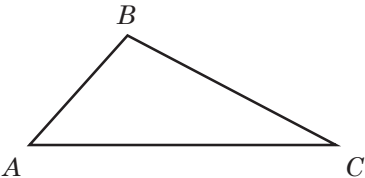
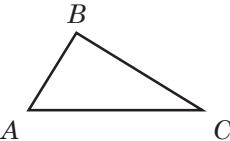
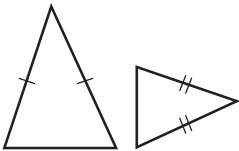
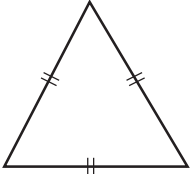
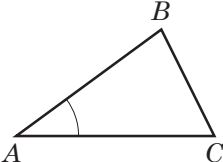
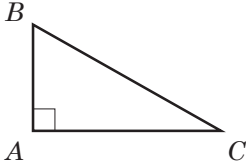
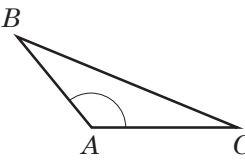


1. ПЛАНИМЕТРИЯ

Треугольник

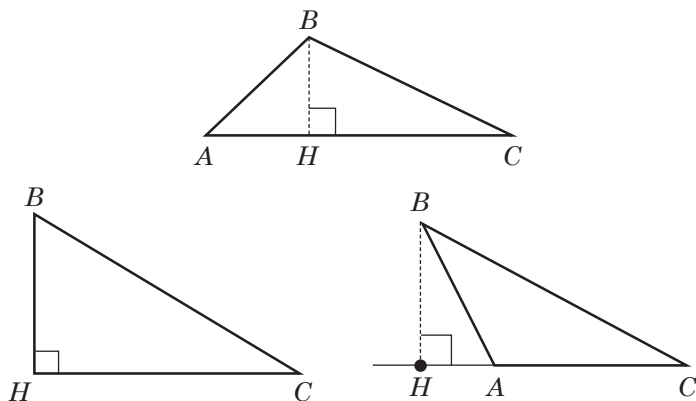
Треугольник — фигура, состоящая из трёх точек, не лежащих на одной прямой, и трёх отрезков, которые их попарно соединяют	 $\triangle ABC$, A, B, C — вершины; AB, BC, AC — стороны
---	--

В зависимости от соотношения сторон выделяют такие виды треугольников:		
		
разносторонний — все его стороны разные	равнобедренный — равны две стороны	равносторонний (правильный) — все стороны равны

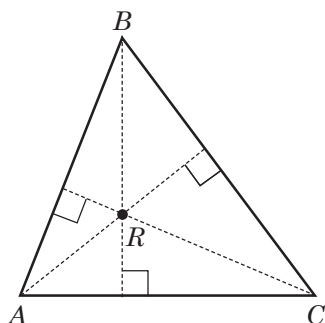
В зависимости от соотношения углов выделяют такие виды треугольников:		
		
остроугольный	прямоугольный	тупоугольный

Высота, медиана, биссектриса,
средняя линия треугольника,
серединный перпендикуляр к сторонам

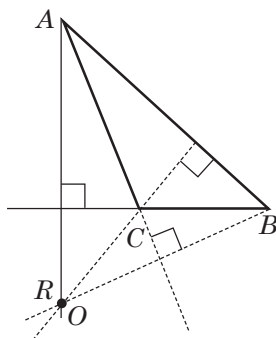
Высота треугольника — перпендикуляр, проведённый из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону



Высоты треугольника пересекаются в одной точке, которая называется **ортоцентром**. Положение ортоцентра R зависит от вида треугольника

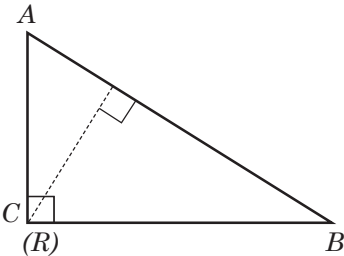
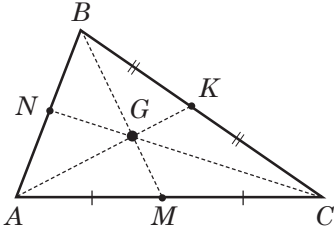


остроугольный
внутри области
треугольника



тупоугольный
вне области
треугольника

Окончание таблицы

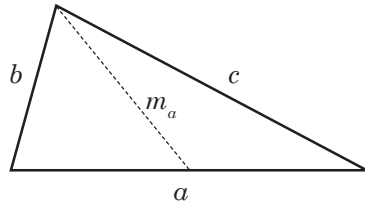
	прямоугольный (R совпадает с C)
Высоты треугольника обратно пропорциональны его сторонам. То есть наибольшая высота проведена к наименьшей стороне, а наименьшая высота — к наибольшей стороне.	
Медиана треугольника — это отрезок, соединяющий вершину с серединой противоположной стороны. Свойство медианы треугольника Точка пересечения медиан делит каждую медиану в отношении $2:1$, считая от вершины треугольника. $BG:GM = 2:1;$ $GC:GN = 2:1;$ $AG:GK = 2:1$	
Задача. а) $GM = 3$ см, BM — ? <i>Решение.</i> $GM = 3$ см, тогда $BG = 6$ см; $BM = 6 + 3 = 9$ (см). б) $AG = 12$ см, AK — ? <i>Решение.</i> $AG = 12$ см, $GK = 6$ см, $AK = 12 + 6 = 18$ (см). <i>Ответ:</i> а) 9 см; б) 18 см.	

Окончание таблицы

Медианы пересекаются в одной точке,
она называется **центром**, или **центром масс**

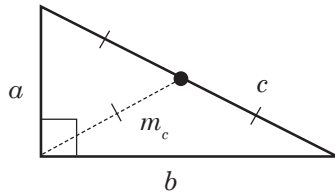
Медиану можно вычислить
по формуле:

$$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$$

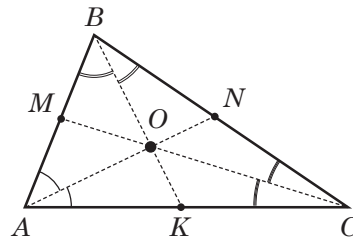


$$m_c = \frac{1}{2}c$$

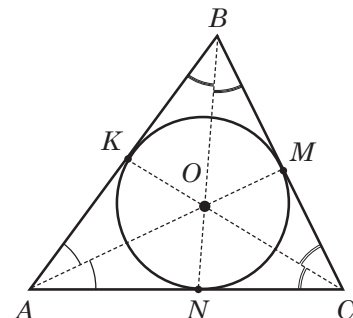
Медиана, проведённая
к гипотенузе прямоугольно-
го треугольника, равна его
половине



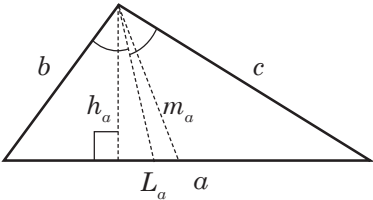
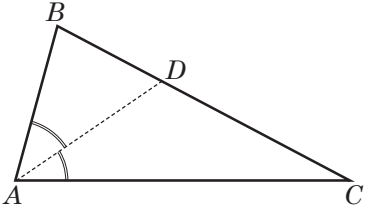
**Биссектриса угла
треугольника** — отрезок,
соединяющий вершину тре-
угольника с точкой противо-
положной стороны и **деля-
щий угол пополам**



Эта точка является цен-
тром вписанной в тре-
угольник окружности.
Точка O — центр вписан-
ной окружности, AM , CK
и BN — биссектрисы



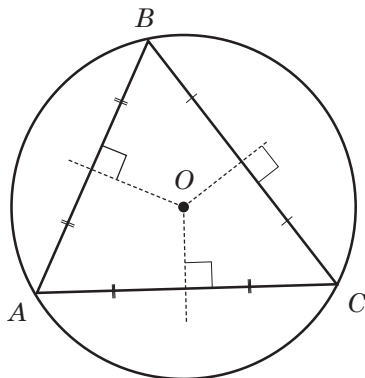
Окончание таблицы

Свойство биссектрисы треугольника Биссектриса угла треугольника делит его противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам	$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC};$ AD — биссектриса
$m_a \geq L_a \geq h_a,$ где m — медиана, L — биссектриса, h — высота	
Задача. $BD = 6$ см, $DC = 8$ см, AD — биссектриса; $P_{\triangle ABC} = 35$ см. AB — ? AC — ? <i>Решение.</i> $AB + AC = P_{\triangle ABC} - BC =$ $= 35 - (6 + 8) = 21 \text{ (см)}.$ По свойству биссектрисы: $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4};$ $\left. \begin{array}{l} AB = 3x \\ AC = 4x \end{array} \right\} 21;$ $7x = 21; x = 3;$ $AB = 3 \cdot 3 = 9 \text{ (см)};$ $AC = 4 \cdot 3 = 12 \text{ (см)}.$ <i>Ответ:</i> 12 см.	

Серединный перпендикуляр — прямая, проходящая через середину отрезка перпендикулярно к нему.

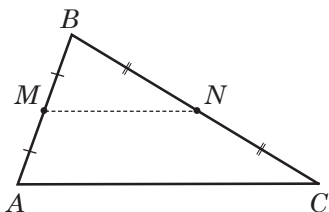
Три серединных перпендикуляра в треугольнике пересекаются в одной точке.

Эта точка — **центр окружности, описанной около данного треугольника**



Средняя линия треугольника — отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

Средняя линия треугольника, соединяющая середины двух сторон, параллельна третьей стороне, а её длина равна половине третьей стороны



$$MN \parallel AC \text{ и } MN = \frac{1}{2} AC$$

Задача.

Средняя линия равно-
стороннего треугольника
равна 2,5 см.

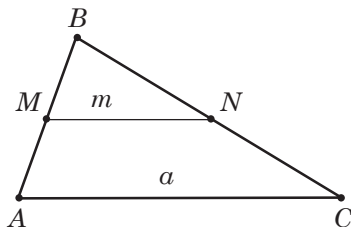
Найти: его периметр.

Решение.

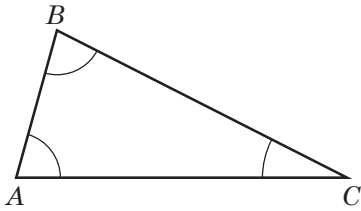
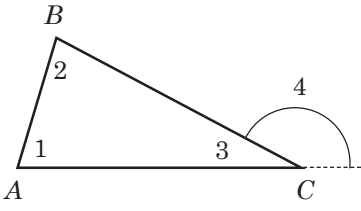
По теореме о средней линии
 $m = 0,5a$, тогда

$a = 2m = 5$ см. $P = 3a = 15$ см.

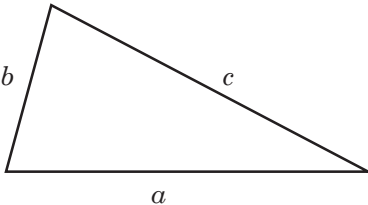
Ответ: 15 см.



Свойства сторон и углов треугольника

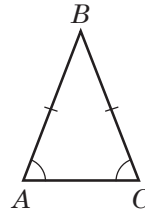
Сумма углов треугольника равна 180° $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$	
Внешний угол треугольника	
Внешний угол треугольника при данной вершине — это угол, смежный с внутренним углом треугольника. $\angle 4$ — внешний (при вершине C)	
Свойства внешнего угла треугольника	
Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним	$\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$
Внешний угол треугольника больше любого внутреннего угла, не смежного с ним	$\angle 4 > \angle 1, \angle 4 > \angle 2$

Неравенство треугольника

$a < b + c$ $a > b - c $	
---------------------------	---

Равнобедренный треугольник

$\triangle ABC$ — равнобедренный ($AB = BC$)
 AC — основание, AB и BC — боковые
 стороны



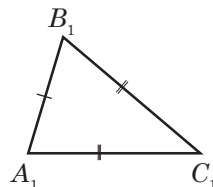
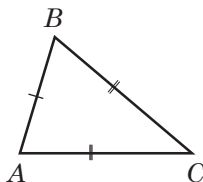
	Свойства	Признаки
	Если в $\triangle ABC$ $AB = BC$, то $\angle A = \angle C$ (углы при основа- нии равны)	Если в $\triangle ABC$ $\angle A = \angle C$, то $AB = BC$ (равнобедренный треугольник)

Если $\triangle ABC$ — равнобедренный и BD — медиана, проведённая к основанию, то BD — высота и биссектриса

Если в треугольнике совпадают:
 а) высота и медиана
 или
 б) высота и биссектриса
 или
 в) медиана и биссектриса,
 то **треугольник является равнобедренным**

Равенство треугольников

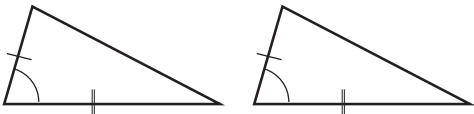
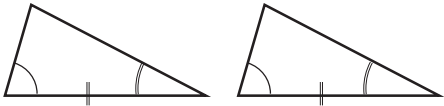
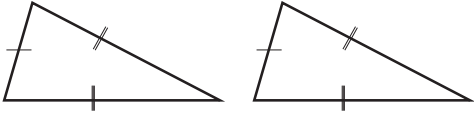
$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$	$\Leftrightarrow$	$AB = A_1B_1$ $AC = A_1C_1$ $BC = B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$ $\angle B = \angle B_1$ $\angle C = \angle C_1$
---------------------------------------	-------------------	--



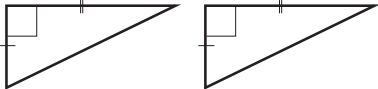
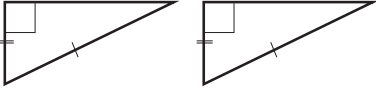
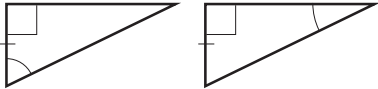
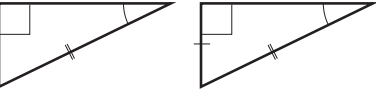
Свойства равных треугольников

1. У равных треугольников равны соответствующие элементы (стороны, углы, медианы, высоты и др.).
2. У равных треугольников против равных сторон лежат равные углы, против равных углов — равные стороны

Признаки равенства треугольников

По двум сторонам и углу между ними	
По стороне и двум прилежащим углам	
По трём сторонам	

Признаки равенства прямоугольных треугольников

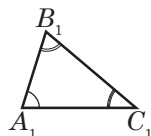
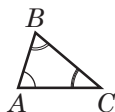
По двум катетам	По гипотенузе и катету
	
По катету и острому углу	По гипотенузе и острому углу
	

Подобие треугольников

Подобные треугольники — это треугольники, у которых соответствующие **углы равны**, а соответствующие **стороны пропорциональны**.

$$\angle A = \angle A_1; \angle B = \angle B_1; \angle C = \angle C_1;$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1} \Leftrightarrow \triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$$



Свойства подобных треугольников

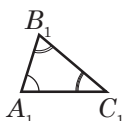
$$\frac{P}{P_1} = \frac{AB}{A_1B_1} = k$$

Отношение периметров равно отношению соответственных сторон и равно коэффициенту подобия

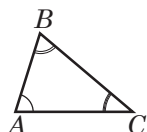
$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A_1B_1C_1}} = \left(\frac{AB}{A_1B_1} \right)^2 = k^2$$

Отношение площадей подобных треугольников равно **квадрату** коэффициента подобия

Признаки подобия треугольников



Если $\angle A = \angle A_1$ и $\angle B = \angle B_1$,
то $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ — по двум равным углам

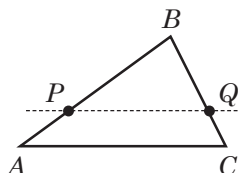


Если $\angle A = \angle A_1$ и $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$,

то $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ — по двум пропорциональным сторонам и углу между ними

$$\text{Если } \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1},$$

то $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ — по трём пропорциональным сторонам



Если $PQ \parallel AC$, то $\triangle PBQ \sim \triangle ABC$.

Прямая, параллельная стороне треугольника, отсекает от него треугольник, подобный данному

Задача.

$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$; $AB : BC : AC = 2 : 6 : 7$. $A_1C_1 - A_1B_1 = 35$ см.

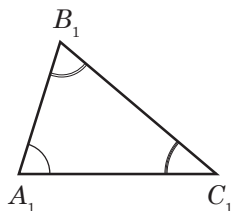
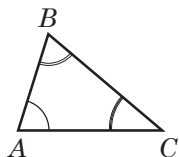
Найти: A_1B_1 ; B_1C_1 и A_1C_1 .

Решение.

$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow A_1B_1 : B_1C_1 : A_1C_1 = 2 : 6 : 7$;
 $A_1B_1 = 2x$; $B_1C_1 = 6x$; $A_1C_1 = 7x$;

$7x - 2x = 35$; $x = 7$; $A_1B_1 = 14$;
 $B_1C_1 = 42$ и $A_1C_1 = 49$.

Ответ: 14; 42; 49.



Соотношение между элементами прямоугольного треугольника

	$\angle C = 90^\circ$, a , b — катеты, c — гипотенуза, $\angle A = \alpha$ $a^2 + b^2 = c^2$ — теорема Пифагора $\angle B = 90^\circ - \alpha$; $c > a$; $c > b$		
$\sin \alpha = \frac{a}{c}$	$\cos \alpha = \frac{b}{c}$	$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$	$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$
$a = c \sin \alpha$	$b = c \cos \alpha$	$a = b \operatorname{tg} \alpha$	$b = a \operatorname{ctg} \alpha$

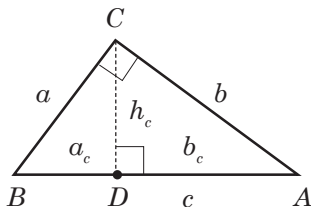
$\triangle ACD \sim \triangle ABC$

$\triangle CBD \sim \triangle ABC$

$\triangle ACD \sim \triangle CBD$

CD — высота,

$CD = c$



$$h^2 = a_c \cdot b_c$$

$$a^2 = c \cdot a_c$$

$$b^2 = c \cdot b_c$$

Задача.

$\alpha_c = 9$; $b_c = 16$; a, b, c, h — ?

Решение.

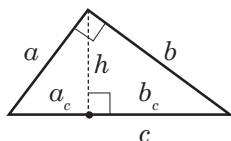
$$h^2 = 9 \cdot 16; h = \sqrt{9 \cdot 16} = 3 \cdot 4 = 12;$$

$$c = 9 + 16 = 25;$$

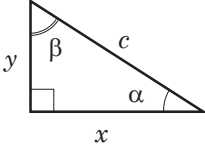
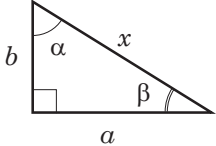
$$a^2 = a_c \cdot c; a = \sqrt{9 \cdot 25} = 3 \cdot 5 = 15;$$

$$b^2 = b_c \cdot c; b = \sqrt{16 \cdot 25} = 4 \cdot 5 = 20.$$

Ответ: 15; 20; 25; 12.



Решение прямоугольных треугольников

Дано	Найти	Решение
 c — гипотенуза; α — острый угол	x, y, β	$\beta = 90^\circ - \alpha;$ $x = c \cos \alpha;$ $y = c \sin \alpha$
Пример 1. <i>Дано:</i> $c = 2, \alpha = 20^\circ$. <i>Найти:</i> $\beta; x; y$. <i>Решение.</i> $\beta = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ;$ $x = c \cos 20^\circ = 2 \cdot 0,9397 \approx 1,88;$ $y = c \sin 20^\circ = 2 \cdot 0,3420 \approx 0,68.$ <i>Ответ:</i> $70^\circ; 1,88; 0,68.$		
 a — катет; b — катет	x, α, β	$x = \sqrt{a^2 + b^2};$ $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}; \operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a}$ или $\beta = 90^\circ - \alpha$

Пример 2.

Дано: $a = 11$, $b = 60$.

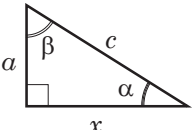
Найти: c , α , β .

Решение: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{11}{60} \approx 0,833$.

По таблице Брадиса $\alpha \approx 10^\circ$; $\beta = 90^\circ - 10^\circ = 80^\circ$;

$c = \sqrt{11^2 + 60^2} = \sqrt{3721} = 61$.

Ответ: $c = 61$; $\alpha = 10^\circ$; $\beta = 80^\circ$.

 c — гипотенуза; a — катет	x , α , β	$x = \sqrt{c^2 - a^2}$; $\sin \alpha = \frac{a}{c}$; $\cos \beta = \frac{a}{c}$ или $\beta = 90^\circ - \alpha$
--	--------------------------	---

Пример 3.

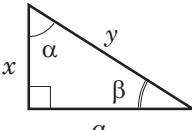
Дано: $a = 84$, $c = 85$.

Найти: x , α , β .

Решение: $x = \sqrt{85^2 - 84^2} = 13$; $\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{84}{85} \approx 0,9882$;

$\alpha \approx 81^\circ$; $\beta = 90^\circ - 81^\circ = 9^\circ$.

Ответ: $x = 0,9882$; $\alpha = 81^\circ$; $\beta = 9^\circ$.

 a — катет; α — острый угол, противоположный a	x , y , β	$\beta = 90^\circ - \alpha$; $x = a \operatorname{ctg} \alpha$; $y = \frac{a}{\sin \alpha}$
---	---------------------	---

Пример 4.

Дано: $a = 9$, $\alpha = 68^\circ$.

Найти: β , x , y .

Решение: $\beta = 90^\circ - 68^\circ = 22^\circ$; $y = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{9}{\sin 68^\circ} \approx \frac{9}{0,9277} \approx 9,71$;

$x = a \operatorname{tg} 22^\circ \approx 9 \cdot 0,4040 \approx 3,64$.

Ответ: 22° ; $3,64$; $9,71$.

Соотношения между сторонами и углами в произвольном треугольнике

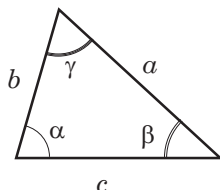
Теорема синусов

Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

Теорема косинусов

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma; \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta; \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha. \end{aligned}$$



R — радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами a, b, c

Задача 1.

Дано: $\triangle ABC$,

$$\angle A = \angle C = 67^\circ 30', \quad AC = 10\sqrt{2}.$$

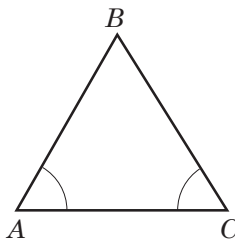
Найти: R .

Решение.

$$\angle B = 180^\circ - (67^\circ 30' + 67^\circ 30') = 45^\circ;$$

$$R = \frac{AC}{2 \sin \angle B} = \frac{10\sqrt{2}}{2 \cdot \sin 45^\circ} = \frac{10\sqrt{2}}{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = 10.$$

Ответ: 10.



Задача 2.

Дано: $a = 8, c = 13, \gamma = 120^\circ$.

Найти: b .

Решение.

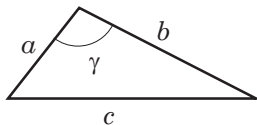
Пусть $b = x$, по теореме косинусов:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos 120^\circ; \quad \cos 120^\circ = -\frac{1}{2};$$

$$8^2 + x^2 - 2 \cdot 8 \cdot x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 13^2;$$

$$x^2 + 8x - 105 = 0; \quad x = b = 15.$$

Ответ: 15.



Следствия из теоремы косинусов

1. Косинус угла можно вычислить по формуле:

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

2. Определение **вида треугольника** по теореме косинусов:

если $a^2 + b^2 < c^2$, γ — тупой угол, треугольник тупоугольный; если $a^2 + b^2 > c^2$, γ — острый угол, треугольник остроугольный; если $a^2 + b^2 = c^2$, $\gamma = 90^\circ$, то треугольник прямоугольный.

3. Если a , b и c — стороны треугольника, то медиана, проведённая к стороне a , равна:

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2(c^2 + b^2) - a^2}$$

Задача 3.

Дано: $a = 5$, $b = 5\sqrt{3}$; $c = 10$.

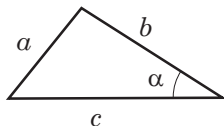
Найти: α .

Решение.

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{10^2 + (5\sqrt{3})^2 - 5^2}{2 \cdot 10 \cdot 5\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

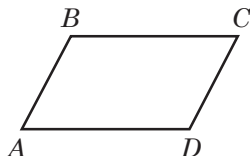
$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}; \alpha = 30^\circ.$$

Ответ: 30° .



Параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат

Параллелограмм



Параллелограмм — четырёхугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

$AB \parallel CD$ и $BC \parallel AD \Leftrightarrow ABCD$ — параллелограмм