы, и всё получится. Однако формулы почему-то очень быстро забываются. В школе совсем мало времени уделяется этой теме. Даже с определением логарифма возникают трудности. Если попросить дать определение логарифма, то многие ответят так:

✎ «Логарифм – это показатель степени, в которую нужно возвести основание, чтобы получить заданное число».

Так ли это? Нет, не так. Допустим, что нам надо вычислить значение  $\log_{-2}(-8)$ . Согласно определению,  $-8 = (-2)^3$  – значит,  $\log_{-2}(-8) = 3$ . Ничего не «режет» глаз? Здесь допущена ошибка! В чём же дело? Дано *неполное* определение логарифма – поэтому ничего и не получается.

Мы уже выяснили, что так как показательная функция монотонна, то любая горизонтальная прямая  $y = b$ ,  $b > 0$  пересекает график функции  $y = a^x$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  ровно один раз. Отсюда следует, что если  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , то для любого положительного числа  $b$  существует *единственное* число  $x$  такое, что  $a^x = b$ . Это число  $x$  математики договорились называть *логарифмом* числа  $b$  по основанию  $a$  и обозначать  $\log_a b$ . Из определения следует, что

$$a^{\log_a b} = b, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad b > 0.$$

Это соотношение, являющееся, по сути, *определением*, часто называют основным логарифмическим тождеством:  $b = a^{\log_a b}$  !

Теперь можно сформулировать правильно то *определение*, которое так нравится школьникам.

✎ Логарифм числа  $b$  по основанию  $a$  – это показатель степени, в которую нужно возвести *положительное, отличное от 1* основание  $a$ , чтобы получить заданное число  $b$ , т. е.

$$b = a^{\log_a b}, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad b > 0.$$

Но это – «относительное» тождество, т. к. у соотношения есть ОДЗ: оно имеет место только для *положительных  $a$ , не равных 1, и положительных  $b$ .*

Поэтому  $\log_{-2}(-8)$  не существует, т. к. основание меньше 0, да и под знаком логарифма отрицательное число, а логарифмы существуют только у *положительных чисел!*

В школе *показывается*, что если  $a$  – любое действительное число, то верны формулы:

$$Л1. \log_a M + \log_a N = \log_a MN, \quad Л2. \log_a M - \log_a N = \log_a \frac{M}{N},$$

$$Л3. \log_a M^\alpha = \alpha \log_a M, \quad Л4. \log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}, \quad b > 0, \quad b \neq 1.$$

Как и в случае с показательной функцией, мы их записали в «обратном» порядке. По крайней мере, в таком виде все левые части имеют одну и ту же область определения. Кроме того, в школе формулы чаще всего используются именно в этом варианте, чтобы «свернуть» сумму или разность логарифмов, левые части просто «кричат» (чего нельзя сказать про правые части), что они определены только для  $M > 0, N > 0$ !

Заметим, однако, что левые и правые части формул Л1 и Л2 имеют разные области определения: левая часть определена при  $M > 0, N > 0$ , а правая – при  $MN > 0$ . Это надо учитывать при решении задач. Как? А что, если  $M < 0, N < 0$ ? Заметим, что  $MN > 0$  не только тогда, когда  $M > 0, N > 0$ , но и тогда, когда  $M < 0, N < 0$ . Рассмотрим именно этот случай:  $MN = (-M)(-N)$ , и если  $-M > 0, -N > 0$ , то, согласно формуле Л1,  $\log_a(-M)(-N) = \log_a(-M) + \log_a(-N)$ . Объединяя со «школьной» формулой, получаем более общую формулу: если  $MN > 0$ , то  $\log_a MN = \log_a |M| + \log_a |N|$ . Аналогично показывается, что если  $MN > 0$ , то  $\log_a \frac{M}{N} = \log_a |M| - \log_a |N|$ .

Если  $M < 0$ , то  $\log_a (-M)^{2n} = 2n \log_a (-M)$  для любого натурального  $n$ , и свойство ЛЗ принимает другой вид:  $\log_a M^{2n} = 2n \log_a |M|$ ,  $M \neq 0$ . Итак, получили обобщение школьных формул. Теперь дополним список формул.

$$\text{Л5. } \log_a MN = \log_a |M| + \log_a |N|, MN > 0,$$

$$\text{Л6. } \log_a \frac{M}{N} = \log_a |M| - \log_a |N|, MN > 0,$$

$$\text{Л7. } \log_a M^{2n} = 2n \log_a |M|, M \neq 0.$$

*Все эти свойства читаются в обе стороны (т. е. являются тождествами) при выполнении приведённых для каждого из них условий.*

Эти формулы необходимо использовать при «раскрытии» логарифмов произведения, частного и чётной степени, когда знаки  $M$  и  $N$  не известны.

Но как всё это запомнить? Практика, и ещё раз практика... Поэтому логарифмическая тема – самая трудная.

Отметим некоторые наиболее употребляемые частные свойства:

1.  $\log_a 1 = 0$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , т. е. логарифм 1 при любом допустимом основании равен 0.

2.  $\log_a a^x = x$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ . Это свойство часто применяют в «обратном» порядке – чтобы выразить заданное число  $b$  через  $\log_a$ :  $b = \log_a a^b$ .

Часто задаётся вопрос: является ли переход к новому основанию всегда равносильной операцией? Хороший вопрос. Ответ: если правильно переходить, то всегда. Что значит «правильно»?

Если переходить от одного допустимого постоянного основания к другому допустимому постоянному основанию, то это равносильная операция.

Где-то могут быть «проколы»? Вообще говоря, могут. Например,  $\log_{(3)^2} a = \frac{\log_3 a}{\log_3 3^2} = \frac{1}{2} \log_3 a$ , но  $\log_{(-3)^2} a \neq \frac{1}{2} \log_{(-3)} a$ , т. к. число  $-3$  не является допустимым основанием.

Но ведь есть, казалось бы, формула  $\log_{b^k} a = \frac{1}{k} \log_b a$ . Тут где-то «подвох»? Никак нельзя избавиться от квадрата? Как видите, в нашем списке такой формулы нет. Это случайно? Вовсе нет. Нет потому, что в ней нет «суровой» необходимости – всегда можно воспользоваться формулой Л4, а затем Л3 или Л7:  $\log_{b^k} a = \frac{\log_b a}{\log_b b^k} = \frac{1}{k} \log_b a$ . При этом все зависит от того, каково  $k$ . Если  $k = 2n + 1$  – нечётное, то  $\log_{a^{2n+1}} b$  определён при  $a > 0, a \neq 1$  и

$$\text{Л8. } \log_{a^{2n+1}} b = \frac{\log_a b}{\log_a a^{2n+1}} = \frac{\log_a b}{2n+1}.$$

Если же  $k = 2n$  – чётное, то  $\log_{a^{2n}} b$  определён при  $|a| \neq 0, |a| \neq 1$ , а тогда

$$\text{Л9. } \log_{a^{2n}} b = \log_{|a|^{2n}} b = \frac{\log_{|a|} b}{\log_{|a|} |a|^{2n}} = \frac{\log_{|a|} b}{2n}.$$

Поэтому  $\log_{(-3)^2} a = \frac{1}{2} \log_{|-3|} a = \frac{1}{2} \log_3 a$ .

Учитывая все свойства показательной функции и определение логарифма, можно построить эскизы графиков (рис. 5 – 6).

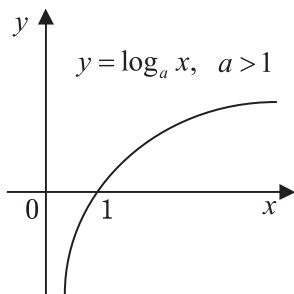


Рис. 5

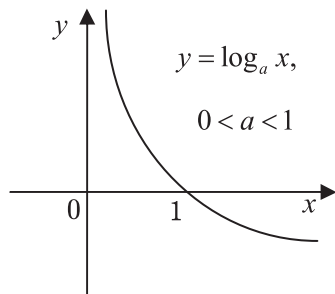


Рис. 6

Чтобы построить график показательной или логарифмической функции, удобно заполнить маленькую табличку:

|            |     |   |               |
|------------|-----|---|---------------|
| $x$        | $a$ | 1 | $\frac{1}{a}$ |
| $\log_a x$ | 1   | 0 | -1            |

Построим, например, эскиз графика функции  $y = \log_{\frac{1}{5}} x$ . Составим табличку:

|                        |               |   |    |
|------------------------|---------------|---|----|
| $x$                    | $\frac{1}{5}$ | 1 | 5  |
| $\log_{\frac{1}{5}} x$ | 1             | 0 | -1 |

Теперь эскиз (рис. 7).

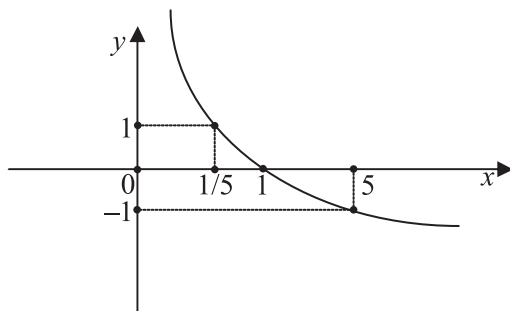


Рис. 7

К формулам логарифмов надо привыкнуть – иначе они быстро «вылетят» из головы. Поэтому сначала займёмся упражнениями по упрощению выражений, содержащих логарифмы.

## §2. Упрощение выражений, содержащих логарифмы

Прежде чем научиться решать уравнения или неравенства, содержащие логарифмы, необходимо научиться обращаться с формулами и свойствами логарифмов. Этим мы и займёмся.

### Вычислите значения выражений 1 – 19

1.  $0,5^{\log_{0,5} 3} - 12$ .

► Воспользуемся основным логарифмическим тождеством:  
 $0,5^{\log_{0,5} 3} - 12 \equiv 3 - 12 = -9$ .

**Ответ.**  $-9$ . ◀

2.  $\log_2 \sqrt[4]{2^3 \sqrt{2}} \cdot \log_3 3^8$ .

►  Что-то очень громоздко? Подумаем: под знаком первого логарифма некоторая степень двойки, а у второго – степень тройки.

Найдём степень числа 2:  $\sqrt[4]{2^3 \sqrt{2}} = 2^{\frac{3}{4} + \frac{1}{8}} = 2^{\frac{7}{8}}$ , а затем можно воспользоваться свойством ЛЗ:

  $\log_2 \sqrt[4]{2^3 \sqrt{2}} \cdot \log_3 3^8 = \log_2 2^{\frac{7}{8}} \cdot \log_3 3^8 = \frac{7}{8} \cdot 8 = 7$ . Вот и всё.

**Ответ.** 7. ◀

3.  $(\log_5 9^{4 \log_9 5})^2$ .

Выражение, на первый взгляд, довольно громоздкое. Его можно преобразовывать по-разному.

*Первый способ.*

► Воспользуемся сначала свойством ЛЗ:  $\log_a M^\alpha = \alpha \log_a M$ , а затем приведём все логарифмы к одному основанию, используя Л4:

$$(\log_5 9^{4 \log_9 5})^2 = (4 \log_5 5 \cdot \log_5 9)^2 = \left( 4 \log_5 5 \cdot \frac{\log_9 9}{\log_9 5} \right)^2 = 16.$$

**Ответ.** 16. ◀

*Второй способ.*

► Сначала преобразуем подлогарифмическое выражение, стоящее в показателе, используя свойство ЛЗ в «обратном» виде  $k \log_b a = \log_b a^k$ , чтобы воспользоваться затем основным логарифмическим тождеством:

$$(\log_5 9^{4 \log_9 5})^2 = (\log_5 9^{\log_9 5^4})^2 = (\log_5 5^4)^2 = 4^2.$$

**Ответ.** 16. ◀

4.  $\sqrt{36 + 25^{(\log_8 5)^{-1}}} + \sqrt{(\log_6 9 + \log_6 4)^3 + 28}$ .

► Ого! В школе такое не встречалось? Это задание 2003 года. Сейчас встречаются более простые задания.

Конечно, провести все выкладки не так просто. Ведь логарифмы в школе «проходят» очень быстро – вызубрили формулы, написали контрольные и... забыли. Чтобы справляться с логарифмами, нужна довольно большая практика.

Решаем:

$$\begin{aligned}\sqrt{36 + 25^{(\log_8 5)^{-1}}} + \sqrt{(\log_6 9 + \log_6 4)^3 + 28} &= \sqrt{36 + 25^{\frac{1}{\log_8 5}}} + \\ &+ \sqrt{(\log_6 (9 \cdot 4))^3 + 28} = \sqrt{36 + 5^{\frac{2 \log_5 8}{\log_5 5}}} + \sqrt{2^3 + 28} = \\ &= \sqrt{36 + 5^{\log_5 64}} + 6 = \sqrt{36 + 64} + 6 = 16.\end{aligned}$$

**Ответ. 16. ◀**

$$5. 0,9 \left( \frac{\log_9 162}{\log_2 9} - \frac{\log_9 18}{\log_{18} 9} \right).$$

► В задачах, где надо производить действия с логарифмами, у которых разные основания, очень часто полезно во всех логарифмах перейти к одному основанию. Это не всегда самый короткий путь «к победе», но зато верный. Перейдём к основанию 9 (а можно и к основанию 2):

$$\begin{aligned}0,9 \left( \frac{\log_9 162}{\log_2 9} - \frac{\log_9 18}{\log_{18} 9} \right) &= 0,9 \left( \frac{\log_9 81 \cdot 2}{\frac{\log_9 9}{\log_9 2}} - \frac{\log_9 18}{\frac{\log_9 9}{\log_9 18}} \right) = \\ &= 0,9 \left( \frac{2 + \log_9 2}{\frac{1}{\log_9 2}} - \frac{\log_9 18}{\frac{1}{\log_9 18}} \right) = \\ &= 0,9 (\log_9 2 \cdot (2 + \log_9 2) - \log_9^2 18) = 0,9 (2 \log_9 2 + \log_9^2 2 - \log_9^2 18) = \\ &= 0,9 (2 \log_9 2 + (\log_9 2 - \log_9 18)(\log_9 2 + \log_9 18)) = \\ &= 0,9 \left( 2 \log_9 2 + \left( \log_9 \frac{1}{9} \right) (\log_9 36) \right) = 0,9 (\log_9 4 - \log_9 36) = \\ &= 0,9 \left( \log_9 \frac{1}{9} \right) = -0,9.\end{aligned}$$

**Ответ.**  $-0,9$ . ◀

$$6. \log_{15} \frac{3^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{4}{5}}}{7} - \log_{15} \frac{225}{7 \cdot 3^{\frac{2}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{5}}}.$$

*Первый способ.*

► Можно всё подвести под знак логарифма:

$$\begin{aligned} \log_{15} \frac{3^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{4}{5}}}{7} - \log_{15} \frac{225}{7 \cdot 3^{\frac{2}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{5}}} &= \log_{15} \frac{3^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{4}{5}}}{7} - \log_{15} \frac{(15)^2}{7 \cdot 3^{\frac{2}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{5}}} = \\ &= \log_{15} \frac{3^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{4}{5}} \cdot 7 \cdot 3^{\frac{2}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{5}}}{7 \cdot (15)^2} = \log_{15} \frac{3 \cdot 5}{(15)^2} = -1. \end{aligned}$$

**Ответ.**  $-1$ . ◀

*Второй способ.*

► Можно воспользоваться для каждого логарифма свойством ЛЗ:

$$\begin{aligned} \log_{15} \frac{3^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{4}{5}}}{7} - \log_{15} \frac{225}{7 \cdot 3^{\frac{2}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{5}}} &= \frac{1}{3} \log_{15} 3 + \frac{4}{5} \log_{15} 5 - \log_{15} 7 - 2 + \\ &+ \frac{2}{3} \log_{15} 3 + \log_{15} 7 + \frac{1}{5} \log_{15} 5 = \log_{15} 3 + \log_{15} 5 - 2 = -1. \end{aligned}$$

**Ответ.**  $-1$ . ◀

$$7. 2, 2 \left( \frac{\log_4 36}{\log_{36} 4} - \frac{\log_4 144}{\log_9 4} \right). \quad 8. 0, 3^{\log_{0,3} 2} - 5. \quad 9. \frac{\log_7 27}{\log_7 \sqrt{3}}.$$

$$10. 7^{\log_{49} 9}. \quad 11. \left( \frac{1}{7} \right)^{\log_{49}^{-1} 9}. \quad 12. 2^{\log_2 7} + \log_5 75 - \log_5 3.$$

$$13. 25 \cdot 144^{\frac{\log_1 5}{12}} \cdot 15^{\log_{225} 49}. \quad 14. \log_{13} 14 \cdot \log_{14} 169.$$

$$15. \sqrt{9^{(\log_4 3)^{-1}} + (\log_3 7^{3 \log_7 3})^2}. \quad 16. \log_5 9 \cdot \log_3 25.$$

$$17. \log_{\frac{1}{9}} 4 \cdot \log_4 27.$$

$$18. \log_3 \sqrt[5]{27} - \log_3 \frac{1}{\sqrt[3]{9}} + 4 \log_3 81. \quad 19. \log_3 5 - \frac{1}{\log_5 81} + \frac{3}{4} \log_3 \frac{9}{5}.$$

### §3. Множество значений показательных и логарифмических функций

Найдите множество значений функций 1 – 14

1.  $y = 2^{x^2-1}$ .

► Данная функция имеет вид  $y = 2^{x^2-1} = \frac{1}{2} \cdot 2^{x^2} = \frac{1}{2} \cdot 2^z$ , где  $z = x^2$ .

Функция  $z = x^2$  принимает все значения, принадлежащие промежутку  $[0; +\infty)$ . Непрерывная функция  $y = 2^z$  на  $[0; +\infty)$  принимает все значения, принадлежащие промежутку  $[1; +\infty)$ . Отсюда следует, что  $\frac{1}{2} 2^{x^2}$  принимает все значения из промежутка  $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ .

Ответ.  $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ . ◀

2.  $y(x) = \log_2(1-x^2)$ .

► Заметим, что  $D(y): 1-x^2 > 0$ , а т. к.  $x^2 \geq 0$ , то  $0 < 1-x^2 \leq 1$ .

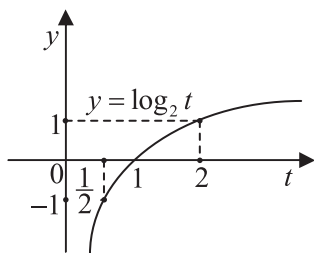


Рис. 8

Из графика (рис. 8) видно, что при изменении аргумента логарифма  $t$  от 0 до 1 логарифм пробегает все значения из промежутка  $(-\infty; 0]$ . А это и означает, что  $E(y) = (-\infty; 0]$ .

Ответ.  $(-\infty; 0]$ . ◀

3.  $y = \log_{(6+4x-2x^2)} \left( \frac{|x+2| + |x-4|}{3} \right)$ .



Это не самая простая задача. Найдём сначала область определения заданной функции. Оказывается, откуда мы многое узнаем о подлогарифмическом выражении. Итак,

$$D(y): \begin{cases} 6+4x-2x^2 > 0 \\ 6+4x-2x^2 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 3 \Rightarrow \begin{cases} x+2 > 0, \\ x-4 < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |x+2| + |x-4| = 6 \Rightarrow \frac{|x+2| + |x-4|}{3} = 2.$$

Так как подлогарифмическое выражение равно 2, то  $\log_2 \frac{|x+2| + |x-4|}{2} = 1$ , а потому удобно перейти к основанию 2:

$$y(x) = \log_{(6+4x-2x^2)} \left( \frac{|x+2| + |x-4|}{3} \right) \equiv \frac{\log_2 \frac{|x+2| + |x-4|}{3}}{\log_2 (6+4x-2x^2)} \stackrel{OZ}{=} \frac{1}{\log_2 (8-2(x-1)^2)}.$$



Задача намного упростилась – надо найти в первую очередь множество значений более простой функции  $y_1(x) = \log_2 (8-2(x-1)^2)$ . Замечаем, что логарифм существует, когда  $8-2(x-1)^2 > 0$ , но при этом  $8-2(x-1)^2 > 0$  принимает все значения из промежутка  $(0; 8]$ . Тогда  $y_1(x) = \log_2 (8-2(x-1)^2)$  принимает все значения из промежутка  $(-\infty; 3]$ . Так как  $\log_2 (8-2(x-1)^2)$  стоит в знаменателе, то надо исключить значение, когда  $\log_2 (8-2(x-1)^2) = 0$ . Отсюда следует, что знаменатель принимает все значения из объединения промежутков  $(-\infty; 0)$  и  $(0; 3)$  – значит,

$$E(y) = (-\infty; 0) \cup \left[ \frac{1}{3}; +\infty \right).$$

**Ответ.**  $E(y) = (-\infty; 0) \cup \left[ \frac{1}{3}; +\infty \right).$  ◀

4.  $y = 3^{\sin x}$ . 5.  $y = \log_{\frac{1}{2}} (4-x^2)$ . 6.  $y = \log_{\frac{1}{2}} (x^2-4)$ .

7.  $y = \log_{\frac{1}{2}} (1-x^2)$ . 8.  $y = 2^{-x^2}$ . 9.  $y = 2^{1-2\sin^2 x}$ .

$$10. y = \log_2(x-1)(5-x). \quad 11. y = \log_{\frac{1}{2}}(6-x-x^2).$$

$$12. y = \log_{\frac{1}{7}}\left(\frac{10 + \log_7(7+|x|)}{77}\right). \quad 13. y = \log_{0,25}\left(\frac{47 + \log_4(4+x^2)}{3}\right).$$

$$14. y = \log_{0,2}\left(\frac{80}{13 + \log_5(125+x^4)}\right). \quad 15. y = \log_{(16x-12-4x^2)}\left(\frac{|x+1|+|x-5|}{3}\right).$$

$$16. y = \log_{(2x+8-x^2)}\left(\frac{|x+4|-|x+3|}{3}\right).$$

## § 4. Преобразование буквенных выражений

Это более сложный параграф, потому что здесь большую роль будет играть область определения, или ОДЗ, логарифмов.

1. Найдите значение  $a$  (или сумму значений  $a$ , если их несколько), если  $\log_a 4 = 2$ . В таких задачах есть несколько путей достижения цели.

*Первый способ.*

► Можно действовать по определению. Так как задан  $\log_a 4$ , то  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , а тогда  $\log_a 4 = 2 \Leftrightarrow 4 = a^2 \stackrel{a>0}{\Leftrightarrow} a = 2$ .

**Ответ. 2. ◀**

*Второй способ.*

► А можно воспользоваться свойством ЛЗ (читаем справа налево). Так как задан  $\log_a 4$ , то  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , а тогда

$$\log_a 4 = \log_a a^2 \Leftrightarrow 4 = a^2 \stackrel{a>0}{\Leftrightarrow} a = 2.$$

**Ответ. 2. ◀**

2. Найдите  $a^2$  (или сумму  $a^2$ , если может быть несколько значений  $a$ ), если  $\log_5 a^4 = 4$ .

*Неправильное решение.*

►  Чаше всего школьники, не задумываясь, пишут, что они воспользуются свойством ЛЗ:  $\log_5 a^4 = 4 \Leftrightarrow 4 \log_5 a = 4 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \log_5 a = 1 \Leftrightarrow a = 5$ . Ответ неверный. В чём дело? Дело в ОДЗ!

Школьная формула ЛЗ верна для  $a > 0$ , а  $\log_5 a^4$  существует и при  $a < 0$ . Формула Л7 для чётных степеней, к сожалению, известна не всем. Здесь надо воспользоваться именно Л7.

*Первый способ.*

► Воспользуемся формулой Л7:

$$\log_5 a^4 = 4 \Leftrightarrow \log_5 |a|^4 = 4 \Leftrightarrow 4 \log_5 |a| = 4 \Leftrightarrow \log_5 |a| = 1 \Leftrightarrow |a| = 5 \Leftrightarrow a = \pm 5,$$

и сумма квадратов равна 50.

**Ответ. 50. ◀**

*Второй способ.*

► Можно обойтись без формулы Л7, а использовать только ЛЗ:

$$\log_5 a^4 = 4 \Leftrightarrow 2 \log_5 a^2 = 4 \Leftrightarrow \log_5 a^2 = 2 \Leftrightarrow a^2 = 25 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a_{1,2} = \pm 5 \Rightarrow a_1^2 + a_2^2 = 50.$$

**Ответ. 50. ◀**

*Третий способ.*

► Можно обойтись вообще без формул ЛЗ или Л7, а воспользоваться только определением:

$$\log_5 a^4 = 4 \Leftrightarrow a^4 = 5^4 \Leftrightarrow a^2 = 5^2 \Leftrightarrow a_{1,2} = \pm 5 \Rightarrow a_1^2 + a_2^2 = 50.$$

**Ответ. 50. ◀**

🎮 *Четвёртый способ.*

►  $\log_5 a^4 = 4 \Leftrightarrow 2 \log_5 a^2 = 4 \Leftrightarrow \log_5 a^2 = 2 \Leftrightarrow a^2 = 25.$

**Ответ. 25.**

Ответ неверный, потому что уравнению удовлетворяет два значения  $a$ :  $a = \pm 5$ , квадрат которых равен 25!

**Ответ. 50. ◀**

**3. Найдите  $a$ , если  $\log_5 a^3 = 6$ .**

*Первый способ.*

►  Для нечётных степеней всё просто (никаких модулей!) –

применяем ЛЗ:  $\log_5 a^3 = 6 \Leftrightarrow 3 \log_5 a = 6 \Leftrightarrow \log_5 a = 2 \Leftrightarrow a = 25.$

**Ответ. 25. ◀**

*Второй способ.*

► Воспользуемся определением:  $\log_5 a^3 = 6 \Leftrightarrow a^3 = 5^6 \Leftrightarrow a = 25.$

**Ответ. 25. ◀**

## Вычислите значения выражений 4 – 15

4.  $\left(\log_{13} b^{\frac{2}{5}\log_b 13}\right)^2$ . 5.  $\left(\log_{144} b^{\frac{2}{3}\log_b 12}\right)^{-3}$ . 6.  $\left(\log_{11} b^{4\log_b 11}\right)^3$ .

7.  $\log_a a^3 b^2$ , если  $\log_a b = 3$ . 8.  $\log_{a^{\frac{1}{20}}} a^{\frac{3}{5}} b^{-\sqrt[5]{7}}$ , если  $\log_a b = \frac{\sqrt{35}}{2}$ .

9.  $\log_{a^{\sqrt{48}}} a^{\sqrt{3}} b^{-\sqrt{18}}$ , если  $\log_a b = \sqrt{\frac{3}{2}}$ . 10.  $\log_{a^{17}} a^{\sqrt[3]{5}} b^{-\sqrt{15}}$ , если  $\log_a b = \frac{1}{5}$ .

11.  $\log_{\left(\frac{\sqrt{a}}{b}\right)} \left(\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}\right)$ , если  $\log_b a = \frac{3}{2}$ . 12.  $\log_{a\sqrt{b}} \frac{a}{\sqrt{b^3}}$ , если  $\log_a b = \frac{1}{2}$ .

13.  $\log_{\frac{1}{a^2}} a^{\frac{3}{2}} b^{\sqrt[6]{17}}$ , если  $\log_a b = \sqrt{\frac{51}{2}}$ . 14.  $\log_{a^2} a^{17} b^{44}$ , если  $\log_a b = \frac{1}{4}$ .

15.  $\log_{a^{-1}} a^3 b^{-2}$ , если  $\log_a b = 3$ .

## Более сложные примеры

16. Число удовлетворяет условиям  $\operatorname{tg} 2x = -\frac{3}{4}$  и  $\sin 2x > 0$ .

Обязательно ли при этих условиях определено выражение  $\log_{\operatorname{tg} \frac{\pi}{6}} \operatorname{tg} x$  и чему оно равно?

► Так как по условию  $\sin 2x > 0 \Leftrightarrow 2 \sin x \cos x > 0 \Rightarrow \Rightarrow \cos x \neq 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x$  существует и  $\operatorname{tg} x > 0$ . Значит  $\log_{\operatorname{tg} \frac{\pi}{6}} \operatorname{tg} x = \log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} \operatorname{tg} x$  всегда существует. Найдём  $\operatorname{tg} x$ :

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = -\frac{3}{4} \Leftrightarrow 3 \operatorname{tg}^2 x - 8 \operatorname{tg} x - 3 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{4 \pm 5 \operatorname{tg} x > 0}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 3 \Rightarrow \log_{\operatorname{tg} \frac{\pi}{6}} \operatorname{tg} x = \log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} 3 = -2.$$

Ответ. -2. ◀

17. Число удовлетворяет условиям  $\operatorname{tg} 2x = \frac{3}{4}$  и  $\cos 2x > 0$ .

Обязательно ли при этих условиях определено выражение  $\log_{\operatorname{tg} \frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} x$  и чему оно равно?

18. Вычислите  $9\left(\log_{\frac{x}{y}}^2 x + \log_{\frac{y}{x}}^2 y\right)$ , если  $\log_{\frac{x}{y}}(x^9) = \log_{\sqrt{y}} \frac{y}{x}$ .

*Первый способ.*

► Так как по условию  $\log_{\frac{x}{y}}(x^9) = \log_{\sqrt{y}} \frac{y}{x}$ , то запишем ОДЗ

данного соотношения: 
$$\begin{cases} x > 0, \frac{y}{x} > 0, \\ \frac{x}{y} \neq 1, \sqrt{y} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, x \neq 1, \\ y > 0, y \neq 1, \\ x \neq y. \end{cases}$$

Поэтому можно воспользоваться стандартными формулами для логарифмов. Перейдём всюду к постоянному основанию 10:

$$\log_{\frac{x}{y}}(x^9) = \log_{\sqrt{y}} \frac{y}{x} \stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \frac{9 \lg x}{\lg x - \lg y} = \frac{2(\lg y - \lg x)}{\lg y}. \text{ Пусть } t = \frac{\lg x}{\lg y}, \quad t \neq 1.$$

Тогда данное соотношение примет вид:

$$\frac{9t}{t-1} = 2 - 2t \stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} 9t = -2t^2 + 4t - 2 \Leftrightarrow t = \frac{-5 \pm 3}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2, \\ t = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Теперь преобразуем данное выражение:

$$\begin{aligned} 9\left(\log_{\frac{x}{y}}^2 x + \log_{\frac{y}{x}}^2 y\right) &\stackrel{\text{ОДЗ}}{=} 9\left(\frac{\lg x}{\lg x - \lg y}\right)^2 + 9\left(\frac{\lg y}{\lg y - \lg x}\right)^2 = \\ &= 9\left(\frac{t}{t-1}\right)^2 + 9\left(\frac{1}{1-t}\right)^2 = \frac{9(1+t^2-2t+2t)}{(t-1)^2} = 9 + \frac{18t}{(1-t)^2}. \end{aligned}$$

Если  $t = -2$ , то  $9\left(\log_{\frac{x}{y}}^2 x + \log_{\frac{y}{x}}^2 y\right) = 9 - \frac{18 \cdot 2}{(3)^2} = 5$ . Если  $t = -\frac{1}{2}$ , то

$$9\left(\log_{\frac{x}{y}}^2 x + \log_{\frac{y}{x}}^2 y\right) = 9 - \frac{9 \cdot 4}{(3)^2} = 5.$$

**Ответ. 5. ◀**

*Второй способ.*

► Этот способ более «вычурный», т. к. заранее не известно, приведёт ли он к результату. Преобразуем заданное соотношение:

$$\log_{\frac{x}{y}}(x^9) = \log_{\sqrt{y}} \frac{y}{x} \Leftrightarrow 9 \log_{\frac{x}{y}} x = -\log_{\sqrt{y}} \frac{x}{y} \Leftrightarrow 9 \log_{\frac{x}{y}} x = -\frac{2}{\log_{\frac{x}{y}} y}, \text{ тогда}$$

$$\begin{aligned} \left( \log_{\frac{x}{y}}^2 x + \log_{\frac{y}{x}}^2 y \right) &= \left( \log_{\frac{x}{y}}^2 x + \log_{\frac{x}{y}}^2 y \right) = \left( \log_{\frac{x}{y}} x - \log_{\frac{x}{y}} y \right)^2 + \\ &+ 2 \log_{\frac{x}{y}} x \log_{\frac{x}{y}} y = 1 + 2 \cdot -\frac{2}{9 \log_{\frac{x}{y}} y} \cdot \log_{\frac{x}{y}} y = \\ &= \frac{5}{9} \Leftrightarrow 9 \left( \log_{\frac{x}{y}}^2 x + \log_{\frac{y}{x}}^2 y \right) = 5. \end{aligned}$$

**Ответ. 5. ◀**

**19.** Известно, что для некоторой тройки чисел  $x, y, z$  ( $z \neq y$ ) выражения  $6 \log_{\left(\frac{y^3 z^2}{x}\right)} \left( x \cdot \sqrt[3]{\frac{y^4}{z}} \right)$  и  $6 \log_{\left(\frac{y^2 z^3}{x}\right)} (x \sqrt{yz})$  равны одному и тому же числу. Найдите это число.

Некоторые совершенно не представляют, как подступиться к решению этого примера. Начнём работать по правилам. Наши выражения желательно упростить. Как?

*Первый способ.*

►  Как всегда, хорошо бы перейти к постоянному основанию. А так как мы имеем дело с логарифмами, то сначала найдём ОДЗ наших выражений:

$$\begin{cases} x > 0, yz > 0, \frac{y^2 z^3}{x} > 0, \\ \frac{y^2 z^3}{x} \neq 1, \frac{y^3 z^2}{x} \neq 1 \Rightarrow y \neq z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, z > 0, y > 0, \\ \frac{y^2 z^3}{x} \neq 1, \frac{y^3 z^2}{x} \neq 1, y \neq z. \end{cases}$$

Зачем нам ОДЗ? Из ОДЗ следует, что можно от корней перейти к рациональным степеням:

$$6 \log_{\left(\frac{y^3 z^2}{x}\right)} \left( x \cdot \sqrt[3]{\frac{y^4}{z}} \right) = 6 \frac{\lg x + \frac{4}{3} \lg y - \frac{1}{3} \lg z}{3 \lg y + 2 \lg z - \lg x} = \frac{6 \lg x + 8 \lg y - 2 \lg z}{3 \lg y + 2 \lg z - \lg x},$$

$$6 \log_{\left(\frac{y^2 z^3}{x}\right)} (x \sqrt{yz}) = 6 \frac{\lg x + \frac{1}{2} \lg y + \frac{1}{2} \lg z}{2 \lg y + 3 \lg z - \lg x} = \frac{6 \lg x + 3 \lg y + 3 \lg z}{2 \lg y + 3 \lg z - \lg x}.$$

Но что дальше? Надо всегда стараться записать математически *все* условия задачи. Дано, что

$$\begin{aligned} 6 \log_{\left(\frac{y^3 z^2}{x}\right)} \left( x \cdot \sqrt[3]{\frac{y^4}{z}} \right) &= 6 \log_{\left(\frac{y^2 z^3}{x}\right)} (x \sqrt{yz}) \Leftrightarrow \frac{6 \lg x + 8 \lg y - 2 \lg z}{3 \lg y + 2 \lg z - \lg x} = \\ &= \frac{6 \lg x + 3 \lg y + 3 \lg z}{2 \lg y + 3 \lg z - \lg x}. \end{aligned}$$

Но это кажется ужасно сложным. И всё равно не ясно, что делать. Однако записаны не все заданные условия.

Дано, что эти логарифмы не просто равны, а равны числу, которое как раз и надо найти. Обозначим искомое число буквой  $t$ . Тогда условие задачи можно записать в виде системы, в которой надо найти только одну переменную:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \frac{6 \lg x + 3 \lg y + 3 \lg z}{2 \lg y + 3 \lg z - \lg x} = t, \\ \frac{6 \lg x + 8 \lg y - 2 \lg z}{3 \lg y + 2 \lg z - \lg x} = t \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 6 \lg x + 3 \lg y + 3 \lg z = t(2 \lg y + 3 \lg z - \lg x), \\ 6 \lg x + 8 \lg y - 2 \lg z = t(3 \lg y + 2 \lg z - \lg x) \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (6+t) \lg x + (3-2t) \lg y + (3-3t) \lg z = 0, \\ (6+t) \lg x + (8-3t) \lg y - (2+2t) \lg z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (6+t) \lg x + (3-2t) \lg y + (3-3t) \lg z = 0, \\ (t-5) \lg y + (5-t) \lg z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (t-5)(\lg y - \lg z) = 0 \Leftrightarrow t = 5, \end{aligned}$$

так как  $y \neq z$ . Вот и всё...

**Ответ. 5. ◀**

*Второй способ.*

► Можно сделать совсем по-другому. Воспользуемся определением логарифма:

$$6 \log_{\left(\frac{y^3 z^2}{x}\right)} \left( x \cdot \sqrt[3]{\frac{y^4}{z}} \right) = t \Leftrightarrow \left( x \cdot \sqrt[3]{\frac{y^4}{z}} \right)^6 = \left( \frac{y^3 z^2}{x} \right)^t, \quad 6 \log_{\left(\frac{y^2 z^3}{x}\right)} (x \sqrt{yz}) =$$
$$= t \Leftrightarrow (x \sqrt{yz})^6 = \left( \frac{y^2 z^3}{x} \right)^t.$$

Теперь разделим левые и правые части уравнений друг на друга:

$$\frac{\left( x \cdot \sqrt[3]{\frac{y^4}{z}} \right)^6}{(x \sqrt{yz})^6} = \frac{\left( \frac{y^3 z^2}{x} \right)^t}{\left( \frac{y^2 z^3}{x} \right)^t} \Leftrightarrow \frac{y^8 z^{-2}}{y^3 z^3} = (yz^{-1})^t \Leftrightarrow (yz^{-1})^5 =$$
$$= (yz^{-1})^t \Leftrightarrow t = 5 \text{ (т. к. } y \neq z \text{)}.$$

**Ответ. 5.** ◀



Совсем другой способ! Здорово!

Кому-то понятен первый способ, а кому-то больше понравится второй.

**20.** Вычислите  $3 \left( \log_{xy}^2 x + \log_{\frac{1}{xy}}^2 y \right)$ , если  $\log_{\frac{1}{xy}}(y) = \log_{\sqrt{x}}(xy)$ .

**21.** Известно, что для некоторой тройки  $x, y, z$  ( $x \neq y$ ) чисел выражения

$$18 \log_{(x^5 y^2 z)} \left( \frac{\sqrt[3]{x^2 y}}{z} \right) \text{ и } 18 \log_{(x^2 y^5 z)} \left( \frac{\sqrt{xy}}{z} \right) \text{ равны одному и тому же числу.}$$

Найдите это число.

## § 5. Простейшие логарифмические уравнения

Рассмотрим простейшие логарифмические уравнения. Заметим, что

$$\log_a f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 1. \quad (\text{УР Л1})$$

Так как функция  $\log_a x$  при любом допустимом основании ( $a > 0, a \neq 1$ ) является строго монотонной, то

$$\log_a x = \log_a y \stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} x = y. \quad (\text{УР Л2})$$

При решении логарифмических уравнений особенно часто используются два преобразования: потенцирование и логарифмирование. Эти преобразования не являются равносильными.

*Логарифмированием* уравнения  $f(x) = g(x)$  по основанию  $a$  ( $a > 0, a \neq 1$ ) называется переход к уравнению  $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ . При этом область существования уравнения *сужается*, т. к. логарифмы существуют только у положительных чисел. Например:

$$x^3 = x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = -1, \text{ а } \lg x^3 = \lg x \Leftrightarrow x = 1. \end{cases} \text{ Уравнения не равносильны,}$$

т. к. имеют разные множества решений.

*Потенцированием* уравнения называется переход от уравнения  $\log_a f(x) = \log_a g(x)$  к уравнению  $f(x) = g(x)$ . При этом область определения *расширяется*, т. к. второе уравнение может существовать при любых  $f(x), g(x)$ , а первое – только при положительных. Поэтому запишем и запомним:

- если  $f(x) = g(x)$  и  $f(x) > 0$  (а это означает, что автоматически и  $g(x) > 0$ ) или  $g(x) > 0$  (а это означает, что автоматически и  $f(x) > 0$ ), то  $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ ;

- если  $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ , то  $f(x) > 0, g(x) > 0$  и  $f(x) = g(x)$ , т. е.

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ \left[ \begin{array}{l} f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{array} \right] \Leftrightarrow \log_a f(x) = \log_a g(x). \end{cases} \quad (\text{УР Л3})$$

Можно записать и так:

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) = g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases} \quad (\text{УР Л4})$$

При решении уравнения достаточно проверить одно из неравенств:  $f(x) > 0$  или  $g(x) > 0$  – то, которое проще.

Если мы решаем уравнение  $\log_a f(x) = g(x)$ , то

$$\log_a f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) = a^{g(x)}. \quad (\text{УР Л5})$$

ОДЗ выполняется автоматически.

Логарифмические уравнения считаются сложными. Во-первых, потому, что у логарифма есть область определения. Во-вторых, подлогарифмические выражения могут быть любыми функциями, и надо помнить, что последующие преобразования могут быть неравносильными (например, возведение в квадрат), а потеря или приобретение корней в промежуточных выкладках уже не связаны с ОДЗ логарифмов.

Поэтому при решении простых логарифмических уравнений лучше пользоваться равносильными преобразованиями. В противном случае надо записать ОДЗ уравнения, но не надо находить его (решить все неравенства, связанные с ОДЗ, бывает намного труднее, чем решить само уравнение, а иногда и просто невозможно). После нахождения корней необходимо в этом случае сделать *проверку* – подставить найденные корни в само уравнение.

Нередко школьники находят ОДЗ, затем корни уравнения, а для проверки корни подставляют только в ОДЗ. Этого мало: если корень не принадлежит ОДЗ, то он, конечно, не может быть решением; но если корень принадлежит ОДЗ, то это не значит, что он является решением уравнения – надо подставить его в уравнение.

**Решите уравнения 1 – 12 и укажите соответственно произведение корней (или корень, если он один)**

1.  $\log_2(x+7) = 5$ .

► Воспользуемся определением логарифма, или, что то же, (УР Л5):  $\log_2(x+7) = 5 \Leftrightarrow x+7 = 2^5 \Leftrightarrow x = 25$  (ОДЗ выполняется автоматически).

**Ответ.**  $\{25\}$ . ◀

2.  $\sqrt{3-2x} \log_2(10-x^2) = 0$ .

При решении этого примера не надо забывать об ОДЗ и корня, и логарифма. Решение можно оформить по-разному.

*Первый способ* (ОДЗ записываем в равносильном соотношении).

$$\blacktriangleright \sqrt{3-2x} \log_2(10-x^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3-2x=0, \\ 10-x^2 > 0; \\ \log_2(10-x^2)=0, \\ 3-2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2}; \\ 10-x^2=1, \\ 3-2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2}, \\ x = -3. \end{cases}$$

Произведение всех корней уравнения равно  $-4,5$ .

**Ответ.**  $\left\{\frac{3}{2}, -3\right\}, -4,5$ .  $\blacktriangleleft$

*Второй способ* (ОДЗ записываем отдельно).

$\blacktriangleright$  Запишем сначала ОДЗ:  $\begin{cases} 3-2x \geq 0, \\ 10-x^2 > 0. \end{cases}$  Теперь решаем в ОДЗ:

$$\sqrt{3-2x} \log_2(10-x^2) = 0 \stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 3-2x=0, \\ 10-x^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2}, \\ x = \pm 3 \end{cases} \stackrel{\text{с учетом ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = \frac{3}{2}, \\ x = -3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 x_2 = -4,5.$$

**Ответ.**  $\left\{\frac{3}{2}, -3\right\}, -4,5$ .  $\blacktriangleleft$

**3.** Решите уравнение  $3 \log_6 \left( 3 - \frac{3}{2x+3} \right) = 4 \log_6 \left( 2 + \frac{1}{x+1} \right) + 3$ .

$\blacktriangleright$  Приведём сначала выражения в скобках к общему знаменателю, а затем посмотрим, что делать:

$$3 \log_6 \left( 3 - \frac{3}{2x+3} \right) = 4 \log_6 \left( 2 + \frac{1}{x+1} \right) + 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 \log_6 \frac{6x+6}{2x+3} = 4 \log_6 \frac{2x+3}{x+1} + 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 \log_6 \left( 6 \cdot \frac{x+1}{2x+3} \right) = 4 \log_6 \frac{2x+3}{x+1} + 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 + 3\log_6 \frac{x+1}{2x+3} - 4\log_6 \frac{2x+3}{x+1} - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\log_6 \frac{x+1}{2x+3} + 4\log_6 \frac{x+1}{2x+3} = 0 \Leftrightarrow 7\log_6 \frac{x+1}{2x+3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_6 \frac{x+1}{2x+3} = 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{2x+3} = 1 \Leftrightarrow \frac{x+2}{2x+3} = 0 \Leftrightarrow x = -2.$$

**Ответ.**  $\{-2\}$ . ◀

**4.**  $\lg(x^2 - x) = \lg(6x - 10).$

► Воспользуемся (УР Л4):

$$\lg(x^2 - x) = \lg(6x - 10) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x = 6x - 10, \\ 6x - 10 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 7x + 10 = 0, \\ 6x - 10 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5, \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow x_1 x_2 = 10.$$

**Ответ.**  $\{2; 5\}, 10$ . ◀

**5.**  $\lg(x^2 + 6x) = \lg(5x + 6)$ . **6.**  $\lg(x^2 + 8x) = \lg(2x + 7)$ .

**7.**  $\lg(x^2 - 9) = \lg(9 - 7x)$ . **8.**  $\log_3(3^x - 8) = 2 - x$ .

**9.**  $\left(\frac{1}{27} - 3^{6-x^2}\right)\log_2(4 + 5x) = 0$ .

**10.**  $\log_7\left(2^x - 3 \cdot 2^{\frac{x}{2}}\right) = \log_7\left(3 \cdot 2^{\frac{x}{2}} - 8\right)$ .

**11.**  $\log_5(5^{2x} + 5^x - 25) = x + 2$ .

**12.**  $(1 + \log_5 3)\log_{15} x = \log_5 28 + \log_{\frac{1}{5}}(x - 3)$ .

## § 6. Замена переменных в логарифмических уравнениях

Часто в логарифмических уравнениях делают замену переменных, чтобы свести их в новых переменных к алгебраическим уравнениям, чаще всего, квадратным.

Решите уравнения 1 – 8 и укажите соответственно произведение корней (или корень, если он один)

$$1. \sqrt{\log_3 3x} = \log_3 \frac{x}{3}.$$

Преобразуем немного уравнение:

$$\sqrt{\log_3 3x} = \log_3 \frac{x}{3} \Leftrightarrow \sqrt{1 + \log_3 x} = \log_3 x - 1.$$

*Первый способ* (школьный).

► Сделаем замену переменных  $\log_3 x = t$ . Уравнение примет вид  $\sqrt{t+1} = t-1$ ,  $t+1 = t^2 - 2t + 1$ ,  $t=0$ ,  $t=3$ . Т. к. при возведении в квадрат могли появиться посторонние корни, то после нахождения корней необходима проверка. В данном случае *проверка* показывает, что  $t=0$  – посторонний корень. Тогда  $\log_3 x = 3$ ,  $x = 27$ .

**Ответ.**  $\{27\}$ . ◀

*Второй способ* (без проверки).

► Сделаем замену переменных  $\log_3 x = t \Leftrightarrow x = 3^t$ . Уравнение примет вид  $\sqrt{t+1} = t-1$ , которое решаем без проверки, используя только равносильные переходы:

$$\sqrt{t+1} = t-1 \Leftrightarrow \begin{cases} t-1 \geq 0, \\ t+1 = t^2 - 2t + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t-1 \geq 0, \\ t=0, \\ t=3 \end{cases} \Leftrightarrow t=3 \Leftrightarrow x = 3^3 = 27.$$

**Ответ.**  $\{27\}$ . ◀

*Третий способ* (без явной замены переменных).

Когда накапливается практика решения логарифмических уравнений, «явную» замену переменных можно уже не делать (соответствующее квадратное уравнение решается отдельно):

►

$$\begin{aligned} \sqrt{\log_3 3x} = \log_3 \frac{x}{3} &\Leftrightarrow \sqrt{1 + \log_3 x} = \log_3 x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x - 1 \geq 0, \\ 1 + \log_3 x = (\log_3 x - 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x - 1 \geq 0, \\ \log_3^2 x - 3 \log_3 x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \log_3 x = 3 \Leftrightarrow x = 27. \end{aligned}$$

**Ответ.**  $\{27\}$ . ◀

$$2. \sqrt{10 + \frac{1}{\log_x 2}} = 2 \log_2 (0,5\sqrt{x}). \quad (\text{ЕГЭ-2003})$$

*Первый способ* (без замены переменных).

► Воспользуемся тождественными преобразованиями логарифмов в ОДЗ, а затем решим получившееся иррациональное уравнение:

$$\sqrt{10 + \frac{1}{\log_x 2}} = 2 \log_2 (0,5\sqrt{x}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{10 + \frac{1}{\frac{1}{\log_2 x}}} = 2 \left( \log_2 \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log_2 x \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{10 + \frac{1}{\log_2 x}} = -2 + \log_2 x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x \geq 2, \\ 10 + \log_2 x = 4 - 4 \log_2 x + \log_2^2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x \geq 2, \\ \log_2 x = \frac{5 \pm 7}{2} \Leftrightarrow \log_2 x = 6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 2^6.$$

**Ответ.**  $\{64\}$ . ◀

*Второй способ* (с заменой переменных).

► Так как это задача серии С, то приведём ещё один возможный способ оформления решения заданного уравнения.

Переход к новому допустимому основанию является равносильной операцией. Поэтому  $\log_x 2 = \frac{1}{\log_2 x}$ . Кроме того,  $2 \log_2 \left( \frac{1}{2} \sqrt{x} \right) = -2 + \log_2 x$ .

Уравнение примет вид:  $\sqrt{10 + \frac{1}{\log_2 x}} = -2 + \log_2 x$ . Введём новую

переменную  $t = \log_2 x$ , уравнение примет вид:

$$\sqrt{10 + \frac{1}{\frac{1}{t}}} = -2 + t \Leftrightarrow \begin{cases} t - 2 \geq 0, \\ 10 + t = 4 - 4t + t^2 \end{cases} \Leftrightarrow t = 6 \quad (\text{ограничение} \quad t \neq 0)$$

выполнено автоматически – поэтому его не надо указывать). Возвратимся к старой переменной:  $\log_2 x = 6 \Leftrightarrow x = 64$ .

**Ответ.**  $\{64\}$ . ◀

*Примечание.* В обоих случаях использовались равносильные в ОДЗ операции, и ни в одном из этих решений *не надо* находить «школьное» ОДЗ:  $10 + \frac{1}{\log_x 2} \geq 0$ , и *не надо* писать ограничение

$\log_2 x \neq 0$ . Первое выполняется автоматически, т. к. подкоренное выражение приравнивается квадрату правой части. Отбор корней происходит за счёт выполнения необходимого условия существования решения иррационального уравнения – неотрицательности правой части:  $-2 + \log_2 x \geq 0 \Leftrightarrow \log_2 x \geq 2$ . Вследствие этого же условия выполнено и условие  $\log_2 x \neq 0$ .

$$3. 6(\log_{64} x)^4 - 5(\log_{64} x)^3 - 5(\log_{64} x)^2 + 5\log_{64} x - 1 = 0.$$

► Зачем дано такое уравнение? Очень просто. Чтобы вспомнить, в частности, как решаются уравнения более высокой степени, чем квадратные.

Сделаем замену переменных:  $\log_{64} x = t$ . Тогда левая часть уравнения примет вид многочлена 4-ой степени (уравнение не биквадратное):  $6t^4 - 5t^3 - 5t^2 + 5t - 1 = 0$ . Как его решать? Вспоминаем, что корень надо подбирать, а потом выделить множитель либо делением «уголком», либо группировкой слагаемых или ещё как-то. Так как сумма коэффициентов многочлена равна 0, то число 1 является корнем, поэтому

$$6t^4 - 5t^3 - 5t^2 + 5t - 1 = (t - 1)(6t^3 + t^2 - 4t + 1).$$

Видно, что  $-1$  является корнем второго множителя, а тогда

$$6t^4 - 5t^3 - 5t^2 + 5t - 1 \equiv (t - 1)(t + 1)(6t^2 - 5t + 1) =$$

$$= 6(t-1)(t+1)\left(t-\frac{1}{2}\right)\left(t-\frac{1}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1, \\ t=-1, \\ t=\frac{1}{2}, \\ t=\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_{64} x = 1 \Leftrightarrow x = 64, \\ \log_{64} x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{64}, \\ \log_{64} x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 8, \\ \log_{64} x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = 4. \end{cases}$$

Произведение всех корней уравнения равно 32.

**Ответ.**  $\left\{64; \frac{1}{64}; 4; 8\right\}$ , 32. ◀

4.  $4\log_{25} 5x + \log_5^2 x - 5 = 0$ . 5.  $\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{2 - \log_2 x} = 2$ .

6.  $\frac{2}{\frac{2}{\log_2 x} - 1} = -3$ . 7.  $\sqrt{(\lg x)^3 - 5\lg x + 13} = \lg x + 2$ .

8.  $\sqrt{(\log_2 t)^2 \log_2 2t - \log_2 64t} = \log_2 t$ .

## § 7. ОДЗ и логарифмические уравнения. Задачи-«ловушки»

1. Решите уравнение  $\log_{16} (x^2 - 2x - 3)^2 - 2\log_{16} (x^2 + x - 2) = 0,5$ .

При решении уравнений, как правило, *не надо* тратить энергию и время на поиски ОДЗ – решать неравенства труднее, чем уравнение, но записать его можно. Однако везде бывают исключения. Так и наш пример.

► Запишем ОДЗ:  $\begin{cases} x^2 - 2x - 3 \neq 0, \\ x^2 + x - 2 > 0. \end{cases}$  Решаем уравнение:

$$\begin{aligned} \log_{16} (x^2 - 2x - 3)^2 - 2\log_{16} (x^2 + x - 2) &= 0,5 \stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \log_{16} (x^2 - 2x - 3)^2 = \\ &= \log_{16} (x^2 + x - 2)^2 + \log_{16} 4 \Leftrightarrow (x^2 - 2x - 3)^2 = 4(x^2 + x - 2)^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x^2 - 2x - 3 + 2(x^2 + x - 2))(x^2 - 2x - 3 - 2(x^2 + x - 2)) = 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 4x - 1)(3x^2 - 7) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \pm \sqrt{5}, \\ x = \pm \sqrt{\frac{7}{3}}. \end{cases}$$

Теперь надо учесть ОДЗ. У нас *редкий* случай, когда в ОДЗ или уравнение подставлять корни очень неприятно. Поэтому лучше мы найдём ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 3 \neq 0, \\ x^2 + x - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \pm 2 \\ x \in (-\infty; -2) \cup (1; +\infty) \end{cases}, \text{ а затем «прикинем», какие}$$

корни ему принадлежат. Получаем, что

$$\begin{cases} x = -2 - \sqrt{5}, \\ x = \sqrt{\frac{7}{3}}. \end{cases}$$

**Ответ.**  $\left\{-2 - \sqrt{5}, \sqrt{\frac{7}{3}}\right\}$ . ◀

**Решите уравнения 2 – 33 и укажите соответственно произведение всех корней (или корень, если он один)**

2.  $\log_7(7^{2x} - 47 \cdot 7^x - 49) = x$ .

► В примере нет никакой «ловушки»:

$$\log_7(7^{2x} - 47 \cdot 7^x - 49) = x \Leftrightarrow 7^{2x} - 47 \cdot 7^x - 49 = 7^x \Leftrightarrow 7^{2x} - 48 \cdot 7^x - 49 = 0 \Leftrightarrow 7^x = 24 \pm 25 \Leftrightarrow 7^x = 49 \Leftrightarrow x = 2.$$

**Ответ.**  $\{2\}$ . ◀

*Примечание.* Мы привели решение этой задачи только для того, чтобы школьники *не делали* не самую лёгкую, но совершенно лишнюю работу – нахождение ОДЗ уравнения. Оно выполняется *автоматически*, т. к. подлогарифмическое выражение приравнивается показательной функции, принимающей только положительные значения.

3.  $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 1) - \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(7 - x) = 1$ .

► Прежде всего при решении логарифмических уравнений, если возможно, надо перейти к одному основанию:

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 1) - \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(7 - x) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\log_2(x^2 - 1) + 2\log_2(7 - x) = \log_2 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\log_2(7 - x) = \log_2 2(x^2 - 1).$$

Следующий шаг таит в себе «ловушку» – надо преобразовать  $2\log_2(7 - x)$  в  $\log_2(7 - x)^2$ ! Как это сделать? Выражение  $2\log_2(7 - x)$  определено при  $7 - x > 0$ , а выражение  $\log_2(7 - x)^2$  – при  $7 - x \neq 0$ . При переходе ОДЗ расширится – поэтому необходимо указать первоначальное ОДЗ.

$$2\log_2(7 - x) = \log_2 2(x^2 - 1) \Leftrightarrow \begin{cases} 7 - x > 0, \\ \log_2(7 - x)^2 = \log_2(2x^2 - 2) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7 - x > 0, \\ (7 - x)^2 = 2x^2 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7 - x > 0, \\ x^2 + 14x - 51 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -7 \pm 10 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ x = -17 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 x_2 = -51.$$

**Ответ.**  $\{-17; 3\}, -51.$  ◀

$$4. \log_2(x + 4)^2 + 2\log_2(x + 4) = 4.$$

*Решение с ошибкой.*

$$\blacktriangleright \log_2(x + 4)^2 + 2\log_2(x + 4) = 4, \quad \log_2(x + 4)^2 + \log_2(x + 4)^2 = 4,$$

$$\log_2(x + 4)^2 = 2, \quad (x + 4)^2 = 4, \quad (x + 4 + 2)(x + 4 - 2) = 0, \quad x = -6,$$

$$x = -2, \quad x_1 x_2 = 12. \text{ Ответ неверный.}$$

*Примечание.* В чём дело? В ОДЗ. Решающие совершенно забывают про ОДЗ логарифма:  $\log_2(x + 4)$  существует только для положительных чисел:  $x + 4 > 0$ , а  $\log_2(x + 4)^2$  существует для всех  $x + 4 \neq 0$ ! При таком переходе ОДЗ *расширилось*. Поэтому, чтобы поправить решение, *надо сделать проверку* – подставить найденные корни в уравнение:  $x = -6$  не является корнем.

**Ответ.**  $-2.$   ◀

Решение (без ошибок).

► В этом примере лучше заменить  $\log_2(x+4)^2$  на равносильное в данном примере выражение  $2\log_2(x+4)$ :

$$\log_2(x+4)^2 + 2\log_2(x+4) = 4 \Leftrightarrow 4\log_2(x+4) = 4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log_2(x+4) = 1 \Leftrightarrow x = -2.$$

**Ответ.**  $\{-2\}$ . ◀

5.  $\lg x(x-7) + \lg \frac{x}{x-7} = \lg 9$ .

✪ *Совсем неправильное решение.*

► «Небрежное» обращение с формулой для логарифма произведения может привести к совсем плохому результату:

$$\lg x(x-7) + \lg \frac{x}{x-7} = \lg 9, \lg x + \lg(x-7) + \lg x - \lg(x-7) = \lg 9, \\ 2\lg x = \lg 9 = 2\lg 3, x = 3.$$

Проверка показывает, что  $x=3$  – не решение. Что такое? Нет решений? ◀

*Примечание.* В этом примере уже есть «ловушка». Школьники часто пишут, что  $\lg x(x-7) = \lg x + \lg(x-7)$  – при этом происходит сужение ОДЗ, а это гораздо хуже, чем расширение, потому что при сужении вообще могут «потеряться» корни, как и произошло в нашем случае. Слева логарифм существует, если  $x$  и  $x-7$  имеют одинаковые знаки, а справа – если  $x$  и  $x-7$  положительны. Это, как мы уже отмечали, довольно «тонкое» место в формулах для логарифмов: в школьных формулах  $M > 0$ ,  $N > 0$ ! А  $\lg x(x-7)$  и  $\lg \frac{x}{x-7}$  определены не только тогда, когда  $x > 0$  и  $x-7 > 0$ , но и тогда, когда  $x < 0$  и  $x-7 < 0$  – у нас именно здесь будет решение. Эта ошибка встречается довольно часто, потому что в школьной программе нет правила перехода от логарифма произведения или частного к сумме или разности логарифмов, т. е. нет свойства Л5! А если им и показывают его, то они его нередко всё равно не помнят, т. к. в большинстве справочников эта формула тоже отсутствует.

Решение с ошибкой.

►   $\lg x(x-7) + \lg \frac{x}{x-7} = \lg 9, \lg x(x-7) \frac{x}{(x-7)} = \lg 9,$   
 $\lg x^2 = \lg 9, x = \pm 3 \Rightarrow x_1 x_2 = -9. \blacktriangleleft$

И опять ошибка связана с ОДЗ – школьники или не помнят, или просто не знают, что потенцирование *расширяет* область определения, и пишут, что  $\lg x(x-7) + \lg \frac{x}{x-7} = \lg x(x-7) \frac{x}{(x-7)}$ .

Здесь произошло расширение ОДЗ: слева логарифм существует, если  $x$  и  $x-7$  имеют одинаковые знаки, а правая – если  $x \neq 0$  и  $x \neq 7$ . Поэтому могут появиться, и появляются в нашем случае, «лишние» корни. Проверить ОДЗ, тем более подставить в уравнение, они при этом забывают. Как же правильно решить эту задачу? Приведем три способа.

*Первый способ (школьный).*

►  Запишем ОДЗ:  $x(x-7) > 0$ . Теперь решаем уравнение:

$$\lg x(x-7) + \lg \frac{x}{x-7} = \lg 9, \lg x(x-7) \frac{x}{(x-7)} = \lg 9,$$
$$\lg x^2 = \lg 9, x \neq 7, x = \pm 3.$$

Видно, что  $x=3$  не принадлежит ОДЗ, подставим второй корень в уравнение. Проверка:  $\lg(-3)(-3-7) + \lg \frac{-3}{-3-7} = \lg 30 \cdot \frac{3}{10} = \lg 9$ .

**Ответ.**  $\{-3\}$ .  $\blacktriangleleft$

*Второй способ.*

►  Воспользуемся формулой Л5:

$$\lg x(x-7) + \lg \frac{x}{x-7} = \lg 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-7) > 0, \\ |\lg|x| + \lg|x-7| + \lg|x| - \lg|x-7|| = \lg 9 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x-7) > 0, \\ 2\lg|x| = \lg 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-7) > 0, \\ \lg x^2 = \lg 9 \end{cases} \Leftrightarrow x = -3.$$

**Ответ.**  $\{-3\}$ .  $\blacktriangleleft$

Третий способ.

►   $\lg x(x-7) + \lg \frac{x}{x-7} = \lg 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-7) > 0, \\ \lg x(x-7) \frac{x}{(x-7)} = \lg 9 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \\ x > 7; \\ \lg x^2 = \lg 9 \end{cases} \Leftrightarrow x = -3.$$

**Ответ.**  $\{-3\}$ . ◀

*Примечание.* При решении логарифмических уравнений можно отметить три основных момента.

1) Желательно перейти во всех логарифмах к *одному* основанию (это равносильный переход).

2) Записать ОДЗ уравнения, но *не надо* без особой необходимости тратить время на решение получившихся неравенств. Спрашивается, зачем писать, если не решать? В некоторых задачах это очень важно. Например, в общем случае  $\lg x^2 = 2\lg|x|$ , а в зависимости от ОДЗ, может быть по-разному:  $\lg x^2 = 2\lg x$ , если  $x > 0$ ;  $\lg x^2 = 2\lg(-x)$ , если  $x < 0$ ; так и останется  $\lg x^2 = 2\lg|x|$ , если  $x$  в ОДЗ может быть как положительным, так и отрицательным.

3) Если не проводились равносильные преобразования, то проверка делается подстановкой найденных корней в *заданное уравнение*, а не в ОДЗ.

$$6. \log_2(5 + 2\sqrt{x}) - \log_2(4,5 - x) = 1.$$

Это очень любопытное уравнение – при неправильном решении промежуточного уравнения получившиеся корни принадлежат ОДЗ – школьники успокаиваются и получают неверный ответ. Мы уже говорили, что при решении без равносильных переходов корни надо подставлять не в ОДЗ, а в *уравнение*.

►  Вот *правильное* решение:

$$\log_2(2\sqrt{x} + 5) - \log_2(4,5 - x) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2(2\sqrt{x} + 5) = \log_2(9 - 2x) \Leftrightarrow 2\sqrt{x} + 5 = 9 - 2x \Leftrightarrow 2\sqrt{x} = -2x + 4 \Leftrightarrow$$

(мы воспользовались тем, что  $2\sqrt{x} + 5 > 0$  в ОДЗ)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x+2 \geq 0, \\ x = x^2 - 4x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2, \\ x^2 - 5x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2, \\ \begin{cases} x = 4, \\ x = 1. \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4, \\ x = 1. \end{cases}$$

**Ответ.**  $\{1\}$ . ◀

*Замечание.* Обратите внимание на то, что посторонний корень  $x=4$  входит в ОДЗ уравнения, но не является решением, т. к. не является решением промежуточного уравнения  $\sqrt{x} = 2 - x$ .

$$7. 1 + \log_6 \frac{x+3}{x+7} = \frac{1}{2} \log_6 (x-1)^2.$$

В решении этого примера тоже очень часто встречается ошибка. И опять дело довольно «тонкое»:  $\log_6 (x-1)^2$  часто неправильно заменяется на  $2 \log_6 (x-1)$ . Приведём два способа решения задачи.

*Первый способ* (без записи модуля).

► Запишем ОДЗ:  $\frac{x+3}{x+7} > 0$ . Тогда

$$1 + \log_6 \frac{x+3}{x+7} = \frac{1}{2} \log_6 (x-1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \log_6 6 + 2 \log_6 \frac{x+3}{x+7} = \log_6 (x-1)^2 \stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \text{(именно в ОДЗ, т. к. под знаком логарифма появился квадрат, и область определения левой части расширилась; теперь уравнение будет решаться в области, где } \frac{x+3}{x+7} \neq 0, \text{ а не только там, где } \frac{x+3}{x+7} > 0) \Leftrightarrow \log_6 \left( \frac{(x+3)6}{x+7} \right)^2 =$$

$$= \log_6 (x-1)^2 \Leftrightarrow \left( \frac{(x+3)6}{x+7} \right)^2 = (x-1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{(x+3)6}{x+7} - x + 1 \right) \left( \frac{6(x+3)}{x+7} + x - 1 \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 25)(x^2 + 12x + 11) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 5; -11; -1.$$

Учитывая ОДЗ, получаем, что  $x = -11; -1; 5$  и произведение корней равно 55.

**Ответ.** 55. ◀

*Замечание.* Если в уравнении или неравенстве встречается выражение вида  $\frac{1}{2} \log_a f^2(x)$ , то можно поступить двояко. Можно воспользоваться равносильным преобразованием:

$$\frac{1}{2} \log_a f^2(x) = \log_a |f(x)|, \text{ т. е. } \log_6 (x-1)^2 = 2 \log_6 |x-1|.$$

А можно всё уравнение или неравенство умножить на 2 – тогда для некоторых других логарифмов может расшириться область определения (расширение предпочтительнее сужения, ибо при сужении корни теряются, а при расширении лишние можно убрать проверкой). Мы в этом способе предпочли умножать на 2.

*Второй способ* (с записью модуля).

► Теперь сделаем другим способом:

$$1 + \log_6 \frac{x+3}{x+7} = \frac{1}{2} \log_6 (x-1)^2 \Leftrightarrow \log_6 6 + \log_6 \frac{x+3}{x+7} = \log_6 |x-1| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_6 \frac{(x+3)6}{x+7} = \log_6 |x-1| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+3)6}{x+7} = |x-1| \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+3}{x+7} > 0, \\ \left( \frac{(x+3)6}{x+7} - x + 1 \right) \left( \frac{6(x+3)}{x+7} + x - 1 \right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+3}{x+7} > 0; \\ \begin{cases} x^2 - 25 = 0, \\ x^2 + 12x + 11 = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5, \\ x = -1, \Rightarrow x_1 x_2 x_3 = 55. \\ x = -11 \end{cases}$$

Получаем, естественно, тот же ответ.

**Ответ.**  $\{-11; -1; 5\}$ , 55. ◀

$$8. \log_{\frac{1}{5}} (2x-3)^5 = 15.$$

$$\text{► } \log_{\frac{1}{5}} (2x-3)^5 = 15 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{5}} (2x-3) = 3 \Leftrightarrow 2x-3 = \frac{1}{125} \Leftrightarrow x = 1,504.$$

*И никаких модулей!*

**Ответ.**  $\{1,504\}$ . ◀

9.  $\log_2(x+4)^2 = 6$ . 10.  $\log_2 x(x+5) + \log_2 \frac{(x+5)}{x} = 4$ .
11.  $\log_6 x + \log_6(x+1) = 1$ . 12.  $\log_4(x^2) + \log_2(x+10) = \log_2 24$ .
13.  $\log_2 x(x-4) + \log_2 \frac{x}{(x-4)} = \log_2 9$ .
14.  $\log_2(5 + 2\sqrt{4x-9}) + \log_{\frac{1}{2}}(13,5 - 4x) = 1$ .
15.  $\log_2(5 + \sqrt{x}) - \log_2(13 - x) = 1$ .
16.  $\log_2(5 + \sqrt{11 - 5x}) + \log_{\frac{1}{2}}(7 + 5x) = -1$ .
17.  $\lg(98 - x^3) = 3\lg(2 - x)$ . 18.  $2\log_2 \frac{x-7}{x-1} + \log_2 \frac{x-1}{x+1} = 1$ .
19.  $\log_7 x + \log_7(x-3) = \log_7 28$ .
20.  $\log_{13}(x+5) + \log_{13}(x-4) = \log_{13}(x+16)$ .
21.  $\log_7(x-21) + \log_7(x+28) = \log_7(7x-140) + 1$ .
22.  $\log_2(x-8) + \log_2(x-4) = \log_2 x + \log_2 6$ .
23.  $\log_3(x-9) + \log_3(x-4) = \log_3(2x-18) + 1$ .
24.  $\log_{15}(x-2) + \log_{15}(x+2) = \log_{15} 5$ .
25.  $2\log_7(x-2) - \log_7(x-10)^2 + 2 = 0$ .
26.  $\log_5(x-2) + \log_5(x+3) = \log_5 6$ .
27.  $\log_7 \frac{x+4}{15} + \log_7 \frac{5}{x+1} = 1$ .
28.  $\log_3(x-5)^2 - 4 = \log_{\sqrt{3}}(x-1)$ .
29.  $\log_2(x+1)^2 + 2\log_2(2-x) = 4$ .
30.  $\log_2(x+1)^2 + 2\log_2(3-x) = 2\log_2 12$ .
31.  $\log_2(5x+1)^4 = 16$ . 32.  $x(1 - \lg 5) = \lg(4^x - 12)$ .
33.  $\log_2(x+3) + \log_2(x-4) = 3$ .

## §8. Разные уравнения

### 1. Решите уравнение

$$(x+4)\log_4(x+1) - (x-4)\log_2(x-1) = \frac{8}{3}\log_2(x^2-1)$$

и укажите произведение всех корней.

$$\blacktriangleright \text{ОДЗ. } x-1 > 0, x+1 > 0 \Rightarrow \log_2(x^2-1) = \log_2(x+1) + \log_2(x-1).$$

Тогда

$$(x+4)\log_4(x+1) - (x-4)\log_2(x-1) = \frac{8}{3}\log_2(x^2-1) \stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow}$$

$$\stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \left(\frac{x}{2} + 2\right)\log_2(x+1) - (x-4)\log_2(x-1) = \frac{8}{3}(\log_2(x-1) + \log_2(x+1)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(3x-4)}{6}\log_2(x+1) - \frac{(3x-4)}{3}\log_2(x-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3}, \\ \log_2(x+1) = 2\log_2(x-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3}, \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow x_1 x_2 = 4.$$

$$\text{Ответ. } \left\{\frac{4}{3}; 3\right\}, 4. \blacktriangleleft$$

**Решите уравнения 2 – 8 и найдите соответственно сумму квадратов всех корней.**

2. ( МГУ, 1999, мехмат)

$$|\log_3(2x+5)| = \log_3(1-|x+2|) + \log_3(1+|x+2|).$$

Замечательное уравнение! Его можно решить «в лоб» – раскрыть модули. Но это будет долго (первый способ). А можно решить очень быстро (второй способ).

*Первый способ* (так чаще всего решают школьники).

$\blacktriangleright$  Найдём ОДЗ:

$$\begin{cases} 2x+5 > 0, \\ 1-|x+2| > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{5}{2}, \\ -1 < x+2 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{5}{2}, \\ -3 < x < -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{5}{2}; -1\right).$$

Теперь будем раскрывать модули:

$$|\log_3(2x+5)| = \log_3(1-|x+2|) + \log_3(1+|x+2|) = \log_3(1-(x+2)^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(2x+5) \geq 0, \\ \log_3(2x+5) = \log_3(1-(x+2)^2); \end{cases} \text{ ОДЗ} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(2x+5) < 0, \\ \log_3(2x+5) = -\log_3(1-(x+2)^2) \end{cases}$$

$$\text{ОДЗ} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+5 \geq 1, \\ 2x+5 = 1-x^2-4x-4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+5 < 1, \\ 2x+5 = \frac{1}{1-x^2-4x-4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2, \\ x^2+6x+8=0 \Leftrightarrow x=-3 \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow x=-2, \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2, \\ (2x+5)(x^2+4x+3) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-9 \pm \sqrt{17}}{4},$$

$$\text{но } x = \frac{-9 - \sqrt{17}}{4} < -\frac{5}{2}, \text{ а } x = \frac{-9 + \sqrt{17}}{4} > -2.$$

**Ответ.**  $\{-2\}, 4.$  ◀

*Второй способ.*

► Заметим, что левая часть  $|\log_3(2x+5)| \geq 0$ , а правая часть  $\log_3(1-|x+2|) + \log_3(1+|x+2|) \equiv \log_3(1-(x+2)^2) \leq 0$  в ОДЗ. Поэтому уравнение имеет место тогда и только тогда, когда каждая из частей равна 0, т. е.

$$|\log_3(2x+5)| = \log_3(1-|x+2|) + \log_3(1+|x+2|) \equiv \log_3(1-(x+2)^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(2x+5) = 0, \\ \log_3(1-(x+2)^2) = 0. \end{cases} \Leftrightarrow x = -2.$$

Видно, что  $x = -2$  принадлежит ОДЗ.

**Ответ.**  $\{-2\}, 4$ . ◀

$$3. \log_{\frac{1}{3}} \left( 1 + (x^2 - 3x + 2)^2 \right) = \sqrt{x^2 - 6x + 8}.$$

$$4. \lg^2(x+1) = \lg(x+1)\lg(x-1) + 2\lg^2(x-1).$$

$$5. 9^{\frac{\log_1(x+2)}{3}} = 7^{\frac{\log_1(2x^2+3x+2)}{7}}. \quad 6. \frac{1}{x} + 27^{2,5(\log_9 \sqrt[3]{x})} = \frac{10}{3}.$$

$$7. 2\lg^2\left(1 + \frac{2}{x}\right) - \lg^2\left(1 - \frac{2}{x+2}\right) = \lg^2\left(\frac{2}{3-2x} - 1\right).$$

$$8. 1 + \lg^4(x^2 - x + 1) = |\cos((x-1)\cos 2x)|.$$

$$9. |\log_2(2x+7)| = \log_2(1+|x+3|) + \log_2(1-|x+3|).$$

### Решите уравнения 10 – 23

$$10. \left| 1 - \log_{\frac{1}{6}} x \right| + 2 = \left| 3 - \log_{\frac{1}{6}} x \right|.$$

$$11. \log_{0,5} \left( \log_4 \frac{1}{x} \right) + \log_4 (\log_2 (16x^2)) = 0.$$

$$12. x^{\log_7 4} + 5 \cdot 2^{\log_7 x} - 4 = 0.$$

$$13. 2\log_5(x^2 - 4) + 4\sqrt{\log_5(x-2)^2} - \log_5(x+2)^2 = 5.$$

$$14. \log_4(x^2) + \log_2(x+5) = 2.$$

$$15. 4^{\lg^2 x} - 4^{\frac{1}{1+\cos 2x}} \cdot \log_{2\sqrt[3]{2}} 4 = -\log_{\sin x} \left( \frac{1 - \cos 2x}{2} \right).$$

$$16. \log_3 x + \log_3(x+1) = 1.$$

$$17. (x^2 + 4)\lg(\sin^2 3x) + x^2 \cdot \lg(\cos^2 2x) = 4\lg(\cos 2x \cdot \sin^3 3x).$$

$$18. \sqrt{3\log_2 x + 2} = 2\log_2 x - 4. \quad 19. \frac{\log_2 \frac{x}{2}}{\log_2 4x} + 6 \frac{\log_2 4x}{\log_2 \frac{x}{2}} = 5.$$

$$20. \frac{2\lg x + 1}{\lg x - 1} + \frac{\lg x + 1}{2\lg x + 1} = \frac{5\lg x + 4}{(\lg x - 1)(2\lg x + 1)}.$$

$$21. \log_4(4\sin^2 2x) = 2 - \log_2(-2\operatorname{tg} x).$$

$$22. \log_4(4\operatorname{ctg}^2 x) = 1 + \log_2(-2\sin 2x).$$

$$23. \log_3 \sqrt[10]{x} + \log_3 x^{-3} + \frac{10}{\log_3 x} + \frac{4}{5} = 0.$$

# Глава III. Уравнения, содержащие сложную экспоненту или логарифм с переменным основанием

## § 1. Сложная экспонента $y(x) = a(x)^{f(x)}$ . Определение. Область определения и множество значений

В школе встречаются уравнения и неравенства, содержащие выражение вида  $a(x)^{f(x)}$ , но нигде не написано, каковы свойства функции  $y(x) = a(x)^{f(x)}$ . Учителя и школьники, например, не задумываясь, логарифмируют это выражение, чтобы, например, решить уравнение или найти производную этой функции. А где написано, что это можно делать? Какова область определения этой функции? Всегда ли  $a(x) > 0$ ?

Когда в школьной программе появляется новая функция, то, как правило, сначала изучаются её свойства, а потом, основываясь на них, учатся решать уравнения и неравенства, их содержащие.

Иная ситуация с двумя функциями, которые в школе не изучаются (потому что нет ни единого слова об их свойствах) – это функция вида

$$y(x) = a(x)^{f(x)}$$

и функция вида

$$y(x) = \log_{a(x)} f(x).$$

Прежде чем рассматривать уравнения и неравенства, содержащие выражение вида  $a(x)^{f(x)}$ , выясним, что это вообще такое. В школе об этом ничего и нигде не сказано – в любом школьном учебнике любого уровня (включая математические классы) функция  $y(x) = a(x)^{f(x)}$  как таковая просто *отсутствует*. Тем не менее задачи, содержащие её, встречаются всюду – и в школьных задачаниках, и в сборнике Сканава, и на вступительных экзаменах во многие вузы, и в заданиях ЕГЭ. Способы их решения *декларируются*, но ничего не сказано, почему так, а не иначе.

Но ведь это не очень вписывается в школьный курс математики – способы решения всех других классических уравнений и неравенств

обосновываются, ссылаясь на те или другие свойства функций, входящих в них. Зато сейчас мы всё обоснуем и объясним.

Всем придётся сдавать ЕГЭ. Решения заданий серии С надо оформлять примерно так, как оформляются медальные работы: необходимо обосновать решение, причём оценка существенно зависит от правильности и полноты обоснования. Но что можно написать, решая, например, уравнение  $x^{x^2} = x^{x+2}$  или неравенство  $x^{x^2} \geq x^{x+2}$ ? Какова ОДЗ этой функции? А можно ли продифференцировать, например,  $x^x$ ? А можно ли построить график функции  $y = x^x$ ? Если да, то как? Рассмотрим выражение

$$y(x) = a(x)^{f(x)}.$$

Сейчас во всем разберёмся. Часто школьники (и учителя) объясняют своё решение, ссылаясь на монотонность показательной функции.

Но это же не показательная функция, т. к. основание переменное! Но это и не степенная функция, потому что показатель переменный. Тогда что же это за функция?

На самом деле уже при введении *степенной* функции  $y(x) = x^\alpha$  нас «подстерегали неприятности». Какие же там могут быть «неприятности»? Например, области определения функции  $y(x) = x^\alpha$  различны для разного типа показателей степени.

Область определения зависит от  $\alpha$  следующим образом:

- a) если  $\alpha = n$ , где  $n$  – натуральное число, то степенная функция  $x^n$  определена при любых значениях  $x$ ;
- b) если  $\alpha = -n$  – отрицательное целое число, то функция  $x^{-n}$  определена при любых значениях  $x \neq 0$ .
- c) если  $\alpha$  не целое число, то функция  $y(x) = x^\alpha$  определена при  $x > 0$ .

Показательная функция  $y = a^x$  определена при  $a > 0$ .

Мы видим, что если основание степени или основание показательной функции положительно, то определены обе функции. Уже поэтому логично, что функция  $y(x) = a(x)^{f(x)}$ , которую многие учителя и школьные методисты называют показательно-степенной, может быть определена *только для*  $a(x) > 0$ . А значит, по крайней мере странно, что в некоторых источниках разбираются решения задач такого типа с нулевым и отрицательным основанием. Поэтому начнём с определения.

По определению полагают, что для любого  $c > 0$ ,  $c \neq 1$

$$a(x)^{f(x)} = c^{f(x) \log_c a(x)}. \quad (\text{O } 1)$$

Из определения теперь чётко следует, что это всё-таки *показательная* функция, и в ней нет *ничего* от степенной.

Чаще всего её записывают через натуральное основание

$$a(x)^{f(x)} = e^{f(x) \ln a(x)},$$

поэтому её называют экспонентой. Многим понятней записать её через основание 10 или 2:

$$a(x)^{f(x)} = 10^{f(x) \lg a(x)} = 2^{f(x) \log_2 a(x)}.$$

Так или иначе, но это *сложная* показательная функция, потому что в показатель входит не только показатель заданного выражения, но и его основание.

Функцию  $y(x) = a(x)^{f(x)}$  называют *сложной экспонентой*. Теперь хорошо видно, что *областью определения* сложной экспоненты является множество  $X$ , на котором  $a(x) > 0$ .

Сложная экспонента классическими свойствами показательной функции уже не обладает (например, не является монотонной функцией в области определения), но, как всякая показательная функция, принимает только *положительные* значения.

Сложная экспонента является непрерывной функцией там, где непрерывны  $a(x)$  и  $f(x)$ , и дифференцируемой там, где дифференцируемы  $a(x)$  и  $f(x)$ . Ясно также, по каким правилам дифференцируется сложная экспонента:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \left( a(x)^{f(x)} \right)' = \left( e^{f(x) \ln a(x)} \right)' = e^{f(x) \ln a(x)} \left( f(x) \ln a(x) \right)' = \\ &= e^{f(x) \ln a(x)} \left( f'(x) \ln a(x) + f(x) \cdot \frac{a'(x)}{a(x)} \right). \end{aligned}$$

Например, найдём производную функции  $y = x^x$ :

$$y' = (x^x)' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} \left( \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \right) = x^x (\ln x + 1).$$

Теперь попробуем построить, например, график функции  $y = x^{x^2}$ .

Так как  $D(y) = (0; +\infty)$ , то прежде всего необходимо выяснить поведение на «границе», т. е. найти два предела:

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^{x^2} = \lim_{x \rightarrow +0} e^{x^2 \ln x} = 1, \text{ т. к. } \lim_{x \rightarrow +0} x^2 \ln x = 0, \text{ и}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2 \ln x} = +\infty.$$

Теперь найдём производную:

$$y' = (x^{x^2})' = (e^{x^2 \ln x})' = e^{x^2 \ln x} \left( 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} \right) = x e^{x^2 \ln x} (2 \ln x + 1).$$

Найдём критические точки в области определения:

$$y' = 0 \Leftrightarrow x e^{x^2 \ln x} (2 \ln x + 1) = 0 \Leftrightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Расставим знаки производной (рис. 9). Ясно, что точка  $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$  – точка минимума.

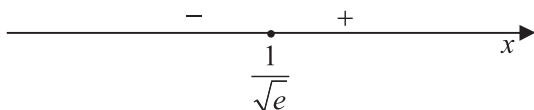


Рис. 9.

$$y_{\min} = y\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{\frac{1}{e}} = e^{-\frac{1}{2e}}.$$

Строим эскиз графика – рис. 10.

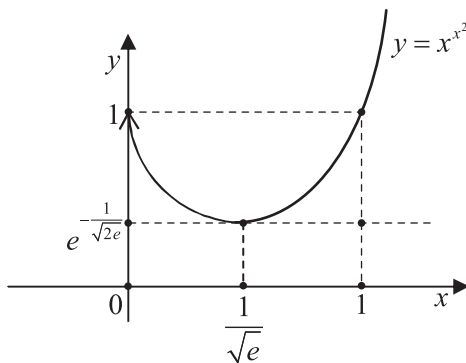


Рис. 10

Заметим, что при  $x \in (0; 1)$  функция не монотонна!

## § 2. Уравнения, содержащие сложную экспоненту

Рассмотрим теперь уравнение  $a(x)^{f(x)} = a(x)^{g(x)}$ . Воспользуемся определением сложной экспоненты (возьмём в роли  $c$  число 10 – наиболее знакомое школьникам основание логарифма):

$$a(x)^{f(x)} = 10^{f(x)\lg a(x)}, \quad a(x)^{g(x)} = 10^{g(x)\lg a(x)}, \quad \text{тогда} \quad a(x)^{f(x)} = a(x)^{g(x)} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 10^{f(x)\lg a(x)} = 10^{g(x)\lg a(x)} \Leftrightarrow f(x)\lg a(x) =$$

$$= g(x)\lg a(x) \Leftrightarrow \lg a(x)(f(x) - g(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a(x) = 1, \\ a(x) > 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

Следовательно,

$$a(x)^{f(x)} = a(x)^{g(x)} \stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a(x) = 1, \\ f(x) = g(x), \end{cases} \quad (\text{УР П4})$$

или полное условие равносильности:

$$a(x)^{f(x)} = a(x)^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a(x) = 1, \\ a(x) > 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases} \quad (\text{УР П5})$$

Соотношение

$$a(x)^{f(x)} = a(x)^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)\lg a(x) = g(x)\lg a(x) \quad (\text{УР П6})$$

показывает, что равносильное уравнение получается таким же, как если бы его прологарифмировали как «обычную» степень по допустимому основанию. Замечательно, что даже ОДЗ левой и правой частей всегда совпадают! Именно поэтому этот равносильный переход обычно называют и осуществляют логарифмированием уравнения  $a(x)^{f(x)} = a(x)^{g(x)}$ .

Вот мы и получили равносильные переходы, которые декларируются в литературе.

*Примечание.* Мы не решаем уравнение  $(-2)^x = -8$ , потому что показательная функция не определена при  $a = -2$ . А этот факт связан с тем, что  $(-2)^3 \neq (-2)^{\frac{12}{4}}$ : левая часть существует, а правая – нет! И если ничего не сказано о том, каким может быть  $x$  (а значит,  $x \in R$ , и

число 3 может быть выражено рациональным числом  $\frac{12}{4}$ ), уравнение не имеет решений.

Однако мы решаем уравнение  $(-2)^n = -8$ , где *заранее* известно, что  $n$  – число целое (а операция возведения в целую степень отлична от операции возведения в рациональную степень). Вспомним, что и  $\sqrt[3]{-2} \neq (-2)^{\frac{1}{3}}$  именно потому, что если определить  $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$  и для отрицательных чисел, то  $(-2)^{\frac{1}{3}} \neq (-2)^{\frac{2}{6}}$ .

**Решите уравнения 1 – 11 и найдите соответственно сумму квадратов их корней**

1.  $x^{x^2+1} = x^{3x+5}$ .

А что с этим уравнением делать? Оно не показательное, не степенное.

► «Продвинутые» школьники решают его так:

$$x^{x^2+1} = x^{3x+5} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1; \\ \begin{cases} x > 0, \\ x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm 5}{2} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ x = 4 \end{cases} \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 17.$$

**Ответ.**  $\{1; 4\}$ , 17. ◀

Верно. Откуда взялся этот способ решения? В «Сканави» так написано. А откуда это следует? Практически никто не знает, а мы теперь знаем и можем объяснить. Так? Так...

*Примечание.* Вернёмся к нашему уравнению. Среди корней квадратного уравнения есть число  $x = -1$ , и при подстановке его в уравнение  $(-1)^2 = (-1)^2$  оно обращается в тождество. Есть ещё одно число, которое тоже обращает уравнение в тождество – это число  $x = 0$ . Значит, числа  $-1$  и  $0$  являются решениями заданного уравнения? Тогда ответ неправильный?

Числа  $-1$  и  $0$  *не принято* считать решениями данного уравнения, т. к. они не принадлежат определённому нами ОДЗ. Однако если эти числа указаны, то наказывать за это нельзя: эти числа, действительно, обращают уравнение в тождество, но правил нахождения таких решений не существует. Кто сказал, что ещё каких-нибудь отрицательных решений нет? Или есть?

Поэтому для корректности в заданиях ЕГЭ просят найти положительные корни такого уравнения. Мы пока этого делать не будем.

$$2. x^{x^2} = x^{-2-3x}.$$

► Воспользуемся определением сложной экспоненты:

$$x^{x^2} = x^{-2-3x} \Leftrightarrow 10^{x^2 \lg x} = 10^{(-2-3x) \lg x} \Leftrightarrow (x^2 + 3x + 2) \lg x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ x > 0, \\ x^2 + 3x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow x^2 = 1.$$

Корни  $-1$ ,  $-2$  не входят в ОДЗ, а потому не являются решениями уравнения. Это несмотря на то, что  $(-1)^1 = (-1)^1$ ,  $(-2)^4 = (-2)^4$ , но здесь  $x$  имеет право быть рациональным, и мы получаем противоречие в том, что  $\left(-\frac{2}{2}\right)^4 \neq (-1)^1$  (левая часть не определена, а правая часть существует!).

**Ответ.**  $\{1\}$ , 1. ◀

$$3. x^{x^2+4x+5} = x^{3x^2-5x-40}.$$

*Первый способ.*

► Запишем ОДЗ:  $x > 0$ . Так как  $x > 0$  в ОДЗ, то уравнение можно прологарифмировать (см. (УР П6)):

$$x^{x^2+4x+5} = x^{3x^2-5x-40} \Leftrightarrow (x^2 + 4x + 5) \lg x = (3x^2 - 5x - 40) \lg x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lg x = 0, \\ x > 0, \\ x^2 + 4x + 5 = 3x^2 - 5x - 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg x = 0, \\ x > 0, \\ 2x^2 - 9x - 45 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ x > 0, \\ x = \frac{9 \pm 21}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ x = \frac{15}{2} \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 57,25. \end{cases}$$

**Ответ.**  $\{1; 7,5\}$ ; 57,25. ◀

*Второй способ.*

► Воспользуемся полным условием равносильности (УР П5):

$$x^{x^2+4x+5} = x^{3x^2-5x-40} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, \\ x>0, \\ x^2+4x+5=3x^2-5x-40 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1, \\ x>0, \\ 2x^2-9x-45=0 \Leftrightarrow x=\frac{9\pm 21}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, \\ x=7,5 \end{cases} \Rightarrow x_1^2+x_2^2=57,25.$$

**Ответ.**  $\{1; 7,5\}; 57,25$ . ◀

4.  $x^{x^2+2} = x^{x+4}$ .

5.  $(x^2+x-57)^{3x^2+3} = (x^2+x-57)^{10x}$ .

6.  $(x^2-3x+2)^{2x^2-6x+2} = (x^2-3x+2)^{x^2-7x+3}$ .

7.  $(4x^2+4x-3)^{2x^2-x+2} = (4x^2+4x-3)^{4x^2+10x-5}$ .

8.  $x^{x^2-5x+8} = x^2$ .

9.  $x^{\sqrt[3]{x^2}} = (\sqrt{x})^x$ .

10.  $(x-1)^{x^3-x^2} = (x-1)^{3x+x^2}$ .

11.  $2^{\log_{\sqrt{2}}(x-0,5)} + x = x^{0,5x^2} + \cos^4 \frac{\pi}{4}$ .

### § 3. Логарифм с переменным основанием. Определение. Область определения

Рассмотрим выражение  $y(x) = \log_{a(x)} f(x)$ . Что это за функция? Каковы её свойства? В школе на эти вопросы ответа нет. А мы постараемся ответить.

По определению полагают, что для любого  $c > 0$ ,  $c \neq 1$

$$\log_{a(x)} f(x) = \frac{\log_c f(x)}{\log_c a(x)}, \quad (\text{О } 2)$$

т. е.  $\log_{a(x)} f(x)$  — это частное двух логарифмов. Отсюда естественным образом вытекает, что областью определения, или ОДЗ, является множество  $X$ , на котором

$$f(x) > 0, a(x) > 0, a(x) \neq 1.$$

Рассмотрим, например, функцию  $y = \log_x x$ . Она не равна 1 тождественно:  $\log_x x = 1$ .

$$\text{В ОДЗ: } \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

График функции  $y = \log_x x$  имеет вид (рис. 9):

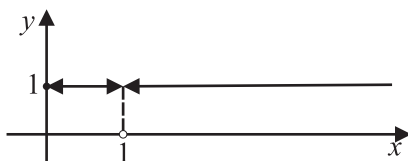


Рис. 11

Найдём производную функции  $y = \log_{a(x)} f(x)$ :

$$y'(x) = \left( \log_{a(x)} f(x) \right)' = \left( \frac{\ln f(x)}{\ln a(x)} \right)' = \frac{\frac{f'(x)}{f(x)} \cdot \ln a(x) - \ln f(x) \cdot \frac{a'(x)}{a(x)}}{\ln^2 a(x)}.$$

#### § 4. Уравнения вида

$$\log_{a(x)} f(x) = \log_{a(x)} g(x) \text{ и } \log_{a(x)} f(x) = g(x).$$

Рассмотрим уравнение вида:

$$\log_{a(x)} f(x) = \log_{a(x)} g(x).$$

$$\text{Запишем ОДЗ: } \begin{cases} a(x) > 0, \\ a(x) \neq 1, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

А теперь аккуратно выведем то уравнение, которое декларируется во всех методических пособиях.

► Воспользуемся определением (О 2):

$$\log_{a(x)} f(x) = \log_{a(x)} g(x) \Leftrightarrow \frac{\lg f(x)}{\lg a(x)} = \frac{\lg g(x)}{\lg a(x)} \stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \lg f(x) = \lg g(x) \stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow}$$

$$\stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} f(x) = g(x), \text{ т. е.}$$

$$\log_{a(x)} f(x) = \log_{a(x)} g(x) \stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} f(x) = g(x). \quad (\text{УР Л6})$$

Можно записать полное условие равносильности:

$$\log_{a(x)} f(x) = \log_{a(x)} g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ a(x) > 0, \\ a(x) \neq 1, \\ \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) > 0. \end{cases} \end{cases} \quad (\text{УР Л7}) \blacktriangleleft$$

Теперь рассмотрим уравнение вида

$$\log_{a(x)} f(x) = g(x).$$

► Тогда

$$\begin{aligned} \log_{a(x)} f(x) = g(x) &\Leftrightarrow \frac{\lg f(x)}{\lg a(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \lg a(x) \neq 0, \\ \lg f(x) = g(x) \lg a(x) \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a(x) \neq 1, \\ \lg f(x) = \lg(a(x))^{g(x)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(x) \neq 1, \\ f(x) = (a(x))^{g(x)}, \end{cases} \end{aligned}$$

то есть:

$$\log_{a(x)} f(x) = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a(x) \neq 1, \\ f(x) = (a(x))^{g(x)}. \end{cases} \quad (\text{УР Л8}) \blacktriangleleft$$

*Замечание.* В (8) нет неравенства  $a(x) > 0$ , потому что оно входит в ОДЗ и левой, и правой частей.

$$\log_{a(x)} f(x) = g(x) \stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} f(x) = (a(x))^{g(x)}. \quad (\text{УР Л9})$$

*Рекомендация.* При решении уравнения  $\log_{a(x)} f(x) = \log_{a(x)} g(x)$  можно поступать по-разному. Можно сначала решить уравнение  $f(x) = g(x)$ , затем отобрать корни. Можно поступить по-другому: решить уравнение  $f(x) = g(x)$ , а затем сделать проверку, подставив

найденные корни в заданное уравнение  $\log_{a(x)} f(x) = \log_{a(x)} g(x)$ .

Выбор способа зависит от сложности входящих в уравнение выражений.

**Решите уравнения 1 – 2 и найдите сумму квадратов их корней**

1.  $\log_{(3-4x^2)}(9-16x^2) = 2 + \frac{1}{\log_2(3-4x^2)}.$

► Перейдём во всех логарифмах к одному основанию, а затем воспользуемся полным условием равносильности (УР Л7):

$$\begin{aligned} \log_{(3-4x^2)}(9-16x^2) &= 2 + \frac{1}{\log_2(3-4x^2)} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log_{(3-4x^2)}(3+4x^2)(3-4x^2) &= 2 + \log_{(3-4x^2)} 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 1 + \log_{(3-4x^2)}(3+4x^2) &= 2 + \log_{(3-4x^2)} 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log_{(3-4x^2)}(3+4x^2) &= \log_{(3-4x^2)} 2(3-4x^2) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 3-4x^2 > 0, \\ 3-4x^2 \neq 1, \\ 3+4x^2 = 6-8x^2 \Leftrightarrow 4x^2 = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 0,5. \end{aligned}$$

**Ответ.**  $\{-0,5; 0,5\}, 0,5.$  ◀

*Примечание.* Почему не записано ограничения вида  $\log_2(3-4x^2) \neq 0$ , когда «бросили» знаменатель при первом равносильном переходе? Потому что это излишне. Ведь  $\log_2(3-4x^2) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3-4x^2 > 0, \\ 3-4x^2 \neq 1 \end{cases}$ , но у равносильного уравнения  $\log_{(3-4x^2)}(3+4x^2)(3-4x^2) = 2 + \log_{(3-4x^2)} 2$  то же самое ОДЗ.

2.  $\frac{x}{18} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\log_x 12}.$

Какое «компактное» уравнение! Но что с ним делать? Сейчас мы увидим два совершенно разных способа решения: стандартный и с «изюминкой».

*Первый способ*

►  Начнём со стандартного – запишем ОДЗ:  $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$

Затем хочется прологарифмировать уравнение. Но по какому основанию – 2 или 3, или  $2/3$ , или  $x$ , или 12? Сразу ничего не видно. Прологарифмируем по основанию 3:

$$\begin{aligned} \frac{x}{18} &= \left(\frac{2}{3}\right)^{\log_x 12} \Leftrightarrow \log_3 x - \log_3 18 = \log_x 12 (\log_3 2 - 1) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log_3 x - \log_3 18 &= \frac{\log_3 12}{\log_3 x} (\log_3 2 - 1) \stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \\ \stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \log^2_3 x - (2 + \log_3 2) \cdot \log_3 x - \log_3 12 (\log_3 2 - 1) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log_3 x &= \frac{2 + \log_3 2 \pm \sqrt{(2 + \log_3 2)^2 + 4 \log_3 12 (\log_3 2 - 1)}}{2} = \\ &= \frac{2 + \log_3 2 \pm \sqrt{4 + 4 \log_3 2 + \log^2_3 2 + 4(1 + 2 \log_3 2)(\log_3 2 - 1)}}{2} = \\ &= \frac{2 + \log_3 2 \pm \sqrt{4 + 4 \log_3 2 + \log^2_3 2 + 4(-\log_3 2 + 2 \log^2_3 2 - 1)}}{2} = \\ &= \frac{2 + \log_3 2 \pm 3 \log_3 2}{2} \Leftrightarrow \log_3 x = \begin{cases} 1 + 2 \log_3 2 = \log_3 12, \\ 1 - \log_3 2 = \log_3 \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12, \\ x = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 146, 25. \end{aligned}$$

**Ответ.**  $\{1, 5; 12\}$ , 146, 25.

Как видим, пришлось потрудиться, чтобы получился «приличный» ответ. Всё-таки кажется, что есть более простое решение. ◀

## Второй способ



Спрашивается, как-то связаны между собой числа 18, 12,

$\frac{2}{3}$ ? Связаны:  $18 = 12 \cdot \frac{3}{2}$ . Воспользуемся этим:

$$\frac{x}{18} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\log_x 12} \Leftrightarrow \frac{\frac{2}{3}x}{12} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\log_x 12} \Leftrightarrow \frac{x}{12} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\log_x 12 - 1} \Leftrightarrow \frac{x}{12} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\log_x \frac{12}{x}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_x \frac{x}{12} = -\log_x \frac{x}{12} \cdot \log_x \left(\frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow \log_x \frac{x}{12} \left(1 + \log_x \left(\frac{2}{3}\right)\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_x \frac{x}{12} = 0, \\ \log_x \left(\frac{2}{3}\right) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{12} = 1, \\ x = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 146,25.$$

**Ответ.**  $\{1,5;12\}$ , 146,25. ◀

Ну, как? Проще? Проще! Но пришлось чуть-чуть подумать перед тем, как начать решать. Так? Так.

*Примечание.* Существуют, без сомнения, и другие способы решения.

## Решите уравнения 3 – 6 и найдите произведения их корней

3.  $2 \log_{16} x - \log_x 256 = 3$ .    4.  $\log_2 x = 1 + 2 \log_x 2$ .

5.  $\log_2 x + 2 \log_x 2 = 3$ .

6.  $\log_2 x - \frac{8}{2 + \log_2 x} = \frac{4}{1 + \log_x 4}$ .

## Решите уравнения 7 – 14.

7.  $\log_{(x+1)} (x^2 + x - 6)^2 = 4$ .

► Запишем ОДЗ: 
$$\begin{cases} x+1 > 0, \\ x+1 \neq 1, \\ x^2 + x - 6 \neq 0. \end{cases}$$

Попробуем в этой задаче, несмотря на наличие квадрата, обойтись без модулей:

$$\log_{(x+1)}(x^2 + x - 6)^2 = 4 \Leftrightarrow \log_{(x+1)}(x^2 + x - 6)^2 = \log_{(x+1)}(x+1)^4 \stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow}$$

$$\stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} (x^2 + x - 6)^2 = (x+1)^4 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 6 = (x+1)^2, \\ x^2 + x - 6 = -(x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -7, \\ x = \frac{-3 \pm 7}{4}. \end{cases}$$

Учтём ОДЗ и получим, что  $x = 1$ .

**Ответ. 1. ◀**

8.  $\log_9(37 - 12x) \cdot \log_{7-2x} 3 = 1$ .

*Первый способ оформления решения.*

$$\blacktriangleright \log_9(37 - 12x) \cdot \log_{7-2x} 3 = 1 \Leftrightarrow \frac{\log_3(37 - 12x)}{2} \cdot \frac{1}{\log_3(7 - 2x)} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(7 - 2x) \neq 0, \\ \log_3(37 - 12x) = 2 \log_3(7 - 2x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(7 - 2x) \neq 0, \\ \log_3(37 - 12x) = \log_3(7 - 2x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(7 - 2x) \neq 0, \\ 37 - 12x = (7 - 2x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(7 - 2x) \neq 0, \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(7 - 2x) \neq 0, \\ \begin{cases} x = 3, \\ x = 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

**Ответ. 1. ◀**

*Примечание.* В оформлении нет ни одного слова! Почему?

Все слова «спрятаны» в *знании* правомерности равносильных переходов.

Не было записано ОДЗ? Было: когда был опущен знаменатель, то записано, что он не равен 0. Когда осуществлялся переход от  $2 \log_3(7 - 2x)$  к  $\log_3(7 - 2x)^2$ , не было записано, что  $7 - 2x > 0$ ? Не было, потому что остался в системе  $\log_3(7 - 2x)$ , который существует лишь при  $7 - 2x > 0$ . *Явно* эти неравенства не решались и не проверялись, выполнены ли они. Почему? Так как при решении *уравнений*, как правило, получается конечное число решений, то неравенства решать не обязательно – достаточно подставить в них найденные решения. Если решения – «хорошие» числа, то проверяется *устно*, а вот если числа «плохие», например, иррациональные, то проверять приходится письменно. А иногда в

этом случае, действительно, проще решить неравенства, а затем проверить, какие из решений принадлежат нужным промежуткам. В нашем случае устно проверить было легко.

Можно оформить тоже с равносильными переходами, но немного по-другому.

*Второй способ оформления решения.*

$$\blacktriangleright \text{Запишем ОДЗ: } \begin{cases} 37 - 12x > 0, \\ 7 - 2x > 0, \\ 7 - 2x \neq 1, \end{cases} \quad \text{тогда}$$

$$\log_9(37 - 12x) \cdot \log_{7-2x} 3 = 1 \Leftrightarrow \frac{\log_3(37 - 12x)}{2} \cdot \frac{1}{\log_3(7 - 2x)} = 1 \stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow}$$

$$\stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \log_3(37 - 12x) = 2 \log_3(7 - 2x) \stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \log_3(37 - 12x) = \log_3(7 - 2x)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 37 - 12x = (7 - 2x)^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ x = 1. \end{cases}$$

Учтём ОДЗ и получим, что  $x = 1$ .

**Ответ. 1. ◀**

**9.**  $\log_{81}(15 - 7x) \cdot \log_{(3-x)} 9 = 1$ . **10.**  $2 \log_x(4 + \sqrt{x}) = 2 - \log_{\sqrt{x}} 2$ .

**11.**  $\frac{1}{\log_x 2} - \log_2 \frac{1}{x} = 2$ . **12.**  $\log_x(3x - 2) = 2$ .

**13.**  $\log_{\frac{x-1}{|2x-3|}}(x-1) = 2$ . **14.**  $\log_{x^2-6x+8}(\log_{2x^2-2x+3}(x^2+2x)) = 0$ .

**Решите уравнения 15 – 18 и найдите сумму квадратов их корней**

**15.**  $3 \log_{3x} x = 2 \log_{9x} x^2$ . **16.**  $x^{\log_2 \frac{x}{98}} \cdot 14^{\log_2 7} = 1$ .

**17.**  $x^{(\log_3 x)^3 - 3 \log_3 x} = 3^{-3 \log_2 \sqrt{2} 4 + 8}$ . **18.**  $2^{\log_{\sqrt{2}}(x-0,5)} + x = x^{0,5x^2} + \cos^4 \frac{\pi}{4}$ .

**Решите уравнения 19 – 25**

**19.**  $\sqrt{\log_{\sqrt[3]{x}}(7x^2)} \cdot \log_7 x = -6$ .



Очень коварное уравнение! Многие не обращают внимания на то, что корень сильно влияет на ход решения. Хотя уравнение и содержит несколько логарифмов, «ловушка» на этот раз обусловлена именно наличием квадратного корня. Если, по школьной привычке, начать с поиска ОДЗ корня, то можно просто запутаться, не говоря о том, что очень немногие вспомнят про условие  $\log_7 x < 0$ .

► Начнём решать, сообразив, что обе части уравнения должны быть одного знака:

$$\sqrt{\log_{\sqrt{x}}(7x^2)} \cdot \log_7 x = -6 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_7 x < 0, \\ \frac{1+2\log_7 x}{6} \cdot \log_7^2 x = 36 \Leftrightarrow \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_7 x < 0, \\ \log_7 x = \frac{-1 \pm 7}{4} \Leftrightarrow \log_7 x = -2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{49}. \end{cases}$$

**Ответ.**  $\frac{1}{49}$ . ◀



Как видите, на самом деле ничего сложного – просто надо внимательно следить за последовательностью действий.

$$20. \sqrt{\log_{\sqrt{x}}(5x)} \cdot \log_5 x = -2.$$

$$21. \sqrt{\log_x \sqrt{2x}} \cdot \log_4 x = -1.$$

$$\text{► } \sqrt{\log_x \sqrt{2x}} \cdot \log_4 x = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_4 x \leq 0, \\ \log_x \sqrt{2x} \cdot \log_4^2 x = 1 \Leftrightarrow \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_4 x \leq 0, \\ \frac{(\log_4 2 + \log_4 x)}{\log_4 x} \log_4^2 x = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_4 x \leq 0, \\ 2\log_4^2 x + \log_4 x - 4 = 0 \Leftrightarrow \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_4 x \leq 0, \\ \log_4 x = \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{4} \Leftrightarrow \log_4 x = \frac{-1 - \sqrt{33}}{4} \Leftrightarrow x = 4^{\frac{-1 - \sqrt{33}}{4}}. \end{cases}$$

**Ответ.**  $4^{\frac{-1 - \sqrt{33}}{4}}$ . ◀



Это уравнение оказалось ещё более коварным, чем предыдущие, потому что получившийся ответ очень *неприятно проверять*, если не пользоваться равносильными преобразованиями.

$$22. \log_x \sqrt{5x^{-1}} \cdot \sqrt{\log_{25} x} = -1.$$

$$23. \log_{(2x-1)} (2x-3) = \log_{(2x-3)} (2x-1).$$

► Сейчас мы приведём сначала логарифмы к одному основанию – переменному, которое является *допустимым*, т. к. является основанием одного из логарифмов. Равносильные переходы здесь будут не самые простые (просмотрите их внимательней):

$$\log_{(2x-1)} (2x-3) = \log_{(2x-3)} (2x-1) \Leftrightarrow \log_{(2x-1)} (2x-3) = \frac{1}{\log_{(2x-1)} (2x-3)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{(2x-1)}^2 (2x-3) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{(2x-1)} (2x-3) = 1 \Leftrightarrow \emptyset, \\ \log_{(2x-1)} (2x-3) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 > 0, \\ 2x-1 \neq 1, \\ 2x-3 = \frac{1}{2x-1} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}.$$

**Ответ.**  $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ . ◀

$$24. \left| \log_{3x} (x^2 - 6x + 8) - 1 \right| = 1 - \log_{3x} (x^2 - 6x + 8).$$

► Так как  $\left| \log_{3x} (x^2 - 6x + 8) - 1 \right| \geq 0$  в ОДЗ, то и

$$1 - \log_{3x} (x^2 - 6x + 8) \geq 0.$$

Отсюда следует, что

$$\left| \log_{3x} (x^2 - 6x + 8) - 1 \right| = 1 - \log_{3x} (x^2 - 6x + 8) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - \log_{3x} (x^2 - 6x + 8) = 1 - \log_{3x} (x^2 - 6x + 8).$$

Значит, решение существует тогда и только тогда, когда

$$\log_{3x}(x^2 - 6x + 8) \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x > 0, \\ 3x \neq 1, \\ x^2 - 6x + 8 \equiv (x-2)(x-4) > 0, \\ (3x-1)(x^2 - 6x + 8 - 3x) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(0; \frac{1}{3}\right) \cup [1; 2) \cup (4; 8].$$

**Ответ.**  $\left(0; \frac{1}{3}\right) \cup [1; 2) \cup (4; 8]. \blacktriangleleft$

**25.**  $\log_{(1-x)}(3-x) = \log_{(3-x)}(1-x).$

**26.**  $x^{4\lg(x-1)} \cdot (x-1)^{3\lg x} = x.$  **27.**  $\log_{3^{\sqrt{x+y}}} \left( 3^{\sqrt{x+y}} + \sqrt{y\sqrt{x+1}} \right) = 2^{-\sqrt{x-y-2\sqrt{x}}}.$

**28.**  $\log_{(19-x^2)}(3^x - 12 + 4 \cdot 3^{2-x}) = \log_{(x-1)}(3^x - 12 + 4 \cdot 3^{2-x}).$

**29.**  $\log_{13-x^2}(3 \cdot 4^{x+2} - 18 + 4^{-x}) = \log_{x+1}(3 \cdot 4^{x+2} - 18 + 4^{-x}).$

## Часть II

### Ответы и решения из части I

#### Глава I. Уравнения, содержащие показательные функции с постоянным основанием

##### § 2. Показательные уравнения

1.  $\{-0,8\}$ . 2.  $\{-3,6;4\}$ ; 0,4. 3.  $\{3,8\}$ . 4.  $\{-2\}$ . 5.  $\{1,25\}$ . 6.  $\{2\}$ . 7.  $\{2\}$ .

►  $3^{\sqrt[3]{x-2}-\sqrt[3]{x-4}} = 9^{\frac{-\sqrt[3]{3x-8}}{2}} \Leftrightarrow \sqrt[3]{x-2} - \sqrt[3]{x-4} = -\sqrt[3]{3x-8} \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow x-2-3\left(\sqrt[3]{x-2}\right)^2 \cdot \sqrt[3]{x-4} + 3\sqrt[3]{x-2}\left(\sqrt[3]{x-4}\right)^2 - x+4 = -3x+8 \Leftrightarrow$   
 $\sqrt[3]{x-2} \cdot \sqrt[3]{x-4}\left(\sqrt[3]{x-4}-\sqrt[3]{x-2}\right) = -x+2 \Rightarrow$  (Заметим, что это, вообще говоря, уже неравносильный переход! Следующее соотношение является лишь *следствием* уравнения

$$\sqrt[3]{x-2} - \sqrt[3]{x-4} = -\sqrt[3]{3x-8} : \quad (1)$$

если  $x = x_0$  — корень уравнения (1), то  $x = x_0$  будет корнем и нового уравнения, но если  $x = x_1$  — корень нового уравнения, то это не значит, что  $x = x_1$  является корнем уравнения (1.)

$$\Rightarrow \sqrt[3]{x-2} \cdot \sqrt[3]{x-4} \cdot \sqrt[3]{3x-8} = 2-x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x-4)(3x-8) = -(x-2)^3 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2, \\ (x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x=3. \end{cases}$$

Проверка (т. к. в одном месте не было равносильности!) показывает, что  $x=2$  является единственным корнем уравнения. ◀

При решении любых уравнений, где есть хотя бы один неравносильный переход, надо делать проверку!

$$8. \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{4} + \pi m, n, m \in \mathbb{Z} \right\}, 6.$$

##### § 3. Замена переменных в уравнении, содержащем показательную функцию

1.  $\{2\}$ , 4. 2.  $\{0\}$ , 0. 3.  $\{3\}$ , 9. 4.  $\{-1;1\}$ , 2.

5.  $\{1\}; 1$ .

► Пусть  $2^y = x, x > 0$ . Тогда уравнение примет вид:

$$x^2 + \frac{4x^2}{(x+2)^2} = 5.$$

Сразу не очень ясно, как решать это уравнение. Попробуем при  $x > 0$  привести к общему знаменателю:

$$x^2 + \frac{4x^2}{(x+2)^2} = 5 \Leftrightarrow x^2(x+2)^2 + 4x^2 = 5(x+2)^2 \equiv 4(x+2)^2 + (x+2)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2(x^2-1) = 4((x+2)^2 - x^2) = 4(2x+2)2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x^3+3x^2-20) = (x+1)(x-2)(x^2+5x+10) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, \\ x = 2. \end{cases}$$

Так как  $x > 0$ , то  $x = 2$ , откуда следует, что  $2^y = 2 \Leftrightarrow y = 1 \Rightarrow y^2 = 1$ . ◀

6.  $\{-1; -1\}, 2$ .

В этой задаче ответ на второй вопрос очень нетривиальный – уравнение имеет кратный корень, т. е. два одинаковых.

► Сделаем замену переменных:  $2^x = y, y > 0$ . Уравнение примет вид  $24y^3 - 20y^2 + 2y + 1 = 0$ . Целые корни не просматриваются, поэтому будем искать рациональные. Заметим, что коэффициент при  $y^3$  делится на 8, коэффициент при  $y^2$  делится на 4. Поэтому в этом случае удобно ввести новую переменную  $2y = t, t > 0$ , чтобы уменьшить коэффициент при  $y^3$ . Уравнение примет вид  $3t^3 - 5t^2 + t + 1 = 0$ . Теперь сумма коэффициентов равна 0, и оно имеет целый корень  $t = 1$ . Выделим множитель  $(t-1)$  любым способом:

$$\begin{aligned} 3t^3 - 5t^2 + t + 1 &= (t-1)(3t^2 - 2t - 1) = \\ &= (t-1)3(t-1)\left(t + \frac{1}{3}\right) = 3(t-1)^2\left(t + \frac{1}{3}\right). \end{aligned}$$

$$\text{Тогда } \begin{cases} t > 0, \\ 3t^3 - 5t^2 + t + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > 0, \\ t_{1,2} = 1, \\ t_3 = -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow t_{1,2} = 1. \text{ Заметим при этом,}$$

что  $24y^3 - 20y^2 + 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow 24\left(y - \frac{1}{2}\right)^2\left(y + \frac{1}{6}\right) = 0$ , т. е.  $y = \frac{1}{2}$

является корнем кратности 2. Поэтому в переменных  $y$ :  $y_{1,2} = \frac{1}{2}$ , или

в старых переменных  $(2^x)_{1,2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x_{1,2} = -1 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 2$ . ◀

7.  $\{2\}$ , 4. 8.  $\{9\}$ , 81.

9.  $\{0\}$ , 0.

► Пусть  $7^t = x$ ,  $x > 0$ , тогда уравнение примет вид  $x^3 + x^2 + 3x - 5 = 0$ . Обратите внимание на то, что сумма коэффициентов уравнения равна 0. Это значит, что  $x = 1$  является корнем уравнения. Выделим множитель  $(x - 1)$ :

$$x^3 + x^2 + 3x - 5 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + 2x + 5) = 0.$$

Уравнение имеет единственное решение  $x = 1$ , откуда следует, что  $7^t = 1 \Leftrightarrow t = 0$ . ◀

10.  $\{1\}$ , 1.

► Пусть  $3^y = x$ ,  $x > 0$ . Тогда уравнение примет вид:

$$|2x + 8| = 12 + |x - 5| \Leftrightarrow 2x + 8 = 12 + |x - 5| \Leftrightarrow |x - 5| = 2x - 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \geq 0, \\ x - 5 = 2x - 4, \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow 3^y = 3 \Leftrightarrow y = 1. \end{cases} \quad \text{◀}$$

$$\begin{cases} x - 5 = -2x + 4 \end{cases}$$

11.  $\{0\}$ , 0.

12.  $\{2\}$ , 4.

► Пусть  $2^x = x$ ,  $x > 0$ . Тогда уравнение примет вид:

$$\sqrt{2x^3 - 5x^2 - 8x + 2} = \sqrt{2}(x - 1) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \geq 0, \\ 2x^3 - 5x^2 - 8x + 2 = 2(x - 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x-1 \geq 0, \\ x(2x^2-7x-4)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=4 \Rightarrow 2^y=4 \Leftrightarrow y=2 \Rightarrow y^2=4.$$

Обратите внимание на то, что нет необходимости проверять и тем более находить ОДЗ – условие  $f(x) \geq 0$ , (где  $f(x)$  – подкоренное выражение) при *таком способе решения* (возведение в квадрат) *всегда* выполняется *автоматически*, а вот посторонние корни появляются, но они отсекаются условием  $x-1 \geq 0$ . ◀

13.  $\{-1\}$ , 1.

► Пусть  $2^t = x$ ,  $x > 0$ . Тогда уравнение примет вид:

$$\sqrt{4x^3 + 9x^2 - 4x + 2} = \sqrt{x^2 - 3x + 4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \in R, \\ 4x^3 + 9x^2 - 4x + 2 = x^2 - 3x + 4, \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(2x-1)(2x+1)=0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2^t = 2^{-1} \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow t^2 = 1. \quad \blacktriangleleft$$

14.  $\{4, 9\}$ , 97. 15.  $\{0\}$ , 0. 16.  $\{-1\}$ , 1. 17.  $\{2\}$ , 4. 18.  $\{1; 2\}$ , 5.

19.  $\{0; 1\}$ , 1.

► Это уравнение приводится к классическому однородному. Покажем это:

$$5 \cdot 27^x - 3 \cdot 9^x 5^x - 5 \cdot 3^x 25^x + 3 \cdot 5^{3x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^{3x} \left( 5 - 3 \cdot \left( \frac{5}{3} \right)^x - 5 \left( \frac{5}{3} \right)^{2x} + 3 \left( \frac{5}{3} \right)^{3x} \right) = 0. \quad (*)$$

Пусть  $\left( \frac{5}{3} \right)^x = t$ ,  $t > 0$ , тогда уравнение (\*) примет вид:

$$5 - 3t - 5t^2 + 3t^3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t > 0, \\ 5 - 3t - 5t^2 + 3t^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > 0, \\ (1-t^2)(5-3t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=1, \\ t=\frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0, \\ x=1. \end{cases}$$

20.  $\{-1; 1\}$ , 2.

$$\begin{aligned}
 & \blacktriangleright (26+15\sqrt{3})^x - 3(7+4\sqrt{3})^x - 2(2+\sqrt{3})^x + (2-\sqrt{3})^x = 3 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow (2+\sqrt{3})^{3x} - 3(2+\sqrt{3})^{2x} - 2(2+\sqrt{3})^x + \frac{1}{(2+\sqrt{3})^x} = 3 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow (2+\sqrt{3})^{4x} - 3(2+\sqrt{3})^{3x} - 2(2+\sqrt{3})^{2x} - 3(2+\sqrt{3})^x + 1 = 0. \quad (*)
 \end{aligned}$$

Полученное уравнение ( \* ) является возвратным 4-й степени по отношению к  $(2+\sqrt{3})^x$ . Сделаем замену переменных:

$t = (2+\sqrt{3})^x > 0$ . Тогда ( \* ) примет вид:

$$t^4 - 3t^3 - 2t^2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 \left( t^2 - 3t - 2 - \frac{3}{t} + \frac{1}{t^2} \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t^2 \left( \left( t + \frac{1}{t} \right)^2 - 3 \left( t + \frac{1}{t} \right) - 4 \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t + \frac{1}{t} = 4 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \pm \sqrt{3} \Rightarrow x = \pm 1, \\ t + \frac{1}{t} = -1 \Rightarrow \emptyset (t > 0). \end{cases} \blacktriangleleft$$

21.  $\{1; 1,5\}$ , 3, 25.

22.  $\left\{1; -\frac{1}{3}\right\}$ , 2.

$$\begin{aligned}
 & \blacktriangleright 4^{\sqrt{3x^2-2x}+1} + 2 = 9 \cdot 2^{\sqrt{3x^2-2x}} \Leftrightarrow 4 \cdot 2^{2\sqrt{3x^2-2x}} - 9 \cdot 2^{\sqrt{3x^2-2x}} + 2 = 0 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow 4 \left( 2^{\sqrt{3x^2-2x}} \right)^2 - 9 \left( 2^{\sqrt{3x^2-2x}} \right) + 2 = 0 \Leftrightarrow \left( 2^{\sqrt{3x^2-2x}} - 2 \right) \left( 2^{\sqrt{3x^2-2x}} - \frac{1}{4} \right) = 0 \Leftrightarrow
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3x^2-2x} = 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 1 = 0, \\ \sqrt{3x^2-2x} = -2 \Leftrightarrow \emptyset \end{cases} \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 2}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow 3 \left( 1 - \frac{1}{3} \right) = 2. \blacktriangleleft$$

## § 4. Разные уравнения

1.  $-1$ . 2.  $-1$ . 3.  $\pm \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$ .

4.  $1; \log_2(\sqrt{6} - 2)$ .

► Пусть  $t = 2^{2x} + 4 \cdot 2^x, \quad t > 0$ , тогда уравнение примет вид системы:

$$\begin{cases} t + 4 + \frac{24}{t} = 18, \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - 14t + 24 = 0 \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 7 \pm 5, \Leftrightarrow \begin{cases} t = 12, \\ t = 2. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2^{2x} + 4 \cdot 2^x = 12, \\ 2^{2x} + 4 \cdot 2^x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 2 \Leftrightarrow x = 1, \\ 2^x = \sqrt{6} - 2 \Leftrightarrow x = \log_2(\sqrt{6} - 2). \end{cases} \blacktriangleleft$$

5.  $0, -\log_{\frac{3}{2}} 13$ .

► Это более сложное уравнение. Оно является однородным относительно  $3^x$  и  $2^x$ . Такое уравнение приведётся к уравнению с одной переменной, равной отношению  $3^x$  и  $2^x$ , если уравнение разделить на старшую степень  $3^x$  или  $2^x$  (желательно делить на старшую степень  $2^x$ , чтобы основание новой переменной было больше 1):

$$\begin{aligned} 8^x - 13 \cdot 4^x 3^x - 2^x 9^x + 13 \cdot 3^{3x} &= 0 \Leftrightarrow 2^{3x} - 13 \cdot 2^{2x} 3^x - 2^x 3^{2x} + 13 \cdot 3^{3x} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2^{3x} \left( 1 - 13 \cdot \left( \frac{3}{2} \right)^x - \left( \frac{3}{2} \right)^{2x} + 13 \left( \frac{3}{2} \right)^{3x} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (*)$$

Сделаем замену переменных. Пусть  $\left( \frac{3}{2} \right)^x = t, \quad t > 0$ , тогда уравнение (\*) примет вид:

$$\begin{cases} t > 0, \\ 13t^3 - t^2 - 13t + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > 0, \\ (t^2 - 1)(13t - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1, \\ t = \frac{1}{13}. \end{cases}$$

Возвращаемся к старой переменной:

$$\begin{cases} \left(\frac{3}{2}\right)^x = 1, \\ \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{1}{13} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = -\log_{\frac{3}{2}} 13. \end{cases} \blacktriangleleft$$

6.  $1, -\frac{\lg b}{\lg a}.$

$$\blacktriangleright ba^x = a \cdot b^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow \lg b + x \lg a = \lg a + \frac{1}{x} \lg b \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 \lg a + x(\lg b - \lg a) - \lg b = 40 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-(\lg b - \lg a) \pm \sqrt{(\lg b - \lg a)^2 + 4 \lg b \cdot \lg a}}{2 \lg a} =$$

$$= \frac{-(\lg b - \lg a) \pm (\lg b + \lg a)}{2 \lg a} = \begin{cases} x = 1, \\ x = -\frac{\lg b}{\lg a}. \end{cases} \blacktriangleleft$$

7.  $\{-1, 2\}, 5.$

$$\blacktriangleright \text{ОДЗ: } \begin{cases} x + 2 > 0, \\ 2x^2 + 3x + 2 > 0. \end{cases}$$

$$9^{\frac{\log_1(x+2)}{3}} = 7^{\frac{\log_1(2x^2+3x+2)}{7}} \Leftrightarrow 3^{-2\log_3(x+2)} = 7^{-\log_7(2x^2+3x+2)} \stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow}$$

$$\stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{1}{2x^2+3x+2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - x - 2}{(x+2)^2(2x^2+3x+2)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ x = -1 \end{cases} \in \text{ОДЗ}. \blacktriangleleft$$

8.  $500 \cdot 8^x = 8 \cdot 5^{\frac{1}{x}}.$

$$\blacktriangleright 500 \cdot 8^x = 8 \cdot 5^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow 5^3 2^2 2^{3x} = 2^3 5^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{3x-1} = 5^{\frac{1}{x}-3} \Leftrightarrow (3x-1)\log_5 2 = \frac{1}{x} - 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 \log_5 2 - x(\log_5 2 - 3) - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\log_5 2 - 3 \pm (\log_5 2 + 3)}{6 \log_5 2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}, \\ x = -\log_2 5. \end{cases} \blacktriangleleft$$

$$9. \frac{1}{3}, \frac{5}{3}.$$

$$\blacktriangleright x + 27^{2,5(\log_9 \sqrt[3]{x})} = \frac{10}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + 3^{7,5 \left| \frac{2 \log_3 x}{15} \right|} = \frac{10}{3} \Leftrightarrow x + 3^{\left| \log_3 x \right|} = \frac{10}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1, \\ x = \frac{5}{3}; \\ 0 < x < 1, \\ x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3}, \\ x = \frac{1}{3}. \end{cases} \blacktriangleleft$$

$$10. \pm \frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\blacktriangleright 2^{2^{\cos^2 x}} + 2^{2^{\frac{\cos 2x}{2}}} = 2^{1+\sqrt[4]{2}} \Leftrightarrow 2^{2^{\cos^2 x}} + 2^{2^{\frac{1-\cos^2 x}{2}}} = 2^{1+\sqrt[4]{2}}.$$

Пусть  $t = 2^{\cos^2 x} > 0$ , тогда уравнение примет вид:

$$2^t + 2^{\frac{\sqrt{2}}{t}} \geq 2 \cdot 2^{\frac{t}{2}} \cdot 2^{\frac{\sqrt{2}}{2t}} = 2 \cdot 2^{\frac{t^2 + \sqrt{2}}{2t}} = 2 \cdot 2^{\frac{(t - \sqrt[4]{2})^2 + 2\sqrt[4]{2}t}{2t}} \geq 2 \cdot 2^{\sqrt[4]{2}} = 2^{1+\sqrt[4]{2}}, \quad \text{причём}$$

равенство, как видно, имеет место тогда и только тогда, когда  $t = \sqrt[4]{2}$ . (Мы пользовались несколько раз неравенством  $a^2 + b^2 \geq 2ab$ , в котором равенство имеет место только при  $a = b$ .) В старых

$$\text{переменных } 2^{\cos^2 x} = 2^{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow \cos x = \pm \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad \blacktriangleleft$$

$$11. \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\blacktriangleright 2\left(\sqrt{3}\right)^{\sin x + 3\sqrt{1-\cos^2 x}} - 17 \cdot 3^{\sin x} + 33 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot 3^{\frac{\sin x + 3|\sin x|}{2}} - 17 \cdot 3^{\sin x} + 33 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \geq 0, \\ 2 \cdot 3^{2\sin x} - 17 \cdot 3^{\sin x} + 33 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x < 0 \Rightarrow 0 < 3^{\sin x} < 1, \\ 2 \cdot 3^{-\sin x} - 17 \cdot 3^{\sin x} + 33 = 0 \Leftrightarrow 3^{\sin x} = \frac{33 \pm 35}{34} \Rightarrow \emptyset, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \geq 0, \\ 3^{\sin x} = \frac{17 \pm 5}{4}, \end{cases} \Leftrightarrow 3^{\sin x} = 3 \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad \blacktriangleleft$$

12.  $\pi n, n \in \mathbb{Z}; \frac{4}{3}$ .

$$\blacktriangleright 2^{|x-2|\sin x} = (\sqrt{2})^{x|\sin x|} \Leftrightarrow |x-2|\sin x = \frac{1}{2}x|\sin x| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \geq 0, \\ \left(|x-2| - \frac{x}{2}\right)\sin x = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0, \\ \sin x > 0, \\ |x-2| = \frac{x}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x < 0, \\ \left(|x-2| + \frac{x}{2}\right)\sin x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x < 0, \\ |x-2| + \frac{x}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ \sin x > 0, \quad x \geq 0, \\ \begin{cases} x-2 = \frac{x}{2} \Leftrightarrow x=4 \Rightarrow \sin 4 < 0, \\ x-2 = -\frac{x}{2} \Leftrightarrow x=\frac{4}{3} \Rightarrow \sin \frac{4}{3} > 0; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{4}{3}. \end{cases} \quad \blacktriangleleft$$

$$\begin{cases} \sin x < 0, \quad x \leq 0, \\ -x+2+\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow x=4 \Rightarrow \emptyset \end{cases}$$

$$13. \pm \operatorname{arccctg} \frac{1}{\sqrt{2}} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\blacktriangleright 10 \cdot 4^{\frac{1}{\sin^2 x}} - 16 = 4^{2 \operatorname{ctg}^2 x + 2} \Leftrightarrow 10 \cdot 4^{1 + \operatorname{ctg}^2 x} - 16 = 4^{2 \operatorname{ctg}^2 x + 2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot 4^{2 \operatorname{ctg}^2 x} - 5 \cdot 4^{\operatorname{ctg}^2 x} + 2 = 0 \Leftrightarrow 4^{\operatorname{ctg}^2 x} = \begin{cases} 2, \\ \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^{2 \operatorname{ctg}^2 x} = 2 \\ 2^{2 \operatorname{ctg}^2 x} = 2^{-1} \Leftrightarrow \emptyset \end{cases} \Leftrightarrow \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \operatorname{ctg} x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \operatorname{arccctg} \frac{1}{\sqrt{2}} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \blacktriangleleft$$

$$14. \log_3 6.$$

$$\blacktriangleright \sqrt{(4 - 3^x)^2} + \sqrt{(3^x - 6)(3^x + 9)} = 3^x - 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (3^x - 4) + \sqrt{(3^x - 6)(3^x + 9)} = 3^x - 4 \Leftrightarrow 3^x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \log_3 6. \blacktriangleleft$$

$$15. \log_6 11.$$

$$\blacktriangleright \sqrt{(3 - 6^x)^2} + \sqrt{(6^x + 6)(11 - 6^x)} = 6^x - 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6^x - 3 + \sqrt{(6^x + 6)(11 - 6^x)} = 6^x - 3 \Leftrightarrow 6^x = 11 \Leftrightarrow x = \log_6 11. \blacktriangleleft$$

$$16. 1.$$

$$\blacktriangleright 4\sqrt{(x - 3)^2} + \sqrt{4^x - 34 \cdot 2^x + 64} = 12 - 4x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4(3 - x) + \sqrt{4^x - 34 \cdot 2^x + 64} = 12 - 4x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 - x \geq 0, \\ 4^x - 34 \cdot 2^x + 64 = 0 \Leftrightarrow 2^x = 17 \pm 15 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1. \blacktriangleleft$$

## Глава II. Уравнения, содержащие логарифм с постоянным основанием

### § 2. Упрощение выражений, содержащих логарифмы

1. -9. 2. 7. 3. 16. 4. 16. 5. -0,9. 6. -1.

7. 2,2.

► Перейдём всюду к основанию 4:

$$\begin{aligned} 2,2 \left( \frac{\log_4 36}{\log_{36} 4} - \frac{\log_4 144}{\log_9 4} \right) &= 2,2 \left( \frac{\log_4 36}{\frac{1}{\log_4 36}} - \frac{1 + \log_4 36}{\frac{1}{\log_4 9}} \right) = \\ &= 2,2 (\log_4^2 36 - \log_4 9 - \log_4 36 \cdot \log_4 9) = \\ &= 2,2 (\log_4 36 (\log_4 36 - \log_4 9) - \log_4 9) = 2,2 (\log_4 36 - \log_4 9) = 2,2. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

8. -3. 9. 6. 10. 3. 11. 3. 12. 9. 13. 7. 14. 2.

15. 5.

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \sqrt{9^{(\log_4 3)^{-1}} + (\log_3 7^{3 \log_7 3})^2} &= \\ = \sqrt{3^{2(\log_3 4)} + (3 \log_7 3 \cdot \log_3 7)^2} &= \sqrt{16 + 9} = 5. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

16. 4. 17. -1,5. 18. 17. 19. 1,5.

### § 3. Множество значений показательных и логарифмических функций

1.  $\left[ \frac{1}{2}; +\infty \right)$ . 2.  $(-\infty; 0]$ . 3.  $(-\infty; 0) \cup \left[ \frac{1}{3}; +\infty \right)$ .

4.  $\left[ \frac{1}{3}; 3 \right]$ .

► Известно, что  $\sin x$  на числовой оси (или на любом отрезке длины  $2\pi$ ) принимает все значения из отрезка  $[-1; 1]$ , поэтому

$y(x) = 3^{\sin x}$ , как сложная непрерывная функция  $y(x) = f(g(x))$ , где  $z = g(x) = \sin x$ ,  $f(z) = 3^z$ , принимает все значения из отрезка  $[3^{-1}; 3]$ . ◀

5.  $[-2; +\infty)$ .

► Заметим, что  $D(y): 4 - x^2 > 0$ , а так как  $x^2 \geq 0$ , то

$$0 < 4 - x^2 \leq 4.$$

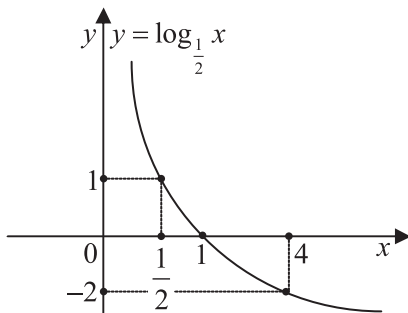


Рис.12

Из графика (рис. 12) видно, что при изменении аргумента логарифма от 0 до 4 логарифм пробегает все значения из промежутка  $[-2; +\infty)$ . А это и означает, что  $E(y) = [-2; +\infty)$ . ◀

6.  $(-\infty; +\infty)$ . 7.  $[0; +\infty)$ . 8.  $(0; 1]$ . 9.  $[0, 5; 2]$ .

10.  $(-\infty; 2]$ .

► Замечаем, что под знаком логарифма стоит квадратный трёхчлен  $f(x) = (x-1)(5-x) \equiv -x^2 + 6x - 5 \equiv -(x-3)^2 + 4$ . Отсюда следует, что  $-\infty < f(x) \leq 4$ . Но логарифм существует только для положительных

чисел, т.е. для тех, для которых  $0 < f(x) \leq 4$ , поэтому

$$-\infty < \log_2 (x-1)(5-x) \leq \log_2 4 = 2. \quad \blacktriangleleft$$

$$11. \left[ -\log_2 6 \frac{1}{4}; +\infty \right). \quad 12. (-\infty; 1]. \quad 13. (-\infty; -2]. \quad 14. [-1; +\infty).$$

$$15. (-\infty; 0) \cup \left[ \frac{1}{2}; +\infty \right).$$

$$\blacktriangleright 16x - 12 - 4x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in (1; 3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+1 > 0, \\ x-5 < 0 \end{cases} \Rightarrow |x+1| + |x-5| = x+1 - (x-5) \equiv 6 \Rightarrow \frac{|x+1| + |x-5|}{3} \equiv 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \log_{(16x-12-4x^2)} \left( \frac{|x+1| + |x-5|}{3} \right) = \frac{1}{\log_2 (4 - 4(x-2)^2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E(y) = (-\infty; 0) \cup \left[ \frac{1}{2}; +\infty \right). \quad \blacktriangleleft$$

$$16. \left( -\infty; -\frac{1}{2} \right] \cup (0; +\infty).$$

$$\blacktriangleright 2x + 8 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-2; 4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+4 > 0, \\ x+3 > 0 \end{cases} \Rightarrow |x+4| - |x+3| = x+4 - x-3 \equiv 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{|x+4| - |x+3|}{3} \equiv \frac{1}{3} \Rightarrow y = \log_{(2x+8-x^2)} \left( \frac{|x+4| - |x+3|}{3} \right) =$$

$$= -\frac{1}{\log_3 (9 - (x-1)^2)} \Rightarrow E(y) = \left( -\infty; -\frac{1}{2} \right] \cup (0; +\infty). \quad \blacktriangleleft$$

## § 4. Преобразование буквенных выражений

$$1. 2. \quad 2. 50. \quad 3. 25.$$

$$4. 0,16.$$

$$\blacktriangleright \left( \log_{13} b^{\frac{2}{5} \log_b 13} \right)^2 = \left( \frac{2}{5} \log_b 13 \cdot \log_{13} b \right)^2 = \frac{4}{25} = 0,16. \quad \blacktriangleleft$$

5. 27.

$$\blacktriangleright \left( \log_{144} b^{\frac{2}{3} \log_b 12} \right)^{-3} = \left( \frac{2}{3} \log_b 12 \cdot \frac{\log_{12} b}{2} \right)^{-3} = 27. \blacktriangleleft$$

6. 64.

$$\blacktriangleright \left( \log_{11} b^{4 \log_b 11} \right)^3 = \left( 4 \log_b 11 \cdot \log_{11} b \right)^3 = \left( 4 \frac{1}{\log_{11} b} \cdot \log_{11} b \right)^3 = 64. \blacktriangleleft$$

7. 9.

$$\blacktriangleright \log_a a^3 b^2 = 3 + 2 \log_a b = 9. \blacktriangleleft$$

8. -38.

$$\blacktriangleright \log_{\frac{1}{a^{20}}} a^{\frac{3}{5}} b^{-\sqrt{\frac{5}{7}}} = 20 \left( \frac{3}{5} - \sqrt{\frac{5}{7}} \cdot \frac{\sqrt{35}}{2} \right) = -38. \blacktriangleleft$$

9. -0,5.

$$\blacktriangleright \log_{a^{\sqrt{48}}} a^{\sqrt{3}} b^{-\sqrt{18}} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{18} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}}{\sqrt{48}} = -\frac{1}{2}. \blacktriangleleft$$

10. 0.

$$\blacktriangleright \log_{a^{17}} a^{\sqrt{\frac{3}{5}}} b^{-\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{\frac{3}{5}} - \sqrt{15} \cdot \frac{1}{5}}{17} = 0. \blacktriangleleft$$

11. 0.

$$\blacktriangleright \log_{\left(\frac{\sqrt{a}}{b}\right)} \left( \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}} \right) = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} - 1} = 0. \blacktriangleleft$$

12. 0,2.

$$\blacktriangleright \log_{a\sqrt{b}} \frac{a}{\sqrt{b^3}} = \frac{1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{5} = 0,2. \blacktriangleleft$$

13. 9.

$$\blacktriangleright \log_{\frac{1}{a^2}} a^{\frac{3}{2}} b^{\sqrt{\frac{6}{17}}} = 2 \left( \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{6}{17}} \cdot \sqrt{\frac{51}{2}} \right) = 2 \left( \frac{3}{2} + 3 \right) = 9. \blacktriangleleft$$

14. 14.

$$\blacktriangleright \log_{a^2} a^{17} b^{44} = \frac{17 + 44 \cdot \frac{1}{4}}{2} = 14. \blacktriangleleft$$

15. 5.

$$\blacktriangleright \log_{a^{-1}} a^3 b^{-2} = -\log_a a^3 b^{-2} = -3 + 2 \cdot 3 = 3. \blacktriangleleft$$

16. -2.

17. -2.

$\blacktriangleright$  Так как, по условию,  $\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \cos x \sin x}{\cos 2x} = \frac{3}{4}$ , а  $2 \cos 2x > 0$ , то  $\cos x \sin x > 0 \Rightarrow \cos x \neq 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x$  существует и  $\operatorname{tg} x > 0$ . Поэтому  $\log_{\operatorname{tg} \frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} x = \log_{\sqrt{3}} \operatorname{tg} x$  всегда существует. Найдём  $\operatorname{tg} x$ :

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 3 \operatorname{tg}^2 x + 8 \operatorname{tg} x - 3 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{-4 \pm 5}{3} \stackrel{\operatorname{tg} x > 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{1}{3} \Rightarrow \log_{\operatorname{tg} \frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} x = \log_{\sqrt{3}} \frac{1}{3} = -2. \blacktriangleleft$$

18. 5. 19. 5.

20. 15.

$$\blacktriangleright 3 \left( \log_{xy}^2 x + \log_{\frac{1}{xy}}^2 y \right) = 3 \left( \log_{xy}^2 x + \log_{xy}^2 y \right) =$$

$$= 3 \left( (\log_{xy} x + \log_{xy} y)^2 - 2 \log_{xy} x \log_{xy} y \right) = \\ = 3(1 - 2 \log_{xy} x \log_{xy} y).$$

Так как

$$\log_{\frac{1}{xy}} y = \log_{\sqrt{x}}(xy) \Leftrightarrow -\log_{xy} y = \frac{1}{\log_{xy} \sqrt{x}} \Leftrightarrow -\log_{xy}(y) = \frac{2}{\log_{xy} x} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log_{xy}(y) \log_{xy} x = -2, \\ \text{то } 3(1 - 2 \log_{xy} x \log_{xy} y) = 15. \blacktriangleleft$$

## 21. 1.

► Обозначим искомое число буквой  $t$ . Тогда

$$18 \log_{(x^5 y^2 z)} \left( \frac{\sqrt[3]{x^2 y}}{z} \right) = \log_{(x^5 y^2 z)} \left( \frac{\sqrt[3]{x^2 y}}{z} \right)^{18} = t \Leftrightarrow \left( \frac{\sqrt[3]{x^2 y}}{z} \right)^{18} = (x^5 y^2 z)^t, \text{ а} \\ 18 \log_{(x^2 y^5 z)} \left( \frac{\sqrt{xy}}{z} \right) = \log_{(x^2 y^5 z)} \left( \frac{\sqrt{xy}}{z} \right)^{18} = t \Leftrightarrow \left( \frac{\sqrt{xy}}{z} \right)^{18} = (x^2 y^5 z)^t.$$

Разделим одно на другое:

$$\frac{\left( \frac{\sqrt[3]{x^2 y}}{z} \right)^{18}}{\left( \frac{\sqrt{xy}}{z} \right)^{18}} = \frac{(x^5 y^2 z)^t}{(x^2 y^5 z)^t} \Leftrightarrow \frac{\left( \sqrt[3]{x^2 y} \right)^{18}}{(\sqrt{xy})^{18}} = \frac{(x^5 y^2)^t}{(x^2 y^5)^t} \Leftrightarrow \left( \frac{x^4 y^2}{x^3 y^3} \right)^3 = \left( \frac{x^5 y^2}{x^2 y^5} \right)^t \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^3 y^{-3} = (x^3 y^{-3})^t \Leftrightarrow t = 1 \text{ (т. к. } x \neq y) \blacktriangleleft$$

## § 5. Простейшие логарифмические уравнения

1. 25. 2.  $\left\{ \frac{3}{2}; -3 \right\}, -4, 5$ . 3.  $\{-2\}$ . 4.  $\{2; 4\}, 10$ .

5.  $\{2\}$ .

► Воспользуемся (УР Л4):

$$\lg(x^2 + 6x) = \lg(5x + 6) \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 6 > 0, \\ x^2 + 6x = 5x + 6 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2. \blacktriangleleft$$

6.  $\{1\}$ . 7.  $\{-9\}$ .

8.  $\{2\}$ .

► Воспользуемся (УР Л 5):

$$\log_3(3^x - 8) = 2 - x \Leftrightarrow 3^x - 8 = 3^{2-x} \Leftrightarrow x = 2. \blacktriangleleft$$

9.  $\left\{-\frac{3}{5}; 3\right\}, -1, 8$ .

►  $\left(\frac{1}{27} - 3^{6-x^2}\right) \log_2(4 + 5x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 + 5x = 1, \\ 4 + 5x > 0, \\ \frac{1}{27} - 3^{6-x^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{5}, \\ 4 + 5x > 0, \\ -3 = 6 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{5}, \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow x_1 x_2 = -1, 8. \blacktriangleleft$$

10.  $\{4\}$ .

► Воспользуемся (УР Л 4):

$$\log_7\left(2^x - 3 \cdot 2^{\frac{x}{2}}\right) = \log_7\left(3 \cdot 2^{\frac{x}{2}} - 8\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \cdot 2^{\frac{x}{2}} - 8 > 0, \\ 2^x - 3 \cdot 2^{\frac{x}{2}} = 3 \cdot 2^{\frac{x}{2}} - 8 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4. \blacktriangleleft$$

11.  $\{2\}$ . 12.  $\{7\}$ .

## § 6. Замена переменных в логарифмических уравнениях

1.  $\{27\}$ . 2.  $\{64\}$ . 3.  $\left\{64; \frac{1}{64}; 4, 8\right\}$ , 32. 4.  $\left\{\frac{1}{125}; 5\right\}$ , 0,04. 5.  $\{2\}$ .

6.  $\{64\}$ .

7.  $\{10; 1000\}, 10000$ .

►  $\sqrt{(\lg x)^3 - 5 \lg x + 13} = \lg x + 2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lg x + 2 \geq 0, \\ (\lg x)^3 - 5\lg x + 13 = (\lg x)^2 + 4\lg x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lg x + 2 \geq 0, \\ (\lg x)^3 - (\lg x)^2 - 9\lg x + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg x + 2 \geq 0, \\ ((\lg x)^2 - 9)(\lg x - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lg x = 1, \\ \lg x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10, \\ x = 1000. \end{cases} \blacktriangleleft$$

8.  $\{4\}$ .

$$\blacktriangleright \sqrt{(\log_2 t)^2 \log_2 2t - \log_2 64t} = \log_2 t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 t \geq 0, \\ (\log_2 t)^2 \log_2 2t - \log_2 64t = (\log_2 t)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 t \geq 0, \\ (\log_2 t)^3 - \log_2 t - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 t \geq 0, \\ (\log_2 t - 2)((\log_2 t)^2 + 2\log_2 t + 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2 t = 2 \Leftrightarrow t = 4. \blacktriangleleft$$

## § 7. ОДЗ и логарифмические уравнения.

### Задачи-«ловушки»

1.  $\left\{-2 - \sqrt{5}; \sqrt{\frac{7}{3}}\right\}$ . 2.  $\{2\}$ . 3.  $\{-17; 3\}, -51$ . 4.  $\{-2\}$ . 5.  $\{-3\}$ .

6.  $\{1\}$ . 7.  $\{-11; -1; 5\}, 55$ . 8.  $\{1, 504\}$ .

9.  $\{-12; 4\}, -48$ .

На вид очень простое уравнение. Однако ошибки при решении не являются редкостью. Дело в том, что «камнем преткновения» опять является преобразование  $\log_2(x+4)^2$ . Очень часто школьники неверно пишут, что  $\log_2(x+4)^2 = 2\log_2(x+4)$ , и получают неверный ответ. Они не обращают внимания на то, что при этом сужается ОДЗ уравнения: левая часть определена при  $x+4 \neq 0$ , а правая – при  $x+4 > 0$  – ведь формулы Л7 для логарифма чётной степени в школе нет. На самом деле при решении этой задачи она и не нужна.

$$\blacktriangleright \log_2 (x+4)^2 = 6 \Leftrightarrow (x+4)^2 = 64 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -12, \\ x = 4 \end{cases} \Rightarrow x_1 x_2 = -48. \blacktriangleleft$$

$$10. \{-9\}.$$

$$\blacktriangleright \log_2 x(x+5) + \log_2 \frac{(x+5)}{x} = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+5) > 0, \\ x(x+5) \frac{(x+5)}{x} = 16 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x+5) > 0, \\ x^2 + 10x + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -5 \pm 4 \Leftrightarrow x = -9. \blacktriangleleft$$

$$11. \{2\}.$$

$$\blacktriangleright \log_6 x + \log_6 (x+1) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ \log_6 x(x+1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x^2 + x = 6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x^2 + x - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm 5}{2} \Leftrightarrow x = 2. \blacktriangleleft$$

$$12. \{-6; -4; 2\}, 48.$$

$$\blacktriangleright \text{ОДЗ: } \begin{cases} x > -10, \\ x \neq 0. \end{cases}$$

$$\log_4 (x^2) + \log_2 (x+10) = \log_2 24 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \log_2 (x^2) + \log_2 (x+10) = \log_2 24 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x^2 + 2 \log_2 (x+10) = \log_2 24^2 \stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} x^2 (x+10)^2 = 24^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 10x - 24)(x^2 + 10x + 24) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \pm 7, \\ x = -5 \pm 1 \end{cases} \stackrel{\text{с учётом ОДЗ}}{\Leftrightarrow}$$

$$\stackrel{\text{с учётом ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = 2, \\ x = -4, \\ x = -6 \end{cases} \Rightarrow x_1 x_2 x_3 = 48. \blacktriangleleft$$

$$13. \{-3\}.$$

$$\blacktriangleright \log_2 x(x-4) + \log_2 \frac{x}{(x-4)} = \log_2 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-4) > 0, \\ x^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow x = -3. \blacktriangleleft$$

14.  $\{2, 5\}$ .

$$\blacktriangleright \log_2(5 + 2\sqrt{4x-9}) + \log_{\frac{1}{2}}(13, 5 - 4x) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2(5 + 2\sqrt{4x-9}) - \log_2(13, 5 - 4x) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2(5 + 2\sqrt{4x-9}) = \log_2 2(13, 5 - 4x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5 + 2\sqrt{4x-9} = 27 - 8x \Leftrightarrow \sqrt{4x-9} = 11 - 4x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 11 - 4x \geq 0, \\ 4x - 9 = (11 - 4x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11 - 4x \geq 0, \\ 16x^2 - 92x + 130 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 11 - 4x \geq 0, \\ 8x^2 - 46x + 65 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{23 \pm 3}{8} \Leftrightarrow x = 2, 5. \blacktriangleleft$$

15.  $\{9\}$ .

$$\blacktriangleright \log_2(\sqrt{x} + 5) - \log_2(13 - x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2(\sqrt{x} + 5) = \log_2(26 - 2x) \Leftrightarrow \sqrt{x} + 5 = 26 - 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = -2x + 21 \Leftrightarrow 2(\sqrt{x})^2 + \sqrt{x} - 21 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{-1 \pm 13}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 9. \blacktriangleleft$$

16.  $\{1, 4\}$ .

$$\blacktriangleright \log_2(5 + \sqrt{11 - 5x}) + \log_{\frac{1}{2}}(7 + 5x) = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2(5 + \sqrt{11 - 5x}) - \log_2(7 + 5x) = -\log_2 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2 2(5 + \sqrt{11 - 5x}) = \log_2 (7 + 5x) \Leftrightarrow 2(5 + \sqrt{11 - 5x}) = 7 + 5x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{11 - 5x} = 5x - 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 3 \geq 0, \\ 44 - 20x = 25x^2 - 30x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 3 \geq 0, \\ 25x^2 - 10x - 35 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm 30}{25} \Leftrightarrow x = \frac{7}{5} = 1, 4. \blacktriangleleft$$

$$17. \{-3\}.$$

$$\blacktriangleright \lg(98 - x^3) = 3\lg(2 - x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x > 0, \\ 98 - x^3 = (2 - x)^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x > 0, \\ 98 - x^3 = 8 - 12x + 6x^2 - x^3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x > 0, \\ 6x^2 - 12x - 90 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 - 2x - 15 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm 4 \Leftrightarrow x = -3. \blacktriangleleft$$

$$18. \{-17\}.$$

$$\blacktriangleright 2\log_2 \frac{x-7}{x-1} + \log_2 \frac{x-1}{x+1} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-7}{x-1} > 0, \\ \left(\frac{x-7}{x-1}\right)^2 \left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 1) \cup (7; +\infty), \\ \frac{(x-7)^2}{x^2-1} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = -17. \blacktriangleleft$$

$$19. \{7\}.$$

$$\blacktriangleright \log_7 x + \log_7 (x-3) = \log_7 28 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 > 0, \\ x(x-3) = 28 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3 > 0, \\ x^2 - 3x - 28 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm 11}{2} \Leftrightarrow x = 7. \blacktriangleleft$$

20.  $\{6\}$ .

$$\blacktriangleright \log_{13}(x+5) + \log_{13}(x-4) = \log_{13}(x+16) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-4 > 0, \\ \log_{13}(x+5)(x-4) = \log_{13}(x+16) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-4 > 0, \\ x+16 > 0, \\ (x+5)(x-4) = (x+16) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-4 > 0, \\ x+16 > 0, \\ x^2 - 36 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 6. \blacktriangleleft$$

21.  $\{28\}$ .

$$\blacktriangleright \text{ОДЗ: } x-21 > 0.$$

$$\log_7(x-21) + \log_7(x+28) = \log_7(7x-140) + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_7(x-21) + \log_7(x+28) = \log_7 7(7x-140) \stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow}$$

$$\stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} (x-21)(x+28) = 7(7x-140) \Leftrightarrow x^2 - 42x + 392 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 21 \pm 7 \stackrel{\text{с учётом ОДЗ}}{\Leftrightarrow} x = 28. \blacktriangleleft$$

22.  $\{16\}$ .

$$\blacktriangleright \text{ОДЗ: } x > 8.$$

$$\log_2(x-8) + \log_2(x-4) = \log_2 x + \log_2 6 \stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow}$$

$$\stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} (x-8)(x-4) = 6x \Leftrightarrow x^2 - 18x + 32 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 9 \pm 7 \stackrel{\text{с учётом ОДЗ}}{\Leftrightarrow} x = 16. \blacktriangleleft$$

23.  $\{16\}$ .

$$\blacktriangleright \text{ОДЗ: } x > 9.$$

$$\log_3(x-9) + \log_3(x-4) = \log_3(2x-18) + 1 \stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow}$$

$$\stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} (x-9)(x-4) = 3 \cdot 2(x-9) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-9=0 \Rightarrow \emptyset, \\ x=16 \end{cases} \Leftrightarrow x=16. \blacktriangleleft$$

24.  $\{3\}$ .

$$\blacktriangleright \log_{15}(x-2) + \log_{15}(x+2) = \log_{15} 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 > 0, \\ (x-2)(x+2) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 > 0, \\ x^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow x=3. \blacktriangleleft$$

25.  $\{3\}$ .

$$\blacktriangleright 2\log_7(x-2) - \log_7(x-10)^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 > 0, \\ 49(x-2)^2 = (x-10)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 > 0, \\ (7x-14-x+10)(7x-14+x-10) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 > 0, \\ \begin{cases} x = \frac{2}{3}, \\ x = 3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x=3. \blacktriangleleft$$

26.  $\{3\}$ .

$$\blacktriangleright \log_5(x-2) + \log_5(x+3) = \log_5 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 > 0, \\ \log_5(x-2)(x+3) = \log_5 6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 > 0, \\ x^2 + x - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 > 0, \\ x = \frac{-1 \pm 7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x=3. \blacktriangleleft$$

27.  $\{-0,85\}$ .

$$\begin{aligned}
 & \blacktriangleright \log_7 \frac{x+4}{15} + \log_7 \frac{5}{x+1} = 1 \Leftrightarrow \log_7 \frac{x+4}{15} = 1 - \log_7 \frac{5}{x+1} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 0, \\ \frac{x+4}{15} = \frac{7(x+1)}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+4 > 0, \\ x+4 = 21(x+1) \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x+4 > 0, \\ 20x = -17 \end{cases} \Leftrightarrow x = -0,85. \blacktriangleleft
 \end{aligned}$$

**28.**  $\{1, 4\}$ .

В этом уравнении присутствует «ловушка»: нельзя заменить  $\log_3(x-5)^2$  на  $2\log_3(x-5)$ , потому что в ОДЗ разность  $(x-5)$  может быть как положительной, так и отрицательной.

*Первый способ.*

$\blacktriangleright$  Запишем ОДЗ:  $\begin{cases} x > 1, \\ x \neq 5. \end{cases}$  Тогда

$$\begin{aligned}
 & \log_3(x-5)^2 - 4 = \log_{\sqrt{3}}(x-1) \stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \\
 & \stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \log_3(x-5)^2 - \log_3 81 = \log_3(x-1)^2 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow (x-5)^2 = 81(x-1)^2 \Leftrightarrow (x-5-9x+9)(x-5+9x-9) = 0 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow x = \begin{bmatrix} 0,5, \\ 1,4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x = 1, 4. \blacktriangleleft
 \end{aligned}$$

Заметим, что для найденного решения  $\log_3|x-5| = \log_3(5-x)!$

*Второй способ.*

$\blacktriangleright$  Можно избавиться от квадрата. Но если избавляться от квадрата, то надо воспользоваться формулой Л7:

$$\log_3(x-5)^2 = 2\log_3|x-5|. \text{ Тогда}$$

$$\log_3(x-5)^2 - 4 = \log_{\sqrt{3}}(x-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\log_3|x-5| - 4 = 2\log_3(x-1) \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 > 0, \\ |x-5| = 9(x-1) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 > 0, \\ \begin{cases} x-5 = 9x-9, \Leftrightarrow x=1, 4. \blacktriangleleft \\ x-5 = -9x+9 \end{cases} \end{cases}$$

29.  $\{-2\}$ .

*Первый способ.*

► Освободимся от квадрата под знаком логарифма. В уравнении есть «ловушка»:  $\log_2(x+1)^2 \neq 2\log_2(x+1)$ , а  $\log_2(x+1)^2 = 2\log_2|x+1|$ .

Поэтому

$$\log_2(x+1)^2 + 2\log_2(2-x) = 4 \Leftrightarrow 2\log_2|x+1| + 2\log_2(2-x) = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2|x+1| + \log_2(2-x) = 2 \Leftrightarrow \log_2|x+1|(2-x) = \log_2 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |x+1|(2-x) = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-x > 0, \\ (x+1)^2(2-x)^2 = 4^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-x > 0, \\ (((x+1)(x-2)-4)((x+1)(x-2)+4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-x > 0, \\ (x^2-x-6)(x^2-x+2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x > 0, \\ x = \frac{1 \pm 5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = -2. \blacktriangleleft$$

*Второй способ.*

► Так как перед вторым слагаемым стоит 2, то можно не освобождаться от квадрата, а наоборот, сделать квадрат и во втором слагаемом:

$$\log_2(x+1)^2 + 2\log_2(2-x) = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(x+1)^2 + \log_2(2-x)^2 = \log_2 2^4, \\ 2-x > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x > 0, \\ (x+1)^2(2-x)^2 = 4^2 \end{cases}$$

получили ту же самую систему.  $\blacktriangleleft$

30.  $\{-3\}$ .

Первый способ.

► ОДЗ:  $3 - x > 0$ .

$$\log_2 (x+1)^2 + 2\log_2 (3-x) = 2\log_2 12 \stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow}$$

$$\stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \log_2 (x+1)^2 + \log_2 (3-x)^2 = \log_2 12^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 (x-3)^2 = 12^2 \Leftrightarrow (x^2 - 2x - 3)^2 = 12^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x - 3 + 12)(x^2 - 2x - 3 - 12) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 9)(x^2 - 2x - 15) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 15 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3, \text{ с учётом ОДЗ} \\ x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = -3. \blacktriangleleft$$

Второй способ.

►  $\log_2 (x+1)^2 + 2\log_2 (3-x) = 2\log_2 12 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2\log_2 |x+1| + 2\log_2 (3-x) = 2\log_2 12 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2 |x+1| + \log_2 (3-x) = \log_2 12 \Leftrightarrow \log_2 |x+1|(3-x) = \log_2 12 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |x+1|(3-x) = 12 \Leftrightarrow |x+1|(3-x) = 12 \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x > 0, \\ (x+1)^2 (3-x)^2 = 12^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3-x > 0, \\ (x^2 - 2x + 9)(x^2 - 2x - 15) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3-x > 0, \\ x^2 - 2x - 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \pm 4 \Leftrightarrow x = -3. \blacktriangleleft$$

31.  $\left\{-\frac{17}{5}; 3\right\}, -10, 2$ .

►  $\log_2 (5x+1)^4 = 16 \Leftrightarrow (5x+1)^4 = 2^{16} \Leftrightarrow (5x+1)^2 = 2^8 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (5x+1+16)(5x+1-16) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3, 4, \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow x_1 x_2 = -10, 2. \blacktriangleleft$$

32.  $\{2\}$ .

$$\begin{aligned} & \blacktriangleright x(1 - \lg 5) = \lg(4^x - 12) \Leftrightarrow x(\lg 10 - \lg 5) = \\ & = \lg(4^x - 12) \Leftrightarrow x \lg 2 = \lg(4^x - 12) \Leftrightarrow \lg 2^x = \lg(4^x - 12) \Leftrightarrow 2^x = 4^x - 12 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow (2^x - 4)(2^x + 3) = 0 \Leftrightarrow 2^x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

33.  $\{5\}$ .

*Первый способ* (решение «обычного школьника»).

$$\begin{aligned} & \blacktriangleright \log_2(x+3) + \log_2(x-4) = 3, \quad \log_2(x+3)(x-4) = \log_2 8, \\ & x^2 - x - 12 = 8, \quad x = \frac{1 \pm 9}{2}, \quad x_1 = 5, \quad x_2 = -4. \end{aligned}$$

Немало найдётся таких, кто укажет два корня, потому что многие забывают, что у логарифма есть ОДЗ, и корни в логарифмическом уравнении надо обязательно проверять *подстановкой в уравнение*.

Проверка  $x_1 = 5$ :  $\log_2 8 + \log_2 1 \equiv 3$ ,  $x_2 = -4$ :  $\log_2(-1)$  не существует. Значит, корень один  $x = 5$ .  $\blacktriangleleft$

*Второй способ.*

$$\begin{aligned} & \blacktriangleright \log_2(x+3) + \log_2(x-4) = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4, \\ \log_2(x+3)(x-4) = \log_2 8 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4, \\ (x+3)(x-4) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4, \\ x^2 - x - 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4, \\ x = \frac{1 \pm 9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = 5. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

## § 8. Разные уравнения

1.  $\left\{\frac{4}{3}; 3\right\}$ , 4. 2.  $\{-2\}$ , 4.

3.  $\{2\}$ , 4.

$\blacktriangleright$  Заметим, что левая часть уравнения  $\log_{\frac{1}{3}}\left(1 + (x^2 - 3x + 2)^2\right) \leq 0$ ,

а правая часть  $\sqrt{x^2 - 6x + 8} \geq 0$  в ОДЗ. Поэтому уравнение имеет место тогда и только тогда, когда каждая из частей равна 0, т. е.

$$\log_{\frac{1}{3}} \left( 1 + (x^2 - 3x + 2)^2 \right) = \sqrt{x^2 - 6x + 8} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 0, \\ x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 2, \\ 2^2 - 3 \cdot 2 + 2 \equiv 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x = 4, \\ 4^2 - 3 \cdot 4 + 2 \neq 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow x^2 = 4. \blacktriangleleft$$

$$4. \{ \sqrt{2}; 3 \}, 11.$$

► Это однородное уравнение относительно  $\lg(x+1)$ ,  $\lg(x-1)$ .

Такое уравнение сводится к уравнению с одной переменной делением на любой из входящих в уравнение квадратов.

$$\lg^2(x+1) = \lg(x+1)\lg(x-1) + 2\lg^2(x-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} \lg(x-1) = 0, \\ \lg(x+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \emptyset; \\ \left( \frac{\lg(x+1)}{\lg(x-1)} \right)^2 - \frac{\lg(x+1)}{\lg(x-1)} - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\lg(x+1)}{\lg(x-1)} = \frac{1 \pm 3}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\lg(x+1)}{\lg(x-1)} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 > 0, \\ x+1 = (x-1)^2 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3; \\ \frac{\lg(x+1)}{\lg(x-1)} = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 > 0, \\ x+1 = \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}. \end{cases} \blacktriangleleft$$

$$5. \{-1; 2\}, 5.$$

$$\text{► ОДЗ: } \begin{cases} x+2 > 0, \\ 2x^2 + 3x + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x+2 > 0.$$

$$9^{\frac{\log_1(x+2)}{3}} = 7^{\frac{\log_1(2x^2+3x+2)}{7}} \Leftrightarrow 3^{-2\log_3(x+2)} = 7^{-\log_7(2x^2+3x+2)} \stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow}$$

$$\stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} 3^{-\log_3(x+2)^2} = 7^{-\log_7(2x^2+3x+2)} \Leftrightarrow 3^{\frac{\log_3 1}{(x+2)^2}} = 7^{\frac{\log_7 1}{(2x^2+3x+2)}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{1}{2x^2+3x+2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-x-2}{(x+2)^2(2x^2+3x+2)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2, \\ x=-1. \end{cases} \in \text{ОДЗ}. \blacktriangleleft$$

$$6. \{0, 6; 3\}, 9, 36.$$

$$\blacktriangleright \frac{1}{x} + 27^{2,5|\log_9 \sqrt[3]{x}|} = \frac{10}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{x} + 3^{7,5\left|\frac{2\log_3 x}{15}\right|} = \frac{10}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{x} + 3^{|\log_3 x|} = \frac{10}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1, \\ \frac{1}{x} + x = \frac{10}{3} \Leftrightarrow \frac{3x^2 - 10x + 3}{3x} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm 4}{3}; \\ 0 < x < 1, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{10}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{5}{3} \Leftrightarrow x = \frac{3}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3, \\ x=\frac{3}{5}. \end{cases} \blacktriangleleft$$

$$7. \left\{ \sqrt{\frac{3}{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}, 2.$$

$$\blacktriangleright 2\lg^2\left(1 + \frac{2}{x}\right) - \lg^2\left(1 - \frac{2}{x+2}\right) = \lg^2\left(\frac{2}{3-2x} - 1\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\lg^2\left(\frac{x+2}{x}\right) - \lg^2\left(\frac{x}{x+2}\right) = \lg^2\left(\frac{-1+2x}{3-2x}\right) \Leftrightarrow (\text{учитывая, что}$$

$$\lg \frac{x}{x+2} = -\lg \frac{x+2}{x})$$

$$\Leftrightarrow 2\lg^2\left(\frac{x+2}{x}\right) - \lg^2\left(\frac{x+2}{x}\right) = \lg^2\left(\frac{x+2}{x}\right) = \lg^2\left(\frac{2x-1}{3-2x}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[ \begin{aligned} \lg\left(\frac{x+2}{x}\right) &= \lg\left(\frac{2x-1}{3-2x}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+2}{x} > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -2) \cup (0; +\infty), \\ \frac{x+2}{x} = \frac{2x-1}{3-2x} \Leftrightarrow 2x^2 = 3, \end{cases} & \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{3}{2}}; \\ \lg\left(\frac{x+2}{x}\right) &= -\lg\left(\frac{2x-1}{3-2x}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -2) \cup (0; +\infty), \\ \frac{x+2}{x} = \frac{3-2x}{2x-1} \Leftrightarrow 2x^2 = 1, \end{cases} & \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left[ \begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{3}{2}}, \\ x &= \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \right. \blacktriangleleft$$

8.  $\{1\}, 1$ .

► Замечаем, что при любых  $x$  левая часть

$$1 + \lg^4(x^2 - x + 1) \geq 1,$$

а правая часть  $|\cos((x-1)\cos 2x)| \leq 1$ . Поэтому равенство возможно тогда и только тогда, когда обе части равны 1, т. е. уравнение сводится к системе уравнений с *одним* неизвестным:

$$1 + \lg^4(x^2 - x + 1) = |\cos((x-1)\cos 2x)| \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lg(x^2 - x + 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 1, \\ \cos((x-1)\cos 2x) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 0, \\ \cos((-1)\cos 0) \neq 1; \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1, \\ \cos(0 \cdot \cos 2) = 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow x^2 = 1.$$

$$\Leftrightarrow x = 1 = x^2 = 1. \blacktriangleleft$$

9.  $\{-3\}, 9$ .

$$10. \left[ \frac{1}{6}; +\infty \right).$$

$$\blacktriangleright \left| 1 - \log_{\frac{1}{6}} x \right| + 2 = \left| 3 - \log_{\frac{1}{6}} x \right| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 + \log_6 x = 2 + |1 + \log_6 x|, \\ 3 + \log_6 x = -2 - |1 + \log_6 x| \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |1 + \log_6 x| = 1 + \log_6 x \geq 0, \\ |1 + \log_6 x| = -5 - \log_6 x \geq 0 \Leftrightarrow \emptyset \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{6}. \blacktriangleleft$$

$$11. 2^{4-4\sqrt{2}}.$$

$\blacktriangleright$  В этом примере «плохой» ответ – его трудно подставить в уравнение. Поэтому иногда работать с равносильными преобразованиями очень «выгодно» – нет необходимости проверки. Итак:

$$\log_{0,5} \left( \log_4 \frac{1}{x} \right) + \log_4 \left( \log_2 (16x^2) \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ \log_4 \frac{1}{x} = -\frac{1}{2} \log_2 x > 0, \\ \log_2 16x^2 = 4 + 2 \log_2 x > 0, \\ -\log_2 \left( -\frac{1}{2} \log_2 x \right) + \frac{1}{2} \log_2 (4 + 2 \log_2 x) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -\log_2 \left( -\frac{\log_2 x}{2} \right)^2 + \log_2 (4 + 2 \log_2 x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ \log_2 x < 0, \\ \log_2 x < -2, \\ \log_2^2 x = 16 + 8 \log_2 x \Leftrightarrow \log_2 x = 4 \pm 4\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \log_2 x = 4 - 4\sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 2^{4-4\sqrt{2}}. \blacktriangleleft$$

12.  $7^{\log_2 \frac{-5+\sqrt{41}}{2}}.$

$$\begin{aligned} & \blacktriangleright x^{\log_7 4} + 5 \cdot 2^{\log_7 x} - 4 = 0 \Leftrightarrow 2^{\log_2 x \cdot 2 \log_7 2} + 5 \cdot 2^{\log_7 x} - 4 = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left(2^{\log_7 x}\right)^2 + 5 \cdot 2^{\log_7 x} - 4 = 0 \Leftrightarrow 2^{\log_7 x} = \frac{-5+\sqrt{41}}{2} \Leftrightarrow \log_7 x = \log_2 \frac{-5+\sqrt{41}}{2} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow x = 7^{\log_2 \frac{-5+\sqrt{41}}{2}}. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

13.  $2 + \sqrt{5}.$

$$\begin{aligned} & \blacktriangleright 2 \log_5 (x^2 - 4) + 4 \sqrt{\log_5 (x - 2)^2} - \log_5 (x + 2)^2 = 5 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 > 0, \\ \log_5 (x^2 - 4)^2 + 4 \sqrt{\log_5 (x - 2)^2} - \log_5 (x + 2)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 > 0, \\ \log_5 \frac{(x^2 - 4)^2}{(x + 2)^2} + 4 \sqrt{\log_5 (x - 2)^2} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 > 0, \\ \log_5 (x - 2)^2 + 4 \sqrt{\log_5 (x - 2)^2} = 5 \end{cases} \quad \left( \log_5 (x - 2)^2 = t \right) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow t + 4 \sqrt{t} - 5 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{t} = -2 \pm 3 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 4 > 0, \\ \log_5 (x - 2)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 > 0, \\ (x - 2)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{5}. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

14.  $-1, -4, \frac{-5+\sqrt{41}}{2}.$

$$\blacktriangleright \log_4(x^2) + \log_2(x+5) = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -5, \\ x \neq 0, \\ \frac{1}{2} \log_2(x^2) + \log_2(x+5) = 2 \Leftrightarrow \log_2 x^2 + 2 \log_2(x+5) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -5, \\ x \neq 0, \\ x^2(x+5)^2 = 2^4 \Leftrightarrow (x^2+5x-4)(x^2+5x+4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \begin{cases} -1, \\ -4, \\ \frac{-5+\sqrt{41}}{2}. \end{cases} \blacktriangleleft$$

$$15. \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, k, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\blacktriangleright \text{ОДЗ: } \begin{cases} \sin x > 0, \\ \sin x \neq 1, \\ \cos x \neq 0. \end{cases}$$

$$4^{\lg^2 x} - 4^{\frac{1}{1+\cos 2x}} \cdot \log_{2\sqrt[3]{2}} 4 = -\log_{\sin x} \left( \frac{1 - \cos 2x}{2} \right) \stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} 4^{\lg^2 x} - 4^{\frac{1}{2}(1+\lg^2 x)} \cdot \frac{3}{2} = -2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{2\lg^2 x} - 3 \cdot 2^{\lg^2 x} + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{\lg^2 x} = 2, \\ 2^{\lg^2 x} = 1 \end{cases} \Rightarrow (\text{с учётом ОДЗ})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases} \blacktriangleleft$$

$$16. \frac{\sqrt{13}-1}{2}.$$

$$\blacktriangleright \log_3 x + \log_3(x+1) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ \log_3 x(x+1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x^2 + x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}. \blacktriangleleft$$

17.  $\sqrt{2}, \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$

► ОДЗ:  $\cos 2x \cdot \sin 3x > 0.$

$$(x^2 + 4) \lg(\sin^2 3x) + x^2 \cdot \lg(\cos^2 2x) = 4 \lg(\cos 2x \cdot \sin^3 3x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 (\lg \sin^2 3x + \lg \cos^2 2x) + 4 (\lg \sin^2 3x - \lg(\cos 2x \cdot \sin^3 3x)) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 \lg(\sin 3x \cdot \cos 2x)^2 - 4 \lg(\cos 2x \cdot \sin 3x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}, \\ \lg(\sin 3x \cdot \cos 2x) = 0 \Leftrightarrow \sin 3x \cdot \cos 2x = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sin 5x + \sin x) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \Rightarrow \cos 2\sqrt{2} \cdot \sin 3\sqrt{2} > 0, \\ x = -\sqrt{2} \Rightarrow \cos 2\sqrt{2} \cdot \sin(-3\sqrt{2}) < 0 \Rightarrow \emptyset, \\ \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ \sin 5x = \sin 5\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2}, \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \blacktriangleleft$$

18.  $2^{\frac{19+\sqrt{137}}{8}}.$

►  $\log_2 x = t,$

$$\sqrt{3t+2} = 2t-4 \Leftrightarrow \begin{cases} t-2 \geq 0, \\ 3t+2 = (2t-4)^2 \Leftrightarrow 4t^2 - 19t + 14 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{19 \pm \sqrt{137}}{8} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{19 + \sqrt{137}}{8} \Rightarrow \log_2 x = \frac{19 + \sqrt{137}}{8} \Leftrightarrow x = 2^{\frac{19 + \sqrt{137}}{8}}. \blacktriangleleft$$

19.  $\frac{1}{32}, \frac{1}{\sqrt{128}}.$

► Заметим, что  $\frac{\log_2 \frac{x}{2}}{\log_2 4x}$  и  $\frac{\log_2 4x}{\log_2 \frac{x}{2}}$  взаимно обратны, поэтому

удобно ввести переменную  $t = \frac{\log_2 \frac{x}{2}}{\log_2 4x}$ . В новых переменных

уравнение примет вид :

$$t + \frac{6}{t} - 5 = \frac{t^2 - 5t + 6}{t} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - 5t + 6 = 0, \\ t \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2, \\ t = 3. \end{cases}$$

В старых переменных:

$$\begin{cases} \frac{\log_2 x - 1}{\log_2 x + 2} = 2 \Leftrightarrow \log_2 x = -5 \Leftrightarrow x = \frac{1}{32}, \\ \frac{\log_2 x - 1}{\log_2 x + 2} = 3 \Leftrightarrow \log_2 x = -\frac{7}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2^7}} = \frac{1}{\sqrt{128}}. \end{cases} \blacktriangleleft$$

20.  $10^{-\frac{4}{5}}$ .

►  $\frac{2\lg x + 1}{\lg x - 1} + \frac{\lg x + 1}{2\lg x + 1} = \frac{5\lg x + 4}{(\lg x - 1)(2\lg x + 1)} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{5(\lg x)^2 - \lg x - 4}{(\lg x - 1)(2\lg x + 1)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lg x = \frac{1 \pm 9}{10}, \\ (\lg x - 1)(2\lg x + 1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lg x = -\frac{4}{5} \Leftrightarrow x = 10^{-\frac{4}{5}}. \blacktriangleleft$$

21.  $-\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

►  $\log_4(4\sin^2 2x) = 2 - \log_2(-2\operatorname{tg} x) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \log_2(4\sin^2 2x) = 4 - 2\log_2(-2\operatorname{tg} x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x < 0, \\ \log_2(4\sin^2 2x) + \log_2 \frac{(-2\operatorname{tg} x)^2}{2^4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x < 0, \\ (4\sin^2 2x) \frac{(-2\operatorname{tg} x)^2}{2^4} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x < 0, \\ (\sin^2 2x)(\operatorname{tg} x)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x < 0, \\ 4\sin^4 x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \blacktriangleleft$$

$$22. -\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$23. 9, 3^{-\frac{50}{29}}.$$

$$\blacktriangleright \text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

$$\log_3 \sqrt[10]{x} + \log_3 x^{-3} + \frac{10}{\log_3 x} + \frac{4}{5} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{10} \log_3 x - 3 \log_3 x + \frac{10}{\log_3 x} + \frac{4}{5} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 29 \log_3^2 x - 8 \log_3 x - 100 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x = 2, \\ \log_3 x = -\frac{50}{29} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9, \\ x = 3^{-\frac{50}{29}}. \end{cases} \blacktriangleleft$$

## Глава III. Уравнения, содержащие сложную экспоненту или логарифм с переменным основанием

### § 2. Уравнения, содержащие сложную экспоненту

1.  $\{1; 4\}$ , 17.    2.  $\{1\}$ , 1.    3.  $\{1; 7,5\}$ ; 57,25.

4.  $\{1; 2\}$ , 5.

► Воспользуемся полным условием равносильности (УР П5):

$$x^{x^2+2} = x^{x+4} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ x > 0, \\ x^2 + 2 = x + 4 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 5. \blacktriangleleft$$

*Примечание.* Числа  $-1$  и  $0$  не принято считать решениями данного уравнения, несмотря на то, что они обращают его в тождество. Однако, если они указаны в ответе, то ошибкой это не считается. Объяснение этого факта лежит за рамками школьной программы. Во избежание таких недоразумений часто просят найти положительные решения уравнения (в нашем пособии это молчаливо подразумевается).

5.  $\left\{ \frac{-1 - \sqrt{233}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{233}}{2} \right\}$ , 117.

► Воспользуемся (УР П5):

$$(x^2 + x - 57)^{3x^2+3} = (x^2 + x - 57)^{10x} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 57 = 1, \\ x^2 + x - 57 > 0, \\ 3x^2 + 3 = 10x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1 \pm \sqrt{233}}{2}, \\ x = \frac{5 \pm 4}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ x = \frac{1}{3} \end{cases} \\ x \in \left( -\infty; \frac{-1 - \sqrt{229}}{2} \right) \cup \left( \frac{-1 + \sqrt{229}}{2}; +\infty \right) \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{233}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 1 - 2(-58) = 117. \blacktriangleleft$$

$$6. \left\{ \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}; \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \right\}, 10.$$

► Воспользуемся условием равносильности (УР П5):

$$(x^2 - 3x + 2)^{2x^2 - 6x + 2} = (x^2 - 3x + 2)^{x^2 - 7x + 3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 1, \\ x^2 - 3x + 2 > 0, \\ 2x^2 - 6x + 2 = x^2 - 7x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 1 = 0, \\ x^2 - 3x + 2 > 0, \\ x^2 + x - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}, \\ x \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty), \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}, \\ \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \frac{17 + \sqrt{5}}{2}. \blacktriangleleft$$

$$7. \left\{ \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}; \frac{-11 \pm \sqrt{177}}{4} \right\}, 39, 25.$$

► Воспользуемся условием равносильности:

$$(4x^2 + 4x - 3)^{\left(x - \frac{1}{2}\right)2x + 2} = (4x^2 + 4x - 3)^{4\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+3) + 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 + 4x - 3 = 1; \\ 4x^2 + 4x - 3 > 0, \\ 2x^2 - x + 2 = 4x^2 + 10x - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 1 = 0; \\ 4x^2 + 4x - 3 > 0, \\ 2x^2 + 11x - 7 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}; \\ x \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right), \Leftrightarrow \\ x = \frac{-11 \pm \sqrt{177}}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \begin{cases} \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}, \\ \frac{-11 \pm \sqrt{177}}{4} \end{cases} \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 39,25. \blacktriangleleft$$

8.  $\{1; 2; 3\}$ , 14.

► Запишем ОДЗ:  $x > 0$ . Воспользуемся (УР П4):

$$x^{x^2-5x+8} = x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, \\ x^2-5x+8=2 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2, \\ x=3 \end{cases} \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 14. \end{cases}$$

*Замечание.* Можно проверить, что  $x=0$  и  $x=-1$  обращают уравнение в тождество. Но эти числа не принято считать решениями уравнения, т. к. они не принадлежат ОДЗ уравнения. О них можно говорить, если стоит задача об отыскании целых решений уравнения – тогда меняется ОДЗ уравнения.  $\blacktriangleleft$

9.  $\{1; 8\}$ , 65.

► ОДЗ:  $x > 0$ . В ОДЗ, в силу (УР П3), прологарифмируем уравнение по основанию 10:

$$x^{\sqrt[3]{x^2}} = (\sqrt{x})^x \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2} \lg x = \frac{x}{2} \lg x \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, \\ x^{\frac{2}{3}} = \frac{x}{2} \Rightarrow x=8 \end{cases} \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 65. \blacktriangleleft$$

10.  $\{2; 3\}$ , 13.

► ОДЗ:  $x-1 > 0$ . В ОДЗ, в силу (УР П4):

$$(x-1)^{x^3-x^2} = (x-1)^{x^2+3x} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=1 \Leftrightarrow x=2, \\ x^3-x^2=x^2+3x \Leftrightarrow x(x-3)(x+1)=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=2, \\ x=3 \end{cases} \Rightarrow x_1^2+x_2^2=13 \quad (x=0 \text{ и } x=-1 \text{ не входят в ОДЗ}). \blacktriangleleft$$

11.  $\{1; 2\}, 5$ .

► ОДЗ:  $x - \frac{1}{2} > 0$ . Сначала немного упростим, а затем воспользуемся (УР П4):

$$2^{\log_{\sqrt{2}}(x-0,5)} + x = x^{0,5x^2} + \cos^4 \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 2^{2\log_2\left(x-\frac{1}{2}\right)} + x = x^{\frac{x^2}{2}} + \frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$$\stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} x^2 - x + \frac{1}{4} + x = x^{\frac{x^2}{2}} + \frac{1}{4} \Leftrightarrow x^2 = x^{\frac{x^2}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1, \\ 2 = \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow x = \pm 2 \end{cases} \stackrel{\text{с учётом ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x=1, \\ x=2 \end{cases} \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 5. \blacktriangleleft$$

**§ 4. Уравнения вида  $\log_{a(x)} f(x) = \log_{a(x)} g(x)$  и  $\log_{a(x)} f(x) = g(x)$**

1.  $\{-0,5; 0,5\}, 0,5$ . 2.  $\{1,5; 12\}; 146,25$ .

3.  $\left\{\frac{1}{4}; 256\right\}, 64$ .

$$\blacktriangleright 2\log_{16} x - \log_x 256 = 3 \Leftrightarrow 2\log_{16} x - \frac{2}{\log_{16} x} = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\log_{16}^2 x - 3\log_{16} x - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{16} x = \frac{3 \pm 5}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{16} x = 2, \\ \log_{16} x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 256, \\ x = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow x_1 x_2 = 64. \blacktriangleleft$$

4.  $\left\{\frac{1}{2}; 4\right\}, 2$ .

$$\blacktriangleright \log_2 x = 1 + \frac{2}{\log_2 x} \Leftrightarrow \log^2_2 x - \log_2 x - 2 = 0 \Leftrightarrow \log_2 x = \frac{1 \pm 3}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x = 1 + 2 \log_x 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 2, \\ \log_2 x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4, \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x_1 x_2 = 2. \blacktriangleleft$$

5.  $\{2; 4\}, 8.$

$$\blacktriangleright \log_2 x + 2 \log_x 2 = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ \log_2 x + \frac{2}{\log_2 x} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 1, \\ \log_2 x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ x = 4 \end{cases} \Rightarrow x_1 x_2 = 8. \blacktriangleleft$$

6. 16.

$$\blacktriangleright \log_2 x - \frac{8}{2 + \log_2 x} = \frac{4}{1 + \log_x 4} \Leftrightarrow \log_2 x + \frac{8}{2 + \log_2 x} = \frac{4}{1 + \frac{2}{\log_2 x}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log^2_2 x - 2 \log_2 x - 8}{2 + \log_2 x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log^2_2 x - 2 \log_2 x - 8 = 0, \\ 2 + \log_2 x \neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x = 4 \Leftrightarrow x = 16. \blacktriangleleft$$

7. 1. 8. 1.

9. -3.

$$\blacktriangleright \text{Запишем ОДЗ: } \begin{cases} 15 - 7x > 0, \\ 3 - x > 0, \\ 3 - x \neq 1. \end{cases} \quad \text{Тогда}$$

$$\log_{81} (15 - 7x) \cdot \log_{(3-x)} 9 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_9 (15 - 7x)}{2} \cdot \frac{1}{\log_9 (3 - x)} = 1 \Leftrightarrow \overset{\text{ОДЗ}}{\log_9 (15 - 7x) = \log_9 (3 - x)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 15 - 7x = (3 - x)^2 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \begin{bmatrix} -3, \text{ с учётом ОДЗ} \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x = -3. \blacktriangleleft$$

10. 16.

$$\blacktriangleright 2\log_x(4+\sqrt{x})=2-\log_{\sqrt{x}}2 \Leftrightarrow \log_x(4+\sqrt{x})=1-\log_x2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_x(4+\sqrt{x})=\log_x\frac{x}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ x\neq 1, \\ 4+\sqrt{x}=\frac{x}{2} \Leftrightarrow x-2\sqrt{x}-8=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}=4 \Leftrightarrow x=16. \blacktriangleleft$$

11. 2.

$$\blacktriangleright \frac{1}{\log_x 2} - \log_2 \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{\frac{1}{\log_2 x}} + \log_2 x = 2 \Leftrightarrow \log_2 x = 1 \Leftrightarrow x = 2. \blacktriangleleft$$

12. 2.

$$\blacktriangleright \log_x(3x-2)=2 \Leftrightarrow \frac{\lg(3x-2)}{\lg x}=2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lg x \neq 0, \\ \lg(3x-2)=2\lg x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg x \neq 0, \\ x>0, \\ 3x-2=x^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lg x \neq 0, \\ x>0, \\ x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow x=\frac{3\pm 1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x=2. \blacktriangleleft$$

13. 1,25.

$$\blacktriangleright \text{ОДЗ: } \begin{cases} \frac{x-1}{|2x-3|} > 0, \\ \frac{x-1}{|2x-3|} \neq 1. \end{cases} \quad \text{Тогда}$$

$$\log_{\frac{x-1}{|2x-3|}}(x-1) = 2 \stackrel{ОДЗ}{\Leftrightarrow} x-1 = \left(\frac{x-1}{|2x-3|}\right)^2 \Leftrightarrow 1 = \frac{x-1}{(2x-3)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2x-3)^2 = x-1 \Leftrightarrow 4x^2 - 13x + 10 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{13 \pm 3}{8} \stackrel{с учетом ОДЗ}{\Leftrightarrow} x = \frac{5}{4}. \blacktriangleleft$$

14. 1.

$$\blacktriangleright \log_{x^2-6x+8}(\log_{2x^2-2x+3}(x^2+2x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x + 8 > 0, \\ x^2 - 6x + 8 \neq 1, \\ \log_{2x^2-2x+3}(x^2+2x) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x + 8 > 0, \\ x^2 - 6x + 8 \neq 1, \\ 2x^2 - 2x + 3 > 0, \\ 2x^2 - 2x + 3 \neq 1, \\ x^2 + 2x = 2x^2 - 2x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ (т. к. } 3^2 - 6 \cdot 3 + 8 < 0 \text{)}. \blacktriangleleft$$

15.  $\{1; 9\}$ , 82.

$$\blacktriangleright 3 \log_{3x} x = 2 \log_{9x} x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3 \log_3 x}{1 + \log_3 x} = \frac{4 \log_3 x}{2 + \log_3 x} \Leftrightarrow \log_3 x \cdot \frac{2 - \log_3 x}{(1 + \log_3 x)(2 + \log_3 x)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ x = 9 \end{cases} \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 82. \blacktriangleleft$$

16.  $\{7; 14\}$ , 245.

*Первый способ.*

$$\blacktriangleright x^{\log_2 \frac{x}{98}} \cdot 14^{\log_2 7} = 1 \Leftrightarrow \log_2 \frac{x}{98} \cdot \log_2 x + \log_2 7 \cdot \log_2 14 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\log_2 x)^2 - \log_2 98 \cdot \log_2 x + \log_2 7 \cdot \log_2 14 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2^2 x - \log_2 x \cdot (\log_2 7 + \log_2 14) + \log_2 7 \cdot \log_2 14 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = \log_2 7, \\ \log_2 x = \log_2 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7, \\ x = 14 \end{cases} \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 245. \blacktriangleleft$$

*Второй способ.*

$$\blacktriangleright x^{\log_2 \frac{x}{98}} \cdot 14^{\log_2 7} = 1 \Leftrightarrow x^{\log_2 \frac{x}{14 \cdot 7}} \cdot 14^{\log_2 7} = 1 \Leftrightarrow x^{\left(\log_2 \frac{x}{14} - \log_2 7\right)} \cdot 14^{\log_2 7} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^{\left(\log_2 \frac{x}{14}\right)} x^{-\log_2 7} \cdot 14^{\log_2 7} = 1 \Leftrightarrow x^{\left(\log_2 \frac{x}{14}\right)} \cdot \left(\frac{14}{x}\right)^{\log_2 7} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\log_2 \frac{x}{14}\right) \log_2 x - \log_2 7 \cdot \log_2 \frac{x}{14} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 \frac{x}{14} = 0, \\ \log_2 x = \log_2 7 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 14, \\ x = 7 \end{cases} \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 245. \blacktriangleleft$$

$$17. \left\{9; \frac{1}{9}\right\}, 1.$$

$\blacktriangleright$  ОДЗ:  $x > 0$ .

$$x^{(\log_3 x)^3 - 3 \log_3 x} = 3^{-3 \log_2 \sqrt{2}^{4+8}} \Leftrightarrow (\log_3^3 x - 3 \log_3 x) \log_3 x = (8-4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\log_3^2 x - 4)(\log_3^2 x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9, \\ x = \frac{1}{9}. \end{cases} \Rightarrow x_1 x_2 = 1. \blacktriangleleft$$

$$18. \{1; 2\}, 5.$$

$$\blacktriangleright \text{ОДЗ: } x - \frac{1}{2} > 0.$$

$$2^{\log_{\sqrt{2}}(x-0,5)} + x = x^{0,5x^2} + \cos^4 \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{2 \log_2 \left(x - \frac{1}{2}\right)} + x = x^{\frac{x^2}{2}} + \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2^{\log_2 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2} + x = x^{\frac{x^2}{2}} + \frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} + x = x^{\frac{x^2}{2}} + \frac{1}{4} \Leftrightarrow x^2 = x^{\frac{x^2}{2}} \Leftrightarrow (\text{в силу (УР ПЗ)})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1, \\ 2=\frac{x^2}{2} \Leftrightarrow x=\pm 2 \end{cases}. \text{ Учтём ОДЗ и получим, что } \begin{cases} x=1, \\ x=2. \end{cases} \blacktriangleleft$$

19.  $\frac{1}{49}$ .

20.  $\frac{1}{25}$ .

$$\blacktriangleright \sqrt{\log_{\sqrt{x}}(5x)} \cdot \log_5 x = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_5 x < 0, \\ \log_{\sqrt{x}}(5x) \cdot \log_5^2 x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_5 x < 0, \\ (1 + \log_5 x) \cdot \log_5 x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_5 x < 0, \\ \log_5^2 x + \log_5 x - 2 = 0 \Leftrightarrow \log_5 x = \frac{-1 \pm 3}{2} \Leftrightarrow \log_5 x = -2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{25}. \end{cases} \blacktriangleleft$$

21.  $4^{\frac{-1-\sqrt{33}}{4}}$ .

22.  $5^{5+2\sqrt{6}}$ .

$$\blacktriangleright \log_x \sqrt{5x^{-1}} \cdot \sqrt{\log_{25} x} = -1 \Leftrightarrow (1 - \log_x 5) \sqrt{\frac{1}{2\log_x 5}} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \log_x 5 > 0, \\ \frac{(1 - \log_x 5)^2}{\log_x 5} = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \log_x 5 > 0, \\ \log_x 5 = 5 \pm 2\sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_x 5 = 5 - 2\sqrt{6} \Leftrightarrow \log_5 x = \frac{1}{5 - 2\sqrt{6}} = 5 + 2\sqrt{6} \Leftrightarrow x = 5^{5+2\sqrt{6}}.$$



Пример тоже коварный – «отвратительный» не проверяемый ответ!  $\blacktriangleleft$

$$23. 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad 24. \left(0; \frac{1}{3}\right) \cup [1; 2) \cup (4; 8].$$

$$25. 2 - \sqrt{2}.$$

$$\blacktriangleright \log_{(1-x)}(3-x) = \log_{(3-x)}(1-x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{(1-x)}(3-x) = \frac{1}{\log_{(1-x)}(3-x)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_{(1-x)}(3-x) = 1 \Leftrightarrow \emptyset, \\ \log_{(1-x)}(3-x) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x > 0, \\ 1-x \neq 1, \\ 3-x = \frac{1}{1-x} \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 - \sqrt{2}. \quad \blacktriangleleft$$

$$26. 1 + \sqrt[7]{10}.$$

$\blacktriangleright$  Прологарифмируем уравнение по основанию 10:

$$x^{4\lg(x-1)} \cdot (x-1)^{3\lg x} = x \Leftrightarrow 4\lg(x-1)\lg x + 3\lg x \cdot \lg(x-1) = \lg x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lg x (7\lg(x-1) - 1) = 0 \Leftrightarrow 7\lg(x-1) - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 + \sqrt[7]{10}. \quad \blacktriangleleft$$

$$27. \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right).$$

$\blacktriangleright$   Очень разные левая и правая части – поэтому надо думать, что делать. Заметим, что

$$\log_{3^{\sqrt{x+y}}} 3^{\sqrt{x+y}} \left(1 + \frac{\sqrt{y\sqrt{x}+1}}{3^{\sqrt{x+y}}}\right) \equiv 1 + \log_{3^{\sqrt{x+y}}} \left(1 + \frac{\sqrt{y\sqrt{x}+1}}{3^{\sqrt{x+y}}}\right) \geq 1,$$

а  $2^{-\sqrt{x-y-2\sqrt{x}}} \leq 1$ . Поэтому

$$\log_{3^{\sqrt{x+y}}} \left(3^{\sqrt{x+y}} + \sqrt{y\sqrt{x}+1}\right) = 2^{-\sqrt{x-y-2\sqrt{x}}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + \log_{3^{\sqrt{x+y}}} \left(1 + \frac{\sqrt{y\sqrt{x}+1}}{3^{\sqrt{x+y}}}\right) = 2^{-\sqrt{x-y-2\sqrt{x}}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_{3^{\sqrt{x+y}}} \left( 1 + \frac{\sqrt{y\sqrt{x}+1}}{3^{\sqrt{x+y}}} \right) = 0, \\ 2^{-\sqrt{x-y-2\sqrt{x}}} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y > 0, \\ y\sqrt{x}+1=0, \\ x-y-2\sqrt{x}=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y > 0, \\ (x-2\sqrt{x})\sqrt{x}+1=0, \\ x-y-2\sqrt{x}=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y > 0, \\ (\sqrt{x}-1) \left( \sqrt{x} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \left( \sqrt{x} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) = 0, \\ x-y-2\sqrt{x}=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=1, \\ y=-1, \\ x+y=0 \Rightarrow \emptyset; \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \\ y = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \\ x+y=2 > 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, y = \frac{1-\sqrt{5}}{2}. \blacktriangleleft$$

**28.**  $\log_3 4, 4$ .

$$\blacktriangleright \log_{(19-x^2)} (3^x - 12 + 4 \cdot 3^{2-x}) = \log_{(x-1)} (3^x - 12 + 4 \cdot 3^{2-x}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\lg(3^x - 12 + 4 \cdot 3^{2-x})}{\lg(19-x^2)} = \frac{\lg(3^x - 12 + 4 \cdot 3^{2-x})}{\lg(x-1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\lg(3^x - 12 + 4 \cdot 3^{2-x}) (\lg(x-1) - \lg(19-x^2))}{\lg(19-x^2) \cdot \lg(x-1)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 19-x^2 > 0, 19-x^2 \neq 1, \\ x-1 > 0, x-1 \neq 1, \\ 3^x - 12 + 4 \cdot 3^{2-x} = 1, \\ x-1 = 19-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 19-x^2 > 0, 19-x^2 \neq 1, \\ x-1 > 0, x \neq 2, \\ 3^{2x} - 13 \cdot 3^x + 36 = 0 \Leftrightarrow 3^x = \frac{13 \pm 5}{2}, \Leftrightarrow \\ x^2 + x - 20 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm 9}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = 4, \\ x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log_3 4, \\ x = 4. \end{cases} \blacktriangleleft$$

29.  $-\log_4 3, 3$ .

$$\blacktriangleright \text{ОДЗ: } \begin{cases} 13-x^2 > 0, 13-x^2 \neq 1, \\ x+1 > 0, x+1 \neq 1, \\ 3 \cdot 4^{x+2} - 18 + 4^{-x} > 0. \end{cases}$$

$$\log_{13-x^2} (3 \cdot 4^{x+2} - 18 + 4^{-x}) = \log_{x+1} (3 \cdot 4^{x+2} - 18 + 4^{-x}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\lg(3 \cdot 4^{x+2} - 18 + 4^{-x})}{\lg(13-x^2)} = \frac{\lg(3 \cdot 4^{x+2} - 18 + 4^{-x})}{\lg(x+1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lg(3 \cdot 4^{x+2} - 18 + 4^{-x}) \frac{(\lg(x+1) - \lg(13-x^2))}{\lg(13-x^2)\lg(x+1)} = 0 \stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow}$$

$$\stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 3 \cdot 4^{x+2} - 18 + 4^{-x} = 1, \\ \lg(x+1) - \lg(13-x^2) = 0 \end{cases} \stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 48 \cdot 4^{2x} - 19 \cdot 4^x + 1 = 0, \\ x+1-13+x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4^x = \frac{19 \pm 13}{96}, \\ x = \frac{-1 \pm 7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4^x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = -\log_4 3, \\ 4^x = \frac{1}{16} \Leftrightarrow x = -2 \Rightarrow x+1 < 0 \Rightarrow \emptyset, \\ x = -4 \Rightarrow 13-x^2 < 0 \Rightarrow \emptyset, \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\log_4 3, \\ x = 3. \end{cases} \blacktriangleleft$$

# Оглавление

|                                                                                                              |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Введение .....                                                                                               | 3  |
| <b>Часть I</b>                                                                                               |    |
| <b>Глава I. Уравнения, содержащие показательные функции с постоянным основанием</b>                          |    |
| §1. Основные формулы для показательной функции. ....                                                         | 5  |
| §2. Показательные уравнения.....                                                                             | 8  |
| §3. Замена переменных в уравнении,<br>содержащем показательную функцию .....                                 | 10 |
| §4. Разные уравнения .....                                                                                   | 15 |
| <b>Глава II. Уравнения, содержащие логарифм с постоянным основанием</b>                                      |    |
| §1. Основные формулы для логарифмической функции. ....                                                       | 19 |
| §2. Упрощение выражений, содержащих логарифмы.....                                                           | 23 |
| §3. Множество значений показательных<br>и логарифмических функций. ....                                      | 27 |
| §4. Преобразование буквенных выражений.....                                                                  | 29 |
| §5. Простейшие логарифмические уравнения .....                                                               | 35 |
| §6. Замена переменных в логарифмических уравнениях.....                                                      | 39 |
| §7. ОДЗ и логарифмические уравнения. Задачи-«ловушки».....                                                   | 43 |
| §8. Разные уравнения .....                                                                                   | 52 |
| <b>Глава III. Уравнения, содержащие сложную экспоненту или логарифм с переменным основанием</b>              |    |
| §1. Сложная экспонента $y(x) = a(x)^{f(x)}$ .<br>Определение. Область определения и множество значений. .... | 56 |
| §2. Уравнение $a(x)^{f(x)} = a(x)^{g(x)}$ . ....                                                             | 60 |
| §3. Логарифм с переменным основанием.<br>Определение. Область определения. ....                              | 63 |
| §4. Уравнения вида $\log_{a(x)} f(x) = \log_{a(x)} g(x)$ и $\log_{a(x)} f(x) = g(x)$ ....                    | 64 |
| <b>Часть II</b>                                                                                              |    |
| Ответы и решения.....                                                                                        | 74 |