

профиматика

Математика • Русский язык • Обществознание • Физика • Информатика

5340+

учеников прошли
наши курсы



5 ЛЕТ

опыт подготовки
к экзаменам



1000+

учеников сдали на
90+



97%

ребят учатся
в топ-30 вузах
страны



Задача 8 профильного ЕГЭ по математике

Мы онлайн-школа, которая сумеет подготовить
к ЕГЭ с любого уровня на нужный балл, с чётким планом
и без стресса! Построй свой фундамент для поступления!



Игорь Уколов

Влад Вуль

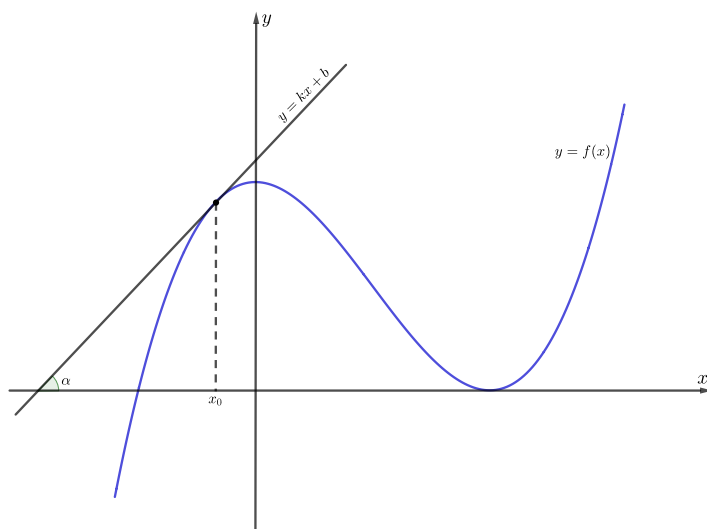


Содержание

1	Производная и касательная к графику	3
1.1	Теория	3
1.2	Задачи для самостоятельного решения	9
1.2.1	Часть 1	9
1.2.2	Часть 2	11
1.2.3	Часть 3	15
1.2.4	Часть 4	18
2	Касательная к графику. Задачи на вычисление	22
2.1	Теория	22
2.1.1	Часть 1	29
2.1.2	Часть 2	29
2.1.3	Часть 3	30
3	Возрастание и убывание функции	31
3.1	Теория	31
3.2	Задачи для самостоятельного решения	33
3.2.1	Часть 1	33
3.2.2	Часть 2	35
4	Точки экстремума. Точки минимума и точки максимума	41
4.1	Теория	41
4.2	Задачи	42
4.2.1	Часть 1	42
4.2.2	Часть 2	44
4.2.3	Часть 3	47
4.2.4	Часть 4	49
5	Физический смысл производной	51
5.1	Теория	51
5.2	Задачи	51
5.2.1	Часть 1. Ищем скорость материальной точки в момент времени $t = t_0$	51
5.2.2	Часть 2. Ищем момент времени $t = t_0$ в который скорость материальной точки $v(t) = v_0$	52
6	Первообразная	54
6.1	Теория	54
6.2	Задачи	55
6.2.1	Часть 1. По графику первообразной $y = F(x)$ определяем количество решений уравнения $f(x) = 0$ на заданном отрезке.	55
6.2.2	Часть 2. Связь первообразной и площади под графиком. Тип №1	57
6.2.3	Часть 3. Связь первообразной и площади под графиком. Тип №2	59
7	Ответы	61

1 Производная и касательная к графику

1.1 Теория



$$f'(x_0) = k = \operatorname{tg} \alpha$$

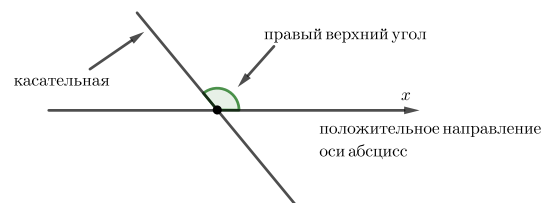
$y = kx + b$ – уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ с абсциссой в точке x_0 .

α – угол между касательной и положительным направлением оси x .



Угол между касательной и положительным направлением оси абсцисс всегда – правый верхний угол.

Если этот угол острый – коэффициент k положительный, если угол тупой – коэффициент k отрицательный.

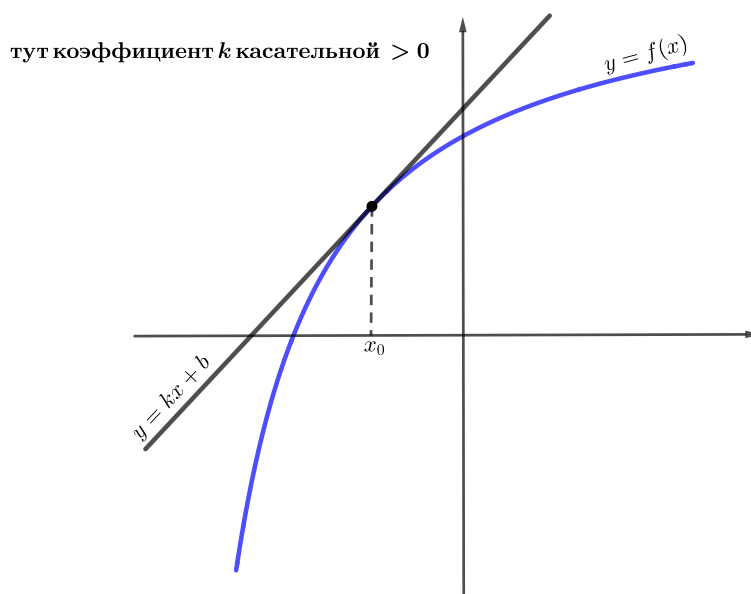


Знак коэффициента k касательной можно отслеживать по возрастанию и убыванию функции.

Если в окрестности точки x_0 функция $f(x)$ возрастает, то $f'(x_0) \geq 0$, а значит, у касательной коэффициент $k \geq 0$.

Верно и обратное.

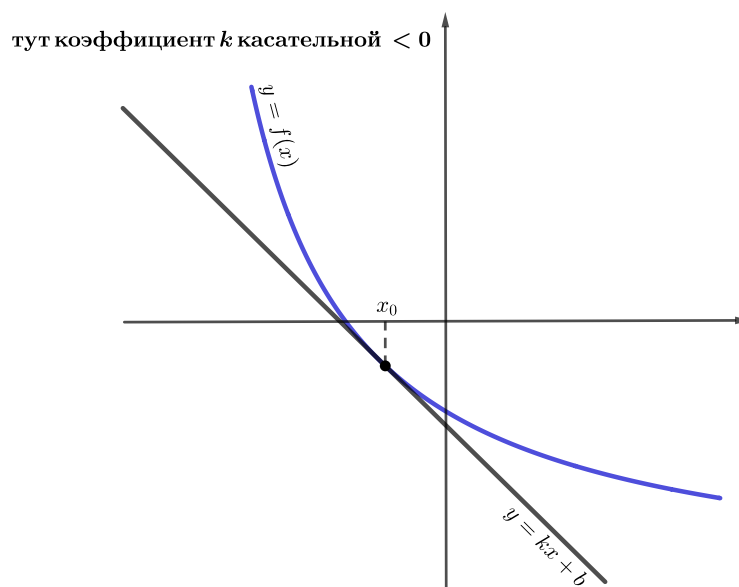
Если коэффициент k касательной в точке x_0 больше 0, то $f(x)$ возрастает в окрестности точки с абсциссой x_0 .



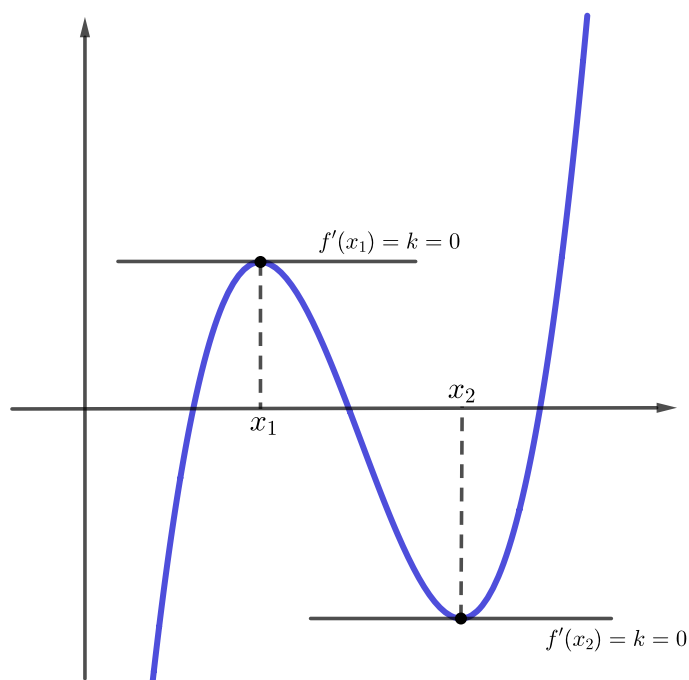
Если в окрестности точки x_0 функция $f(x)$ убывает, то $f'(x_0) \leq 0$, а значит, у касательной коэффициент $k \leq 0$.

Верно и обратное.

Если коэффициент k касательной в точке x_0 меньше 0, то $f(x)$ убывает в окрестности точки с абсциссой x_0



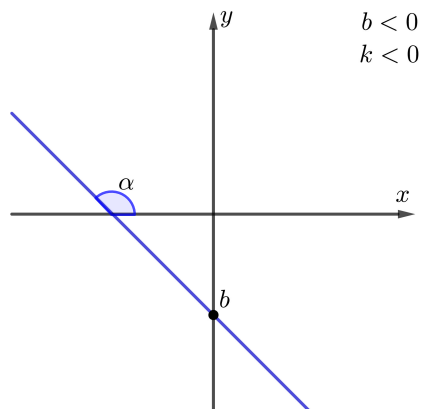
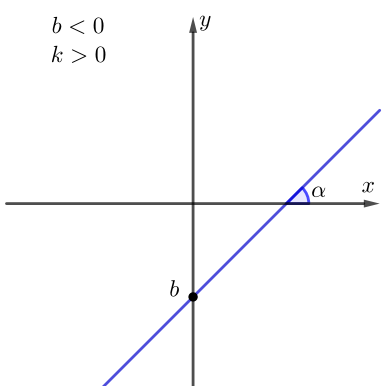
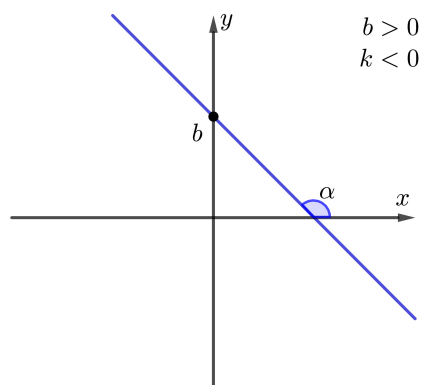
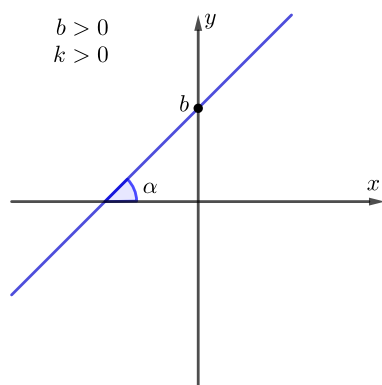
Если в точке x_0 функция $f(x)$ достигает локального минимума или локального максимума, то касательная к графику функции в точке x_0 горизонтальна.



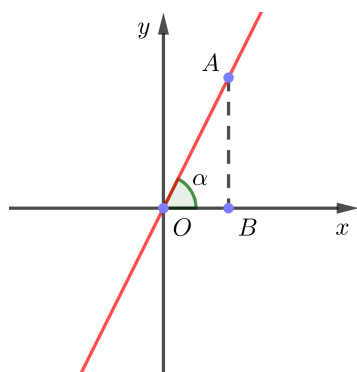
Итак, мы выяснили, что для того чтобы найти значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 , полезно уметь находить коэффициент k в уравнении касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 . Снова обратимся к теории.

Прямая на плоскости задается уравнением $y = kx + b$, где k — угловой коэффициент прямой, b — это ордината точки пересечения прямой и оси y .

Как коэффициенты k и b влияют на расположение прямых.

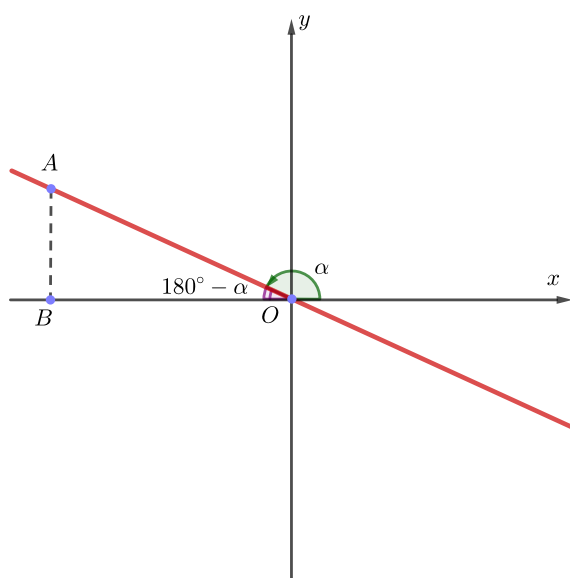


Найдем коэффициент k в том случае, когда $k > 0$. Он равен тангенсу угла α .



$$k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{|AB|}{|OB|}$$

Найдем коэффициент k в том случае, когда $k < 0$. Он равен тангенсу угла α . Удобно так же, как в первом случае, построить прямоугольный треугольник, но для угла $180^\circ - \alpha$.



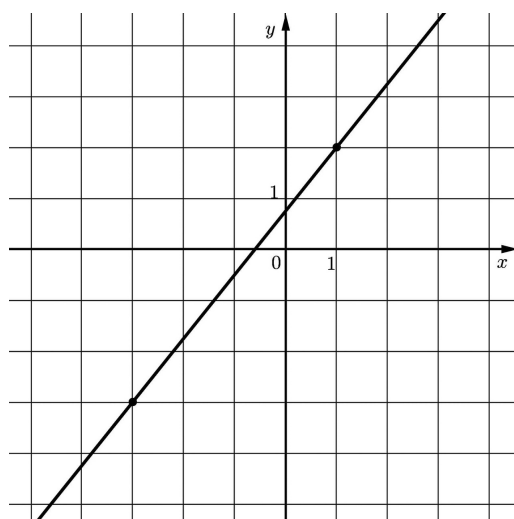
$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = \frac{|AB|}{|OB|}.$$

Воспользуемся формулой приведения, чтобы найти $\operatorname{tg} \alpha$: $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$.

$$\text{Тогда } k = \operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\frac{|AB|}{|OB|}.$$

► Пример

На рисунке изображен график функции $f(x) = kx + b$. Найдите k .

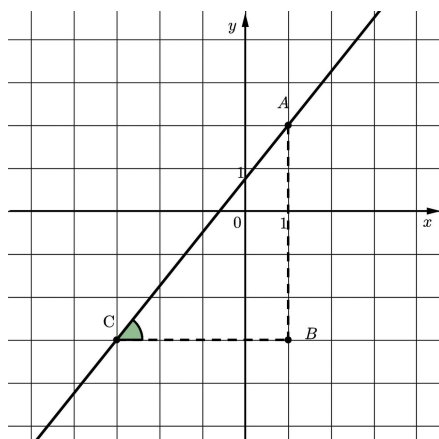


Решение

Решим задачу двумя способами - с помощью системы уравнений и с нахождением тангенса угла наклона прямой:

Вариант 1:

Найдем коэффициент k как тангенс угла наклона прямой. Заметим, что графику – на следующей странице, принадлежат две выделенные точки A и C . Построим точку B : для этого опустим перпендикуляры из точки A на ось x и из точки C на ось y и продолжим их до пересечения — это точка B . Получили прямоугольный треугольник $\triangle ABC$. Отсюда тангенс угла наклона прямой — отношение противолежащего катета к прилежащему: $k = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{5}{4}$.

Вариант 2:

Найдем две точки на графике: $(-3; -3)$, $(1; 2)$ (они обычно выделены жирно, но можно брать любые целочисленные точки, главное, убедитесь в том, что они действительно целочисленные). Возьмем уравнение прямой $y = kx + b$ и подставим в него координаты этих двух точек. Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} -3 = -3 \cdot k + b, \\ 2 = 1 \cdot k + b. \end{cases}$$

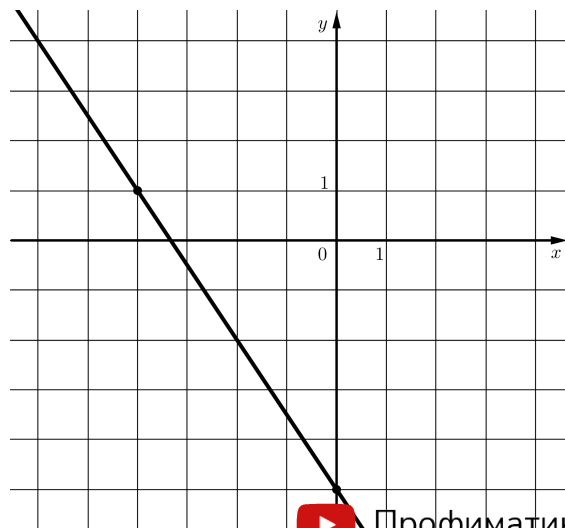
Найдем коэффициенты k и b из системы:

Выразим b из первого уравнения: $b = -3 + 3k$ и подставим во второе уравнение системы:

$$2 = k - 3 + 3k \Leftrightarrow 4k = 5. \text{ Отсюда находим } k: k = \frac{5}{4}.$$

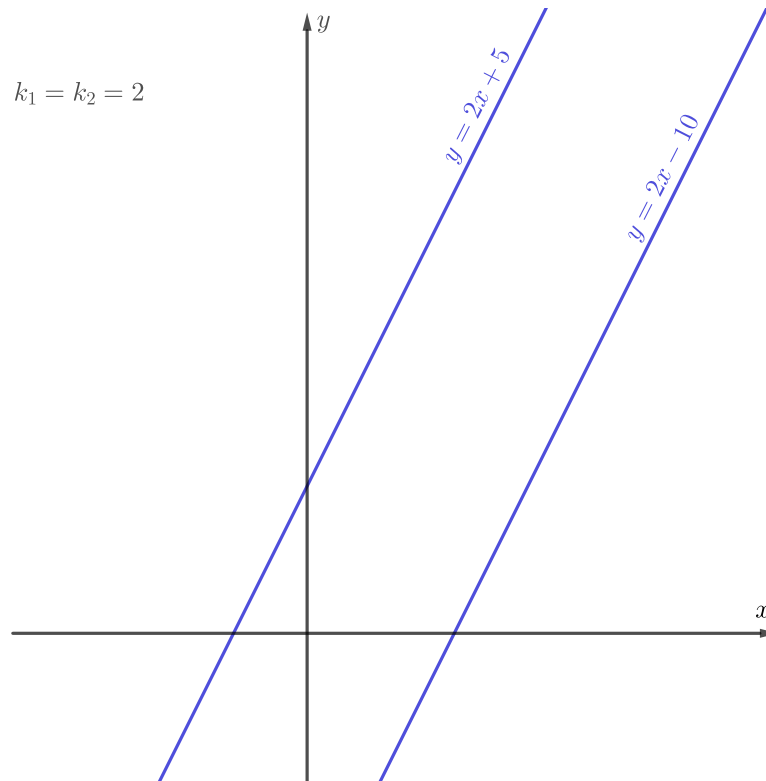
Задача для самостоятельного решения:

На рисунке изображен график функции $f(x) = kx + b$. Найдите k .



Полезный факт про прямые.

Прямые, задаваемые уравнениями $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ параллельны тогда и только тогда, когда $k_1 = k_2$

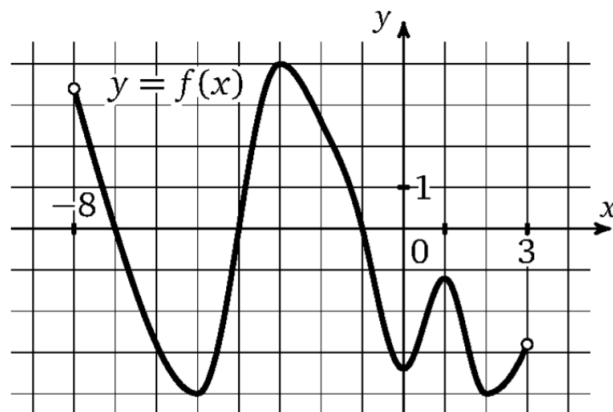


1.2 Задачи для самостоятельного решения

1.2.1 Часть 1

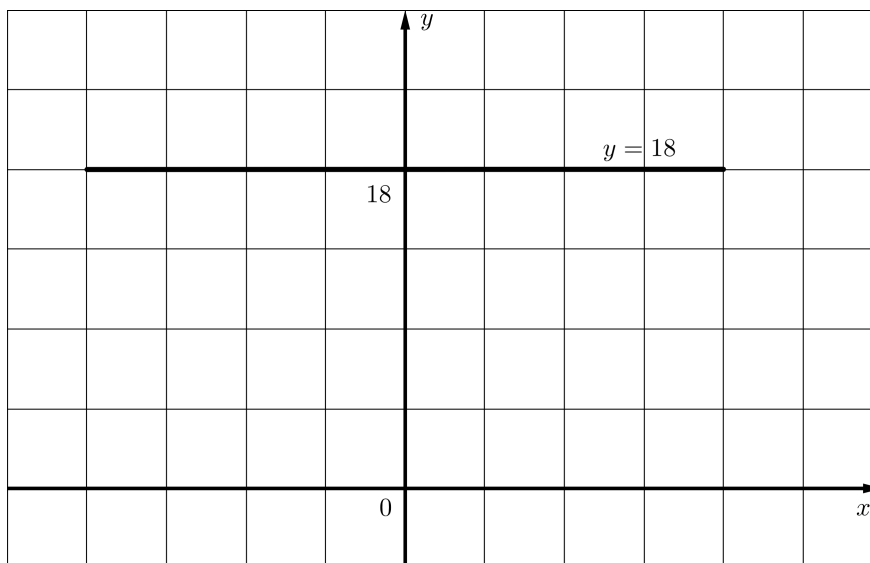
► Пример

На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-8; 3)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 18$.

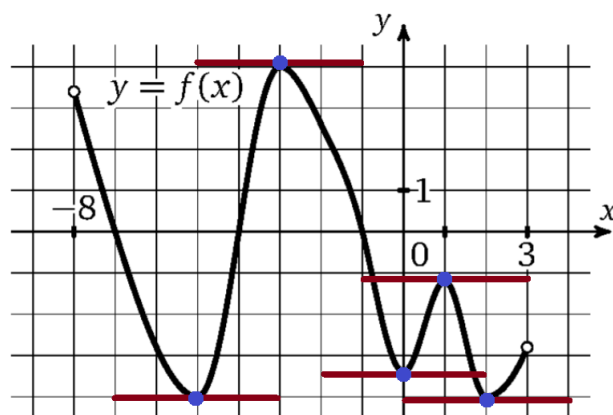


Решение

Вспомним, как выглядит прямая $y = 18$:



Прямая $y = 18$ – горизонтальная прямая, значит, если касательная к графику функции ей параллельна, то она тоже горизонтальна. Следовательно, мы ищем все точки, где касательная горизонтальна. При решении этой задачи можно приложить линейку горизонтально и, двигая ее «вниз», отметить на графике точки с горизонтальной касательной.

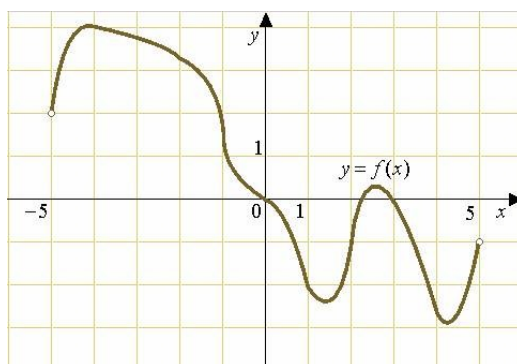


Мы получили 5 точек с горизонтальной касательной.

Ответ: 5.

Задача 1

На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-5; 5)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 6$ или совпадает с ней.

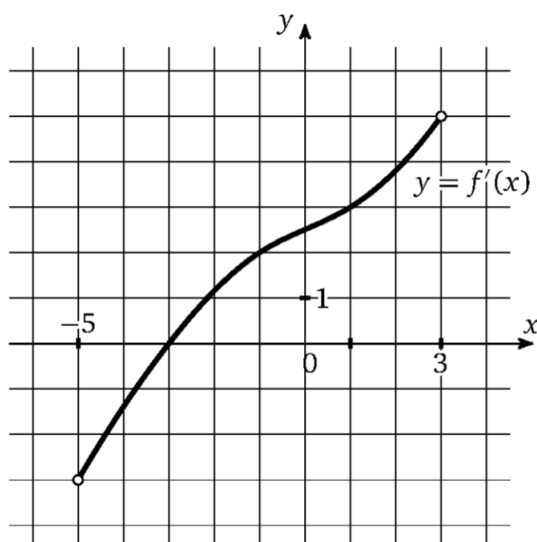


⇒ **Решение задачи**

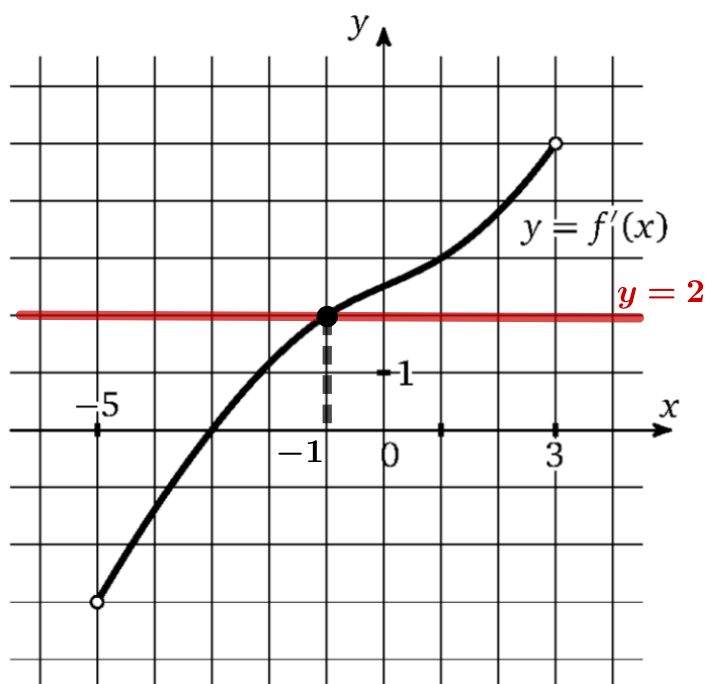


Задача 2

На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-11; 2)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = -6$.

**Решение**

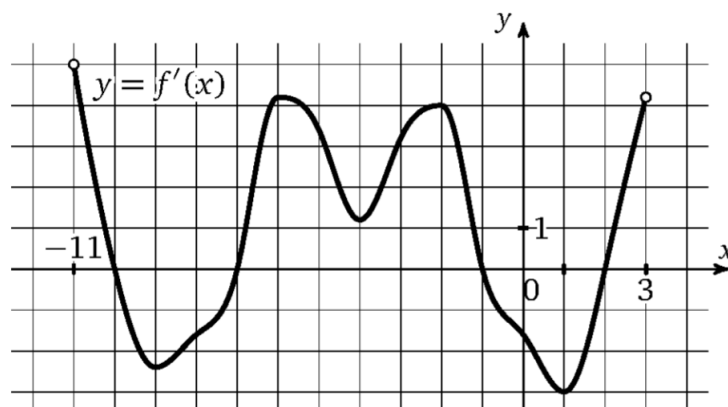
Заметим, что нам дан график производной. Если касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = 2x + 7$ или совпадает с ней, то коэффициент k касательной должен быть равен 2, а значит, и значение производной в точке касания равно 2. Для того чтобы найти искомую абсциссу, выясним, в какой точке значение производной функции $f(x)$ равно 2. Для этого проведем горизонтальную прямую $y = 2$ и найдем абсциссу точки пересечения этой прямой с графиком производной. Она и будет искомой абсциссой точки касания.



Ответ: -1 .

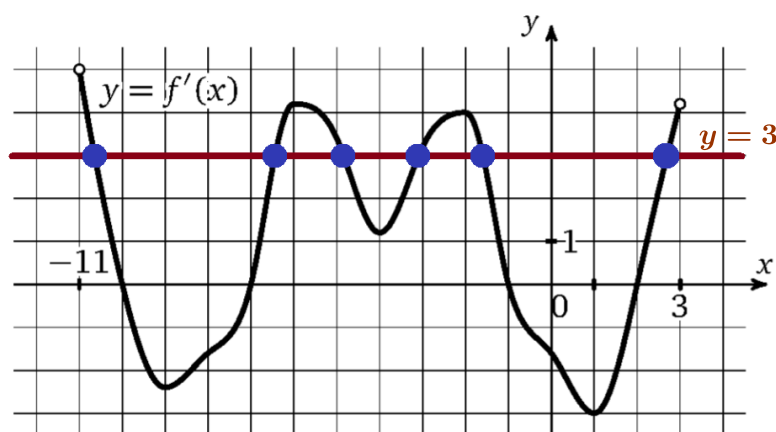
► Пример 2

На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-11; 3)$. Найдите количество таких чисел x_i , что касательная к графику функции $f(x)$ в точке с абсциссой x_i параллельна прямой $y = 3x - 11$ или совпадает с ней.



Решение

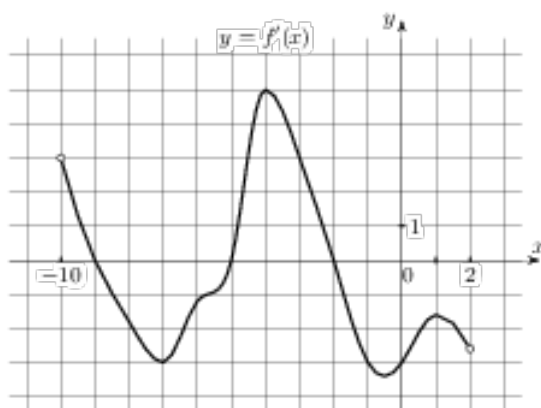
Заметим, что нам дан график производной. Если касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = 3x - 11$ или совпадает с ней, то ее угловой коэффициент равен 3, а значит производная $f'(x)$ тоже должна быть равна 3, поэтому нам нужно найти количество точек, в которых производная $f'(x)$ равна 3. Для этого построим прямую $y = 3$, и посчитаем количество точек пересечения графика производной, и этой прямой. Таких точек 6.



Ответ: 6.

Задача 1

На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-10; 2)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = -2x - 11$ или совпадает с ней.

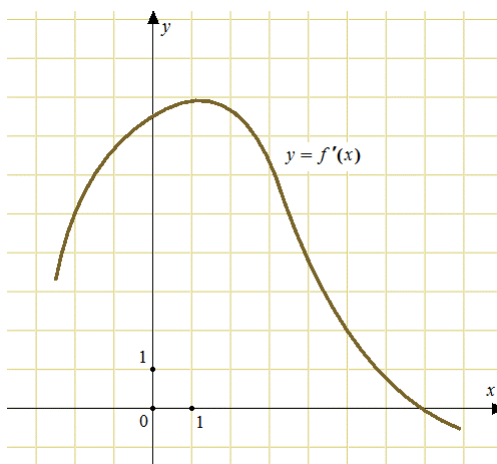


⇒ Решение задачи



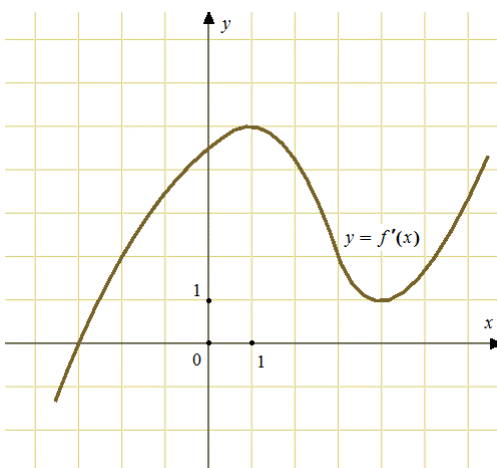
Задача 2

На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 2x - 2$ или совпадает с ней.



Задача 3

На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.



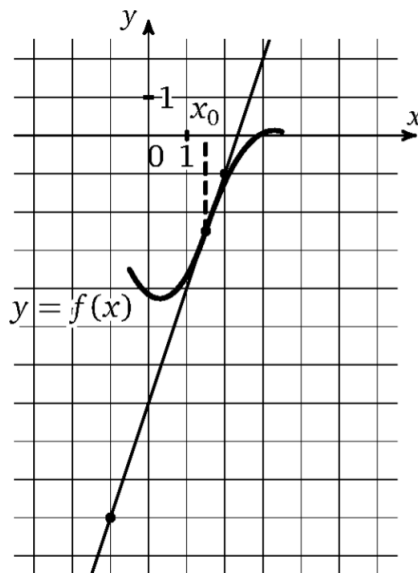
⇒ Решение задачи



1.2.3 Часть 3

► Пример 1

На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



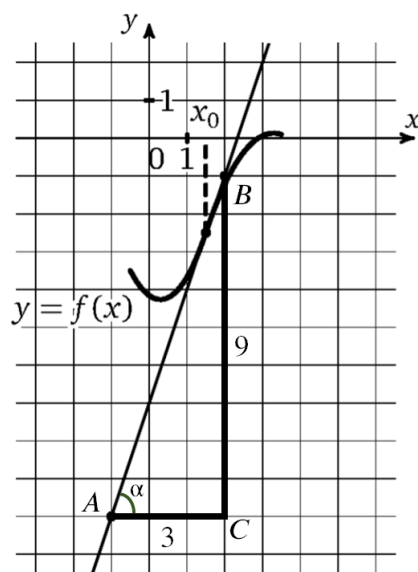
Решение

Вспомним теорию:

Значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 – $f'(x_0)$ – равно угловому коэффициенту k касательной, проведенной к графику этой функции в точке x_0 . Чтобы найти k , найдем $\operatorname{tg} \alpha$, где α – это угол между касательной и положительным направлением оси абсцисс. Теперь решим исходную задачу:

Выберем на касательной две точки A и B , у которых абсциссы и ординаты – целые числа (в заданиях ЕГЭ они обычно выделены жирно).

Построим прямоугольный треугольник ABC :

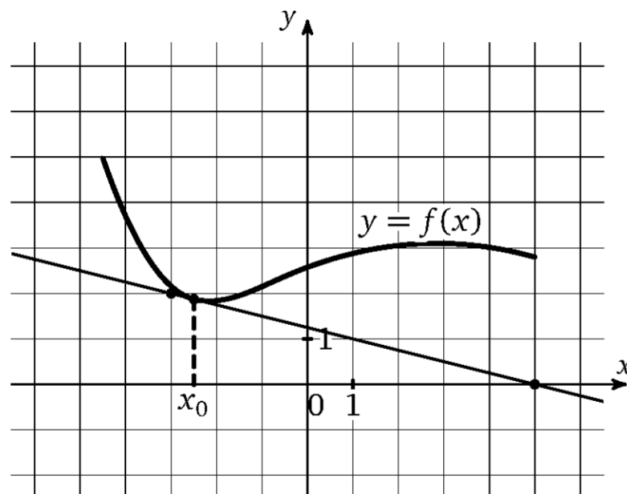


Длина катета $BC = 9$, длина катета $AC = 3$, тогда $\operatorname{tg} \alpha = \frac{9}{3} = 3$. То есть, искомое значение производной в точке x_0 равно $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = 3$.

Ответ: 3.

► Пример 2

На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



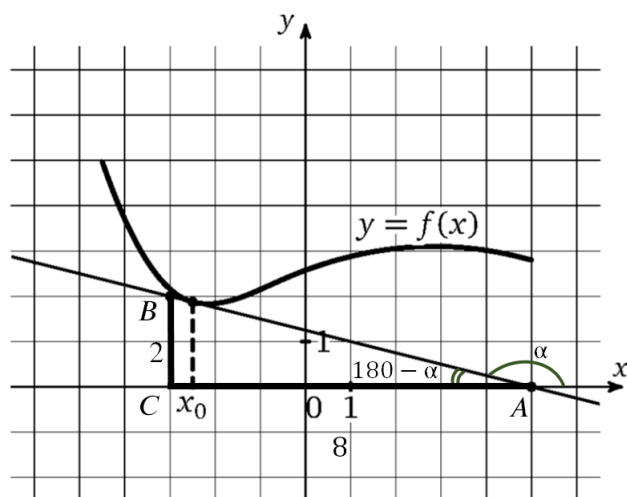
Решение

Вспомним теорию:

Значение производной функции $f(x)$ в точке $x_0 - f'(x_0)$ равно угловому коэффициенту k касательной, проведенной к графику этой функции в точке x_0 . Чтобы найти k , найдем $\operatorname{tg} \alpha$, где α это угол между касательной и положительным направлением оси абсцисс.

Теперь решим исходную задачу:

Выберем на графике касательной две точки A и B , у которых абсциссы и ординаты – целые числа (в заданиях ЕГЭ они обычно выделены жирно).

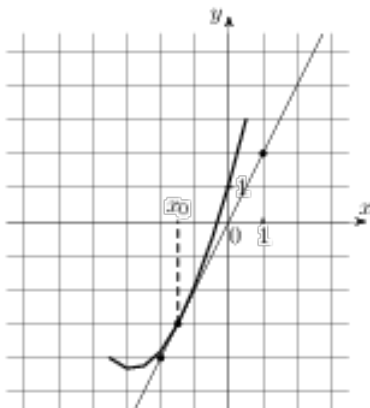


Длина катета $BC = 2$, длина катета $AC = 8$, тогда $\operatorname{tg}(180 - \alpha) = \frac{2}{8} = 0,25$. Так как $\operatorname{tg}(180 - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$, значит искомое значение производной в точке x_0 равно $f'(x_0) = -\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = \operatorname{tg} \alpha = -0,25$.

Ответ: $-0,25$.

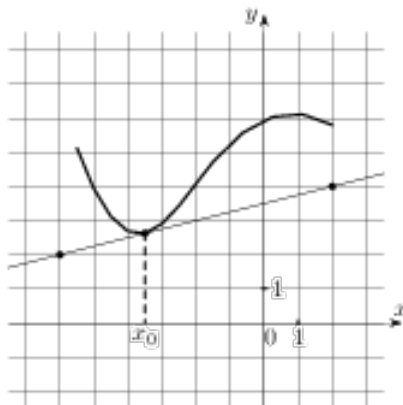
Задача 1

На рисунке изображены график функции $f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



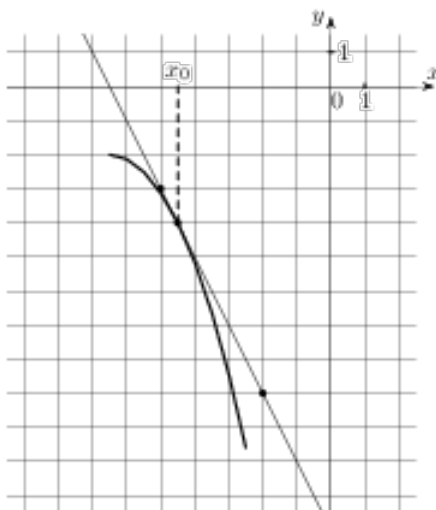
Задача 2

На рисунке изображены график функции $f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



Задача 3

На рисунке изображены график функции $f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

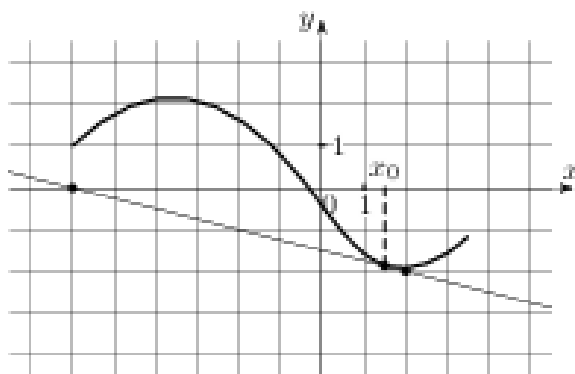


⇒ Решение задачи



Задача 4

На рисунке изображены график функции $f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



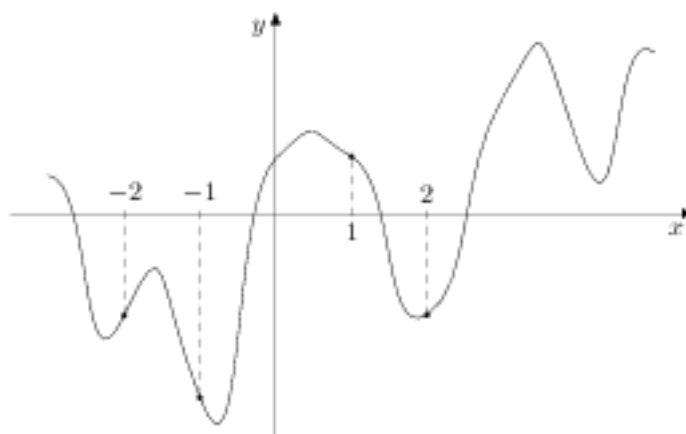
⇒ Решение задачи



1.2.4 Часть 4

► Пример

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены точки $-2, -1, 1, 2$. В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.



Решение

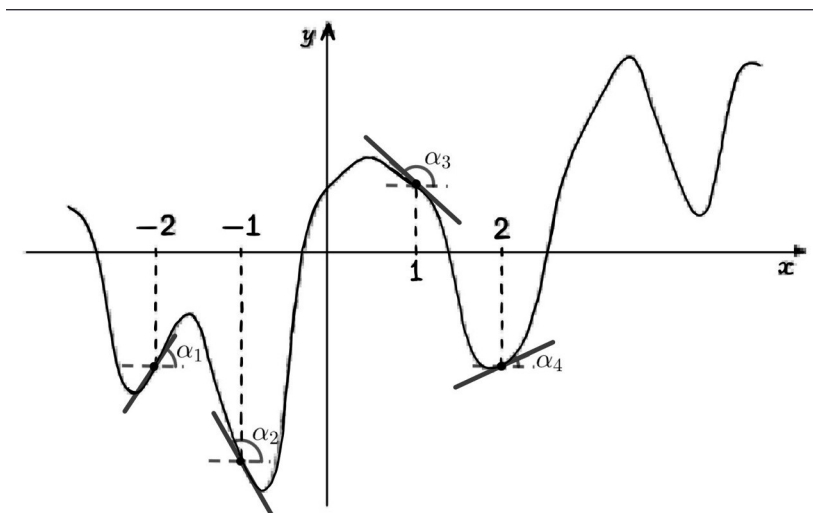
Нарисуем отрезки, касающиеся графика в точках с отмеченными абсциссами $-2, -1, 1, 2$. Поведение такого отрезка при движении по графику очень похоже на движение лыжника по склонам гор в направлении Ox .

Когда лыжник взбирается в гору, его лыжи наклонены к положительному направлению оси Ox под острым углом, а когда спускается - под тупым. А мы знаем, что производная



функции в точке касания равна тангенсу угла наклона касательной. Таким образом, если угол острый, то тангенс положителен, а значит и производная функции положительна. Причём, чем длиннее угол к 90° , тем больше тангенс, а значит больше и производная. Поэтому нам требуется выбрать ту точку, в которой угол наклона острый и ближе всего к 90° .

Проведём касательные/лыжи в заданных точках.



В точке -2 угол острый. $\Rightarrow \operatorname{tg} \alpha_1 > 0 \Rightarrow f'(-2) > 0$

В точке -1 угол тупой. $\Rightarrow \operatorname{tg} \alpha_2 < 0 \Rightarrow f'(-1) < 0$

В точке 1 угол тупой. $\Rightarrow \operatorname{tg} \alpha_3 < 0 \Rightarrow f'(1) < 0$

В точке 2 угол острый. $\Rightarrow \operatorname{tg} \alpha_4 > 0 \Rightarrow f'(2) > 0$

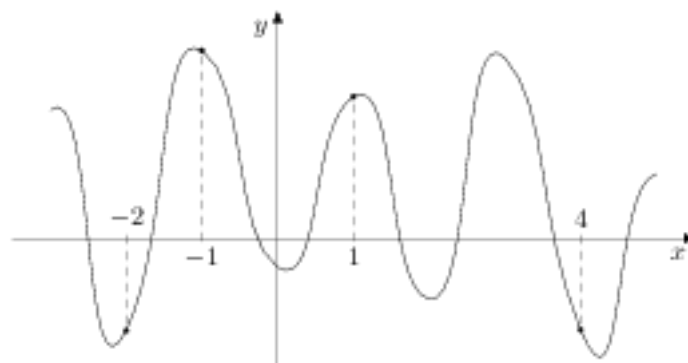
Таких углов два – соответствующих точкам 2 и -2 .

Нам нужен тот, где угол наклона ближе к 90° .

$\alpha_4 < \alpha_1 < 90^\circ \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha_4 < \operatorname{tg} \alpha_1 \Rightarrow f'(2) < f'(-2)$. Поэтому ответ -2 .

Задача 1

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены точки $-2, -1, 1, 4$. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.

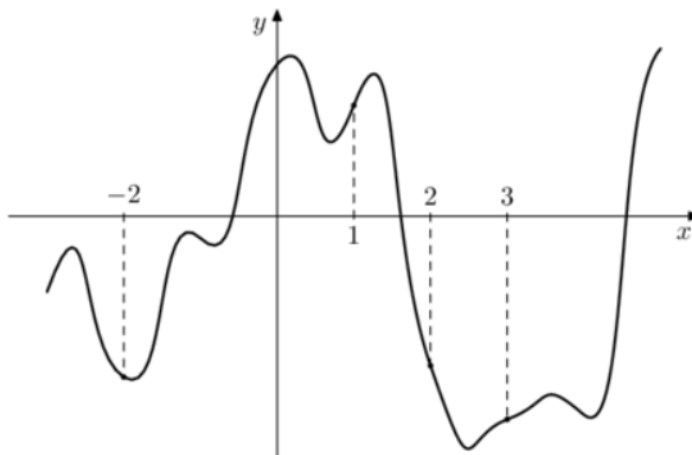


$\Rightarrow$ Решение задачи



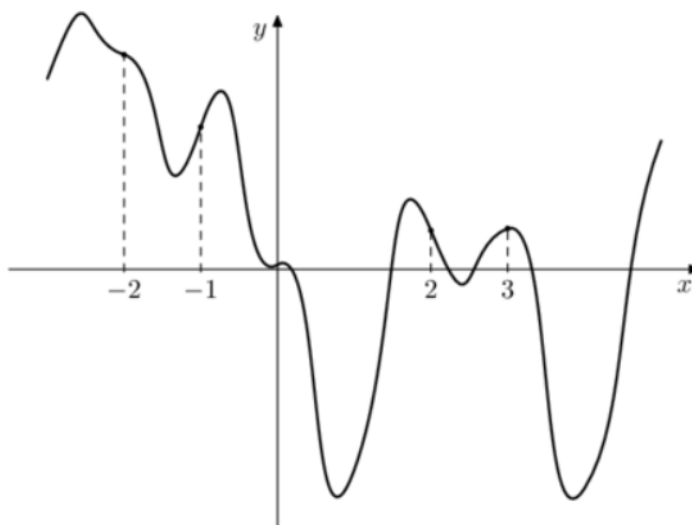
Задача 2

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены точки $-2, 1, 2, 3$. В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.



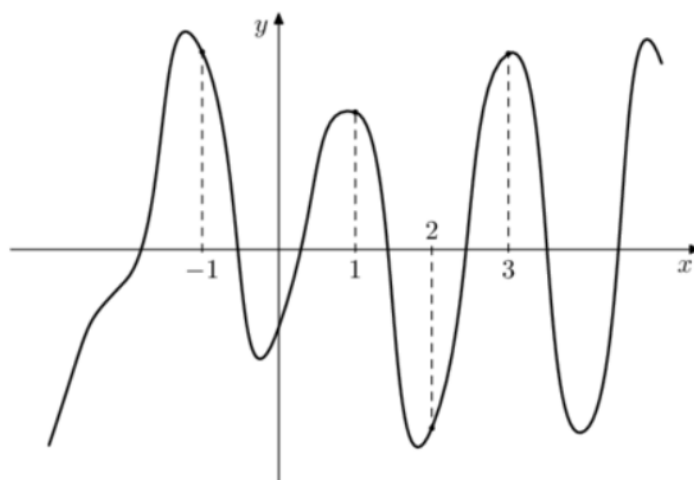
Задача 3

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены точки $-2, -1, 2, 3$. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.



Задача 4

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены точки $-1, 1, 2, 3$. В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.



2 Касательная к графику. Задачи на вычисление

⇒ Теория и пример решения



2.1 Теория

Прямая $y = kx + b$ является касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с координатами $(x_0; f(x_0))$, если выполнены 2 условия:

1) В точке x_0 прямая $y = kx + b$ и график функции $y = f(x)$ пересекаются, то есть при $x = x_0$ получаем, что

$$f(x_0) = kx_0 + b.$$

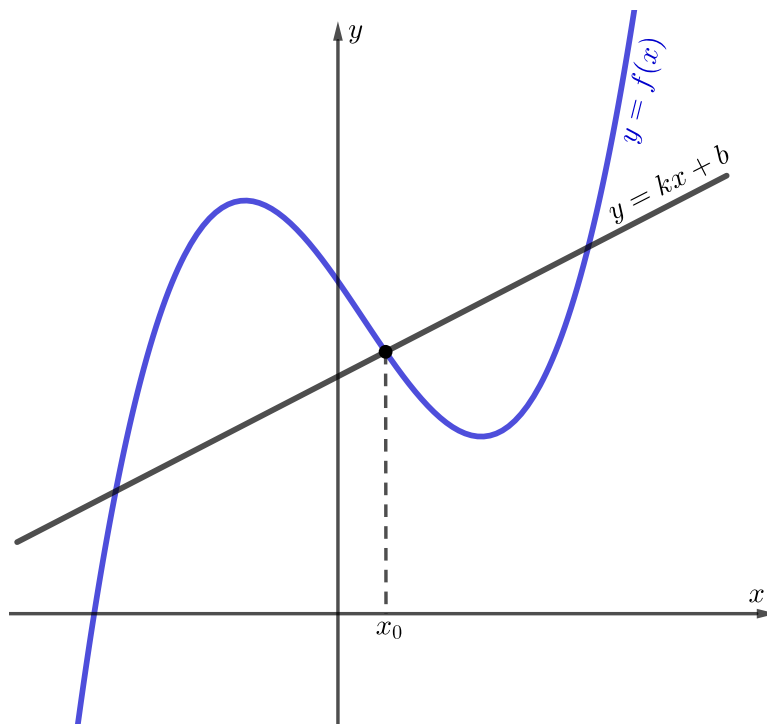
2) Значение производной функция $y = f(x)$ в точке x_0 должно совпадать с коэффициентом k прямой $y = kx + b$, то есть:

$$f'(x_0) = k.$$

В итоге получаем систему:
$$\begin{cases} f(x_0) = kx_0 + b, \\ f'(x_0) = k. \end{cases}$$

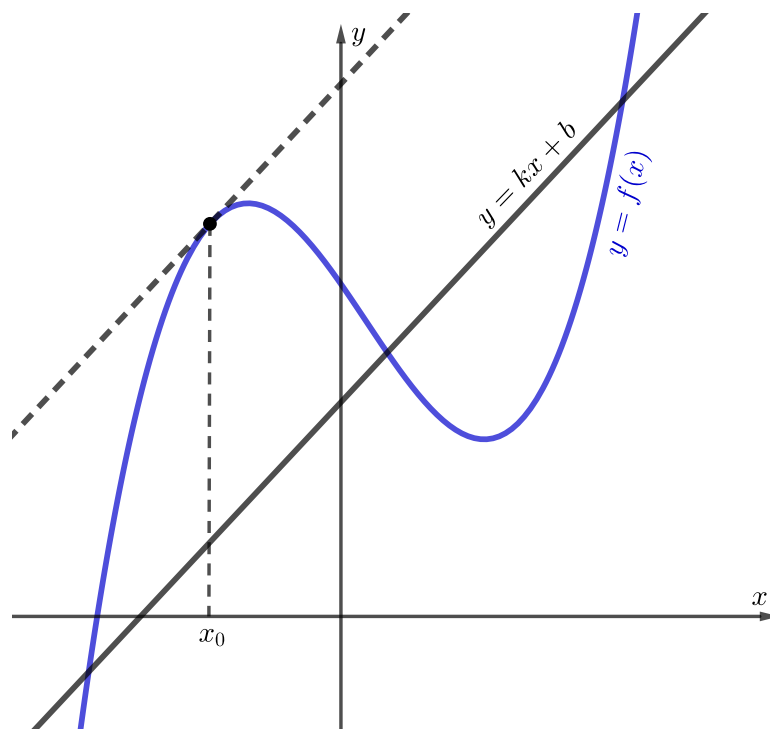
Есть три ситуации:

1. В точке x_0 совпадает значение функции $y = f(x)$ и значение функции $y = kx + b$, то есть $f(x_0) = kx_0 + b$, но не совпадают значения производных $f'(x_0) \neq k$. В этом случае прямая пересекает график, но не будет касаться графика.



2. В точке x_0 значение функции $y = f(x)$ и значение функции $y = kx + b$ не совпадают, т.е. $f(x_0) \neq kx_0 + b$, но в точке x_0 совпадают их производные: $f'(x_0) = k$. В этом случае прямая $y = kx + b$ параллельна касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 .

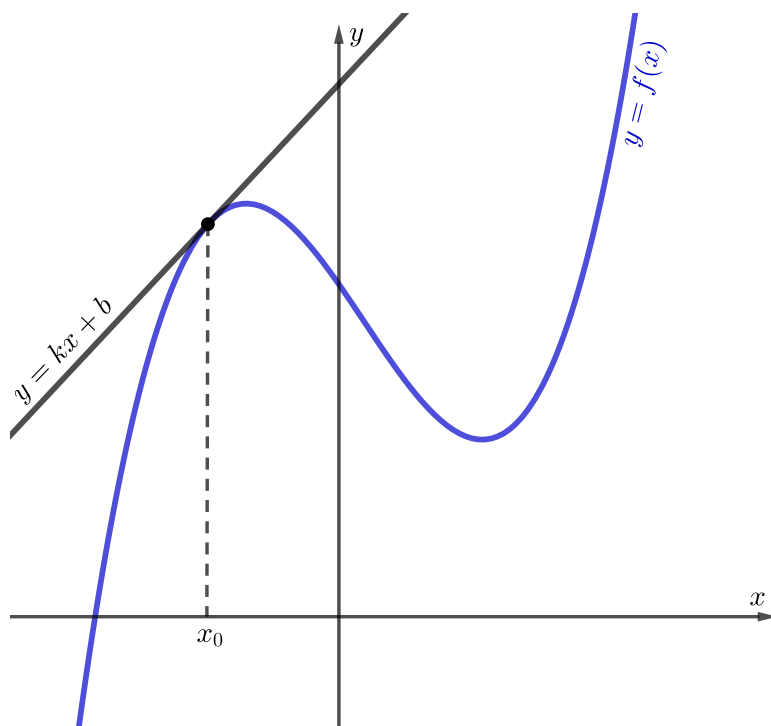




3. В точке x_0 совпадают значения функции $y = f(x)$ и функции $y = kx + b$, а так же совпадают значения их производных:

$$\begin{cases} f(x_0) = kx_0 + b, \\ f'(x_0) = k. \end{cases}$$

В этом случае прямая $y = kx + b$ является касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 .



► Пример 1

Прямая $y = 6x + 9$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 7x - 6$. Найдите абсциссу точки касания.

Решение

Прямая $y = kx + b$ параллельна прямой $y = 6x + 9$ тогда и только тогда, когда коэффициент $k = 6$. Коэффициент k касательной совпадает со значением производной функции $f(x) = x^2 + 7x - 6$ в точке касания x_0 .

$$f'(x) = (x^2 + 7x - 6)' = 2x + 7.$$

Значит, $f'(x_0) = 2x_0 + 7$.

Отсюда получаем $2x_0 + 7 = 6 \Leftrightarrow 2x_0 = -1 \Leftrightarrow x_0 = -0,5$.

► Пример 2

Прямая $y = 2x + 37$ является касательной к графику функции $y = x^3 + 3x^2 - 7x + 10$. Найдите абсциссу точки касания.

Решение

Прямая $y = kx + b$ параллельна прямой $y = 2x + 37$, тогда и только тогда, когда коэффициент $k = 2$. Коэффициент k касательной совпадает со значением производной функции $f(x) = x^3 + 3x^2 - 7x + 10$ в точке касания x_0 .

$$f'(x) = (x^3 + 3x^2 - 7x + 10)' = 3x^2 + 6x - 7$$

Значит $f'(x_0) = 3x_0^2 + 6x_0 - 7$.

Отсюда получаем:

$$3x_0^2 + 6x_0 - 7 = 2 \Leftrightarrow 3x_0^2 + 6x_0 - 9 = 0 \Leftrightarrow x_0^2 + 2x_0 - 3 = 0$$

$$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 4}{2}$$

Следовательно, это квадратное уравнение имеет два корня: -3 и 1 . Таким образом, есть две точки, в которых касательная к графику функции

$$y = x^3 + 3x^2 - 7x + 10$$

имеет угловой коэффициент, равный 2 .

Чтобы определить, в какой из двух точек прямая $y = 2x + 37$ касается графика функции $y = x^3 + 3x^2 - 7x + 10$, вспомним, что в точке касания график функции и касательная должны пересекаться, то есть в искомой точке должны совпадать значения двух функций.

Значение функции $f(x) = x^3 + 3x^2 - 7x + 10$ в точке -3 равно:

$$f(-3) = -27 + 27 + 21 + 10 = 31,$$

а значение в точке 1 равно:

$$f(1) = 1 + 3 - 7 + 10 = 7.$$



Из уравнения касательной $y = 2x + 37$ при $x = -3$ получим значение:

$$y(-3) = -6 + 37 = 31,$$

а при $x = 1$ получим значение:

$$y(1) = 2 + 37 = 39.$$

Получается, что в точке $x = -3$ значения совпали: $f(-3) = y(-3)$, а в точке $x = 1$ нет: $f(1) \neq y(1)$. Значит, искомая абсцисса точки касания равна -3 , а в точке $x = 1$ прямая $y = 2x + 37$ просто параллельна касательной, но ею не является.

► Пример 3

Прямая $y = 3x + 1$ является касательной к графику функции $y = ax^2 + 2x + 3$. Найдите a .

Решение

Вариант 1:

Решение. Для того, чтобы прямая $y = 3x + 1$ являлась касательной к графику функции $y = ax^2 + 2x + 3$, значение производной функции $f(x) = ax^2 + 2x + 3$ в точке касания должно совпадать с угловым коэффициентом прямой. Угловым коэффициентом прямой $y = 3x + 1$ – это $k = 3$. Производная функции $f(x) = ax^2 + 2x + 3$ – это $f'(x) = 2ax + 2$.

Если за x_0 принять абсциссу точки касания, имеем: $2ax_0 + 2 = 3$, т. е. $ax_0 = \frac{1}{2}$. Найдем, значение исходной функции в точке касания:

$$ax_0^2 + 2x_0 + 3 = ax_0 \cdot x_0 + 2x_0 + 3 = \frac{1}{2}x_0 + 2x_0 + 3 = \frac{5}{2}x_0 + 3.$$

Так как прямая $y = 3x + 1$ – касательная, то значение y в точке x_0 должно быть равно $\frac{5}{2}x_0 + 3$, имеем:

$$\frac{5}{2}x_0 + 3 = 3x_0 + 1,$$

откуда $x_0 = 4$. А значит, $ax_0 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4a = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = 0,125$.

Вариант 2:

При $a = 0$ функция $y = ax^2 + 2x + 3$ принимает вид $y = 2x + 3$. Это уравнение прямой. Две различные прямые не могут касаться друг друга, поэтому этот случай нам не подходит.

При $a \neq 0$ графиком функции $y = ax^2 + 2x + 3$ является парабола. По условию задачи эта парабола должна касаться прямой $y = 3x + 1$.

Парабола и прямая могут иметь две общие точки, одну общую точку или не иметь общих точек вообще. Случай касания – это случай одной общей точки. Чтобы найти точки пересечения графиков функций $y = ax^2 + 2x + 3$ и $y = 3x + 1$ нужно найти корни уравнения $ax^2 + 2x + 3 = 3x + 1$. Количество корней уравнения будет соответствовать количеству точек пересечения графиков двух данных функций.

В нашем случае уравнение $ax^2 + 2x + 3 = 3x + 1$ должно иметь одно решение. Перепишем уравнение в виде $ax^2 - x + 2 = 0$. При $a \neq 0$ это уравнение имеет 1 решение, когда его дискриминант равен 0. Найдем, при каких значениях a дискриминант уравнения равен 0.

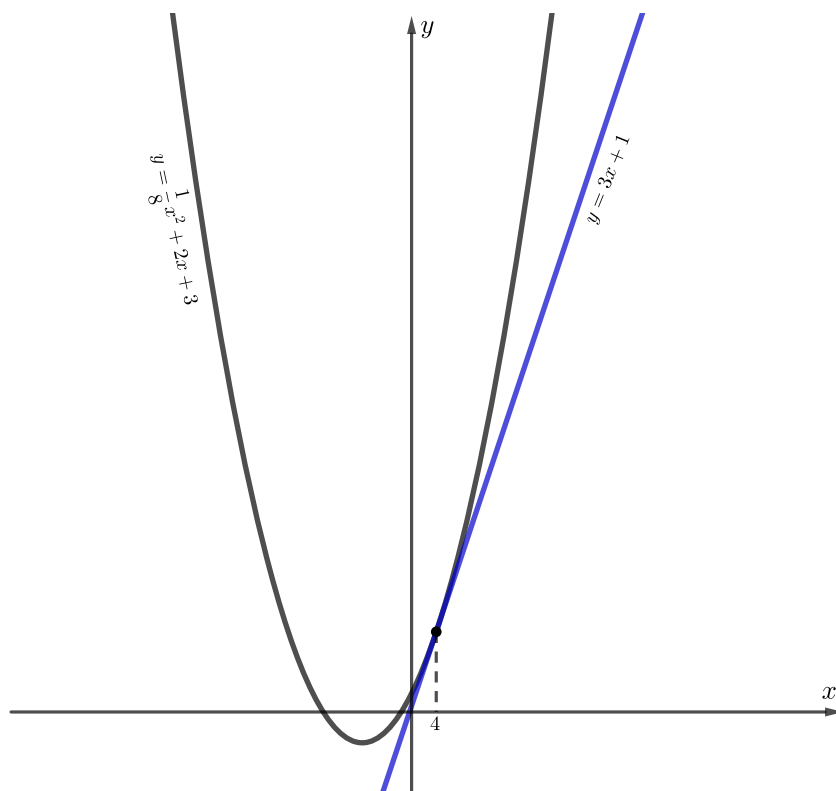


$$D = 1^2 - 4 \cdot a \cdot 2 = 1 - 8a$$

$$1 - 8a = 0 \Leftrightarrow 8a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{8}$$

Таким образом $a = \frac{1}{8}$ – это значение a , при котором прямая $y = 2x + 3$ является касательной к параболе $y = ax^2 + 2x + 3$.

Иллюстрация:



Замечание:

Если нам требуется найти абсциссу точки касания, то подставим найденные значения a в уравнение $ax^2 - x + 2 = 0$ и решим его. Его корень – это искомая абсцисса.

Если $a = \frac{1}{8}$, то мы получаем уравнение $\frac{1}{8}x^2 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 = 0 \Leftrightarrow (x - 4)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$.

► Пример 4

Прямая $y = 5x - 13$ является касательной к графику функции $y = 2x^2 + bx + 37$. Найдите b .

Решение

Вариант 1:

Чтобы прямая $y = 5x - 13$ являлась касательной к графику функции $y = 2x^2 + bx + 37$, значение производной функции $f(x) = 2x^2 + bx + 37$, в точке касания должно совпадать с угловым коэффициентом прямой. Угловым коэффициентом прямой $y = 5x - 13$ – это $k = 5$. Производная функции $f(x) = 2x^2 + bx + 37$ – это $f'(x) = 4x + b$.

Если за x_0 принять абсциссу точки касания, имеем: $4x_0 + b = 5$, т. е. $b = 5 - 4x_0$. Найдем значение исходной функции в точке касания:

$$2x_0^2 + bx_0 + 37 = 2x_0^2 + (5 - 4x_0)x_0 + 37 = -2x_0^2 + 5x_0 + 37.$$

Так как прямая $y = 5x - 13$ – касательная, то ее значение в точке x_0 должно быть таким же, имеем:

$$-2x_0^2 + 5x_0 + 37 = 5x_0 - 13 \Leftrightarrow 2x_0^2 = 50 \Leftrightarrow x_0^2 = 25 \Leftrightarrow x_0 = \pm 5.$$

При $x_0 = -5$ имеем $b = 5 - 4 \cdot (-5) = 25$.

При $x_0 = 5$ имеем $b = 5 - 4 \cdot (5) = -15$.

Как видно, задача имеет два решения, в таких случаях обычно вводится дополнительное условие, позволяющее отбросить одно из них. Например, условие положительности x_0 .

Вариант 2:

Графиком функции $y = 2x^2 + bx + 37$ является парабола. По условию задачи эта парабола должна касаться прямой $y = 5x - 13$. Парабола и прямая могут иметь две общие точки, одну общую точку или не иметь общих точек вообще. Случай касания – это случай одной общей точки. Чтобы найти точки пересечения графиков функций $y = 2x^2 + bx + 37$ и $y = 5x - 13$, нужно найти корни уравнения $2x^2 + bx + 37 = 5x - 13$. Количество корней уравнения будет соответствовать количеству точек пересечения графиков двух данных функций. Значит, в случае касания уравнение $2x^2 + bx + 37 = 5x - 13$ должно иметь одно решение. Перепишем уравнение в виде $2x^2 + (b - 5)x + 50 = 0$. Это уравнение имеет 1 решение, когда его дискриминант равен 0. Найдем, при каких значениях b дискриминант уравнения равен 0.

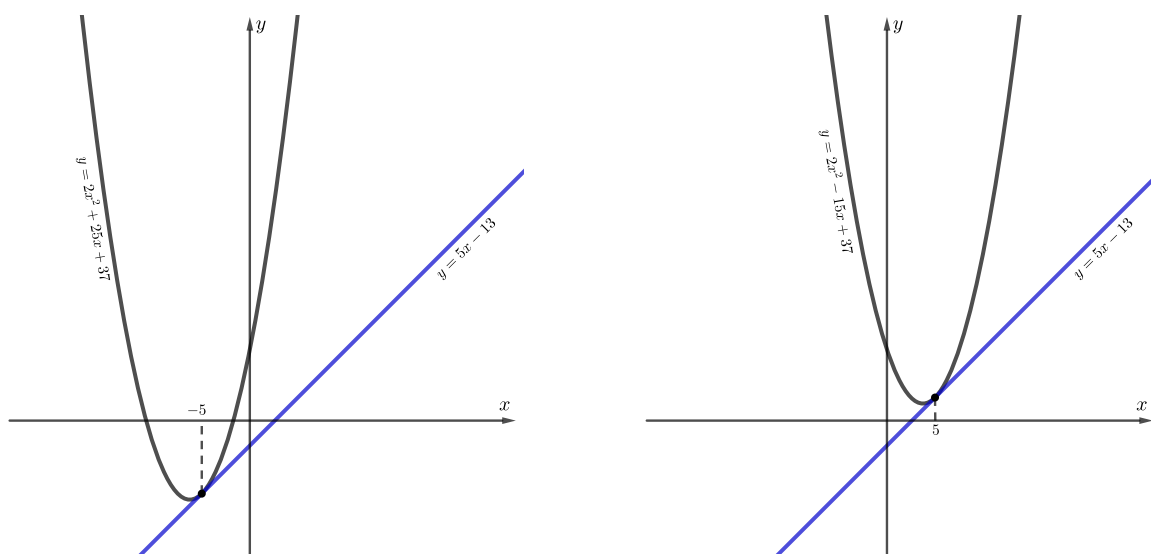
$$D = (b - 5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 50 = (b - 5)^2 - 400$$

$$(b - 5)^2 - 400 = 0 \Leftrightarrow (b - 5)^2 = 400 \Leftrightarrow \begin{cases} b - 5 = 20, \\ b - 5 = -20. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 25, \\ b = -15. \end{cases}$$

Таким образом, прямая $y = 5x - 13$ является касательной к параболе $y = 2x^2 + bx + 37$ при двух значениях b :

$$\begin{cases} b = 25, \\ b = -15. \end{cases}$$

Иллюстрация:



Замечание:

Если нам требуется найти абсциссу точки касания, то подставим найденные значения b в уравнение $2x^2 + (b - 5)x + 50 = 0$ и решим его. Его корень – это искомая абсцисса.

Если $b = 25$, то мы получаем уравнение $2x^2 + 20x + 50 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 10x + 25 = 0 \Leftrightarrow (x + 5)^2 = 0 \Leftrightarrow x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -5$.

Если $b = -15$, то мы получаем уравнение $2x^2 - 20x + 50 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 = 0 \Leftrightarrow (x - 5)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5$.

► Пример 5

Прямая $y = 4x + 3$ является касательной к графику функции $y = x^2 - 2x + c$. Найдите c .

РешениеВариант 1:

Чтобы прямая $y = 4x + 3$ являлась касательной к графику функции $y = x^2 - 2x + c$, значение производной функции $f(x) = x^2 - 2x + c$ в точке касания должно совпадать с угловым коэффициентом прямой. Угловым коэффициентом прямой $y = 4x + 3$ – это $k = 4$. Производная функции $f(x) = x^2 - 2x + c$ – это $f'(x) = 2x - 2$. Если за x_0 принять абсциссу точки касания, имеем: $2x_0 - 2 = 4 \Leftrightarrow 2x_0 = 6 \Leftrightarrow x_0 = 3$. Найдём значение исходной функции в точке касания:

$$x_0^2 - 2x_0 + c = 3^2 - 2 \cdot 3 + c = 3 + c.$$

Так как прямая $y = 4x + 3$ – касательная, то ее значение в точке $x_0 = 3$ должно быть таким же, имеем:

$$3 + c = 4 \cdot 3 + 3 \Leftrightarrow c = 12.$$

Таким образом, $c = 12$ – это значение c , при котором прямая $y = 4x + 3$ является касательной к параболе $y = x^2 - 2x + c$.

Вариант 2:

Графиком функции $y = x^2 - 2x + c$ является парабола. По условию задачи эта парабола должна касаться прямой $y = 4x + 3$. Парабола и прямая могут иметь две общие точки, одну общую точку или не иметь общих точек вообще. Случай касания – это случай одной общей точки. Чтобы найти точки пересечения графиков функций $y = x^2 - 2x + c$ и $y = 4x + 3$, нужно найти корни уравнения $x^2 - 2x + c = 4x + 3$. Количество корней уравнения будет соответствовать количеству точек пересечения графиков двух данных функций. Значит, в нашем случае уравнение $x^2 - 2x + c = 4x + 3$ должно иметь одно решение. Перепишем уравнение в виде $x^2 - 6x + c - 3 = 0$. Это уравнение имеет 1 решение, когда его дискриминант равен 0. Найдём при каких значениях c дискриминант уравнения равен 0.

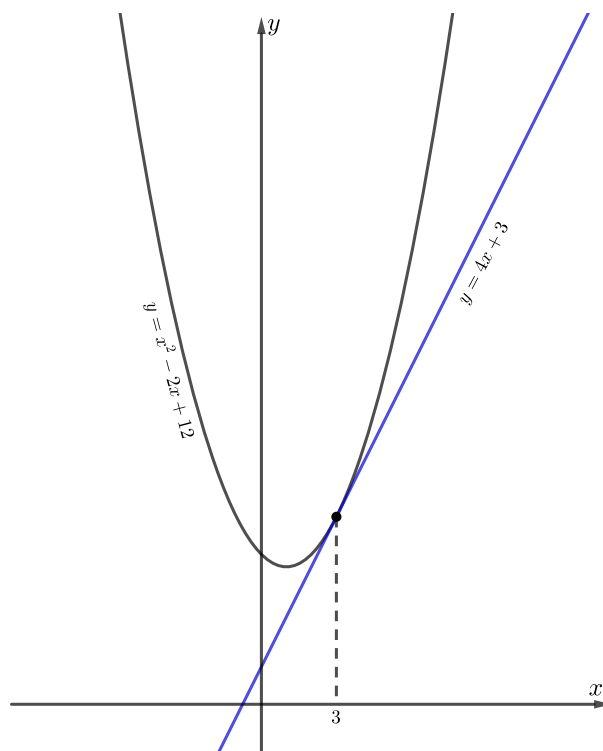
$$D = (-6)^2 - 4 \cdot (c - 3) = 36 - 4c + 12 = 48 - 4c$$

$$48 - 4c = 0 \Leftrightarrow 4c = 48 \Leftrightarrow c = 12$$

Таким образом, $c = 12$ – это значение x , при котором прямая $y = 4x + 3$ является касательной к параболе $y = x^2 - 2x + c$.

Иллюстрация:



Замечание:

Если нам требуется найти абсциссу точки касания, то подставим найденное значение c в уравнение $x^2 - 6x + c - 3 = 0$ и решим его. Его корень – это искомая абсцисса.

Если $c = 12$, то мы получаем уравнение $x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x-3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$.

Задачи для самостоятельного решения**2.1.1 Часть 1****Задача 1**

Прямая $y = -5x - 6$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 8x - 7$. Найдите абсциссу точки касания.

Задача 2

Прямая $y = -3x + 8$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 7x - 6$. Найдите абсциссу точки касания.

Задача 3

Прямая $y = 8x + 8$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 - 3x + 8$. Найдите абсциссу точки касания.

2.1.2 Часть 2**Задача 1**

Прямая $y = -4x - 11$ является касательной к графику функции $y = x^3 + 7x^2 + 7x - 6$. Найдите абсциссу точки касания.

⇒ [Решение задачи](#)



Задача 2

Прямая $y = -x + 4$ является касательной к графику функции $y = x^3 + x^2 - x + 4$. Найдите абсциссу точки касания.

Задача 3

Прямая $y = x + 11$ является касательной к графику функции $y = x^3 + 5x^2 + 9x + 15$. Найдите абсциссу точки касания.

2.1.3 Часть 3

Задача 1

Прямая $y = 3x + 1$ является касательной к графику функции $y = ax^2 + 2x + 3$. Найдите a .

Задача 2

Прямая $y = -5x + 8$ является касательной к графику функции $y = 28x^2 + bx + 15$. Найдите b , учитывая, что абсцисса точки касания больше 0.



⇒ [Решение задачи](#)

Задача 3

Прямая $y = 3x + 4$ является касательной к графику функции $y = 3x^2 - 3x + c$. Найдите c .

Задача 4

Прямая $y = x + 3$ является касательной к графику функции $y = ax^2 + 3x - 2$. Найдите a .

Задача 5

Прямая $y = 6x - 5$ является касательной к графику функции $y = 3x^2 + bx + 7$. Найдите b , учитывая, что абсцисса точки касания больше 0.

Задача 6

Прямая $y = 3x + 4$ является касательной к графику функции $y = 3x^2 - 3x + c$. Найдите c .

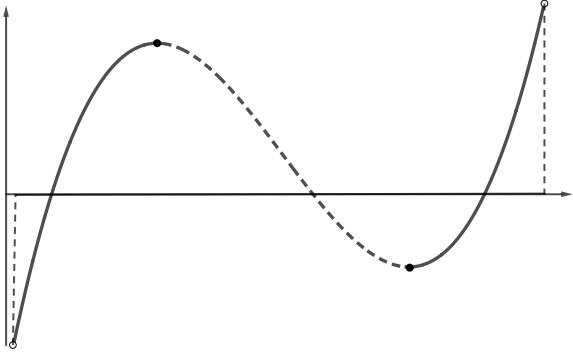
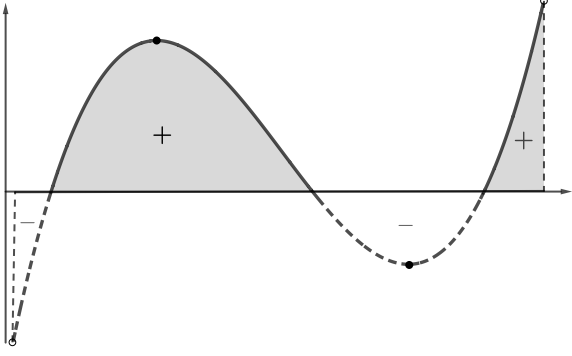
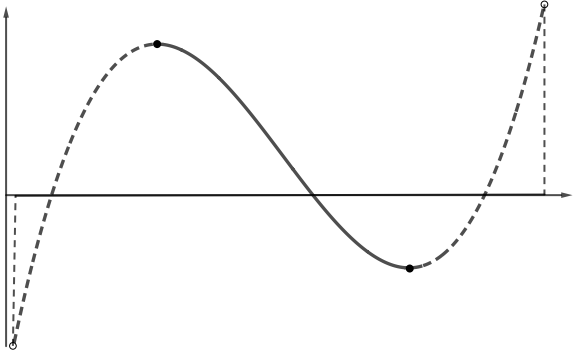
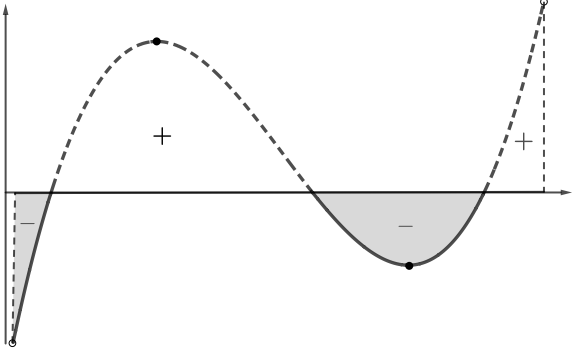
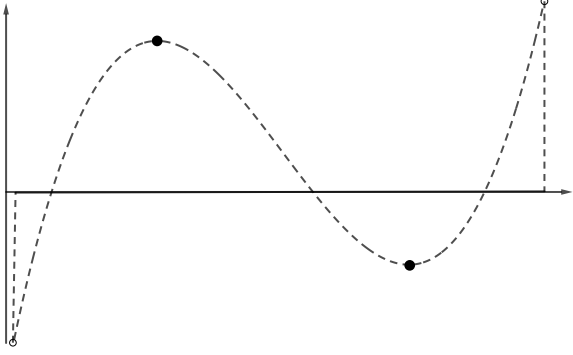
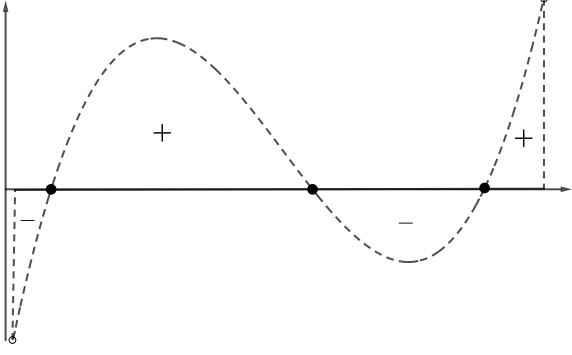
3 Возрастание и убывание функции

3.1 Теория

Достаточное условие монотонности функции.

Если $f'(x) > 0$ в каждой точке интервала (a, b) , то функция $f(x)$ возрастает на этом интервале.

Если $f'(x) < 0$ в каждой точке интервала (a, b) , то функция $f(x)$ убывает на этом интервале.

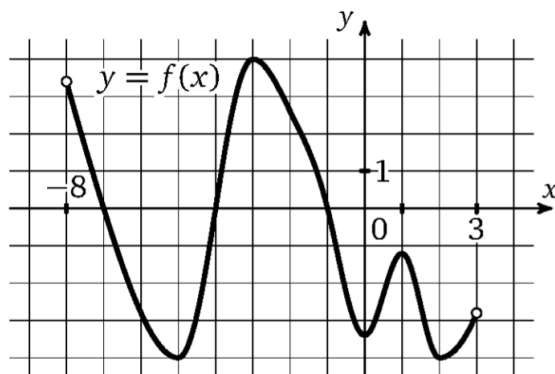
Дан график функции $y = f(x)$	Дан график производной функции $y = f'(x)$
Если нужно определить промежутки, где $f'(x) > 0$, то мы ищем промежутки, где функция $y = f(x)$ возрастает	Если нужно определить промежутки, где $f'(x) > 0$, то мы ищем промежутки, на которых график производной находится выше оси Ox или, иначе говоря, точки графика с положительной координатой по оси Oy
	
Если нужно определить промежутки, где $f'(x) < 0$, то мы ищем промежутки, где функция $y = f(x)$ убывает	Если нужно определить промежутки, где $f'(x) < 0$, то мы ищем промежутки, на которых график производной находится ниже оси Ox или, иначе говоря, точки графика с отрицательной координатой по оси Oy
	
Если нужно определить точки, где $f'(x) = 0$, то мы ищем точки минимума или максимума функция $y = f(x)$	Если нужно определить точки, где $f'(x) = 0$, то мы ищем точки, в которых график производной пересекает ось Ox
	

3.2 Задачи для самостоятельного решения

3.2.1 Часть 1

► Пример

На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-8; 3)$. Определите количество целых чисел x_i , для которых $f'(x_i)$ отрицательна.



Решение

Как мы знаем, на промежутках убывания производная дифференцируемой функции неположительна. При этом она равна 0 только в точках, в которых касательная к графику этой функции горизонтальна.

На промежутке возрастания производная дифференцируемой функции неотрицательна. При этом она равна 0 только в точках, в которых касательная к графику этой функции горизонтальна.

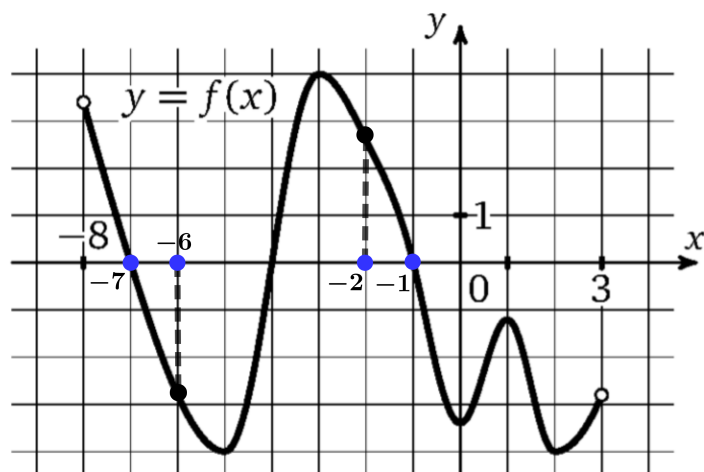
Значит, необходимо выделить промежутки убывания функции, указать на этих промежутках целые числа, определить те из них, в которых производная отрицательна, а затем найти количество таких чисел.

Промежутки убывания функции: $(-8; -5]$, $[-3; 0]$, $[1; 2]$, целые числа, принадлежащие этим промежуткам $\{-7; -6; -5; -3; -2; -1; 0; 1; 2\}$.

В конечных точках промежутков $\{-5; -3; 0; 1; 2\}$ значение производной равно 0, в остальных точках $\{-7; -6; -2; -1\}$ — производная отрицательна.

Примечание: Иногда в данных задачах вопрос могут формулировать по-другому: "определите количество целых точек в который производная $f'(x)$ отрицательна". В этом случае мы ищем целые точки на оси Ox , в которых наша функция убывает. При этом мы смотрим именно на целые точки по оси Ox .

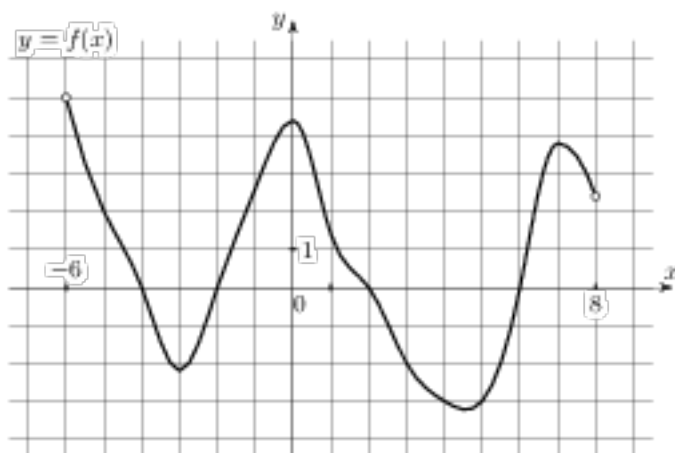
Значение функции в точке может быть не целым, то есть, если функция $f(x)$ в точке $x = 2$, принимает значения $f(x) = -5,5$, но при этом в этой точке функция убывает, то для нас это будет целая точка, в которой производная функции отрицательна.



Ответ: 4.

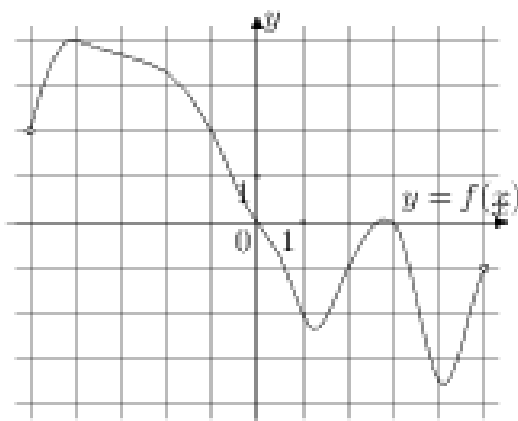
Задача 1

На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-6; 8)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции положительна.



Задача 2

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-5; 5)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции отрицательна.

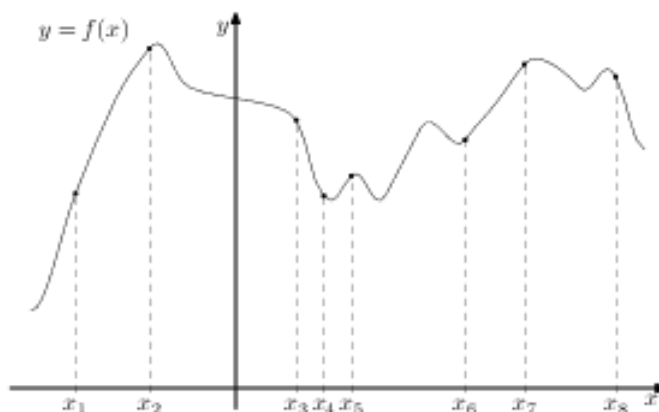


⇒ Решение задачи



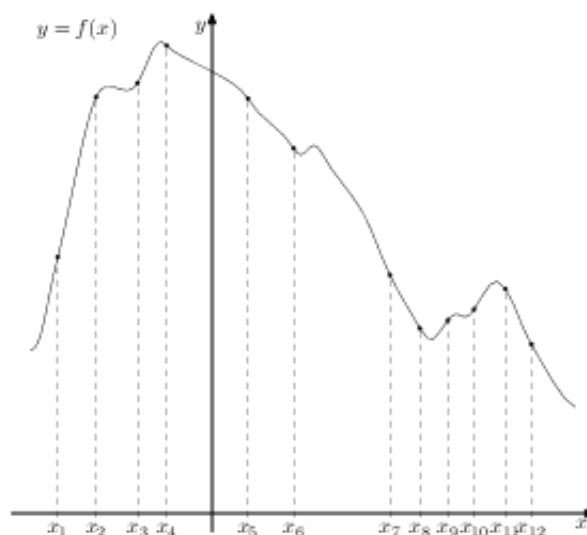
Задача 3

На рисунке изображён график функции $f(x)$ и восемь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?



Задача 4

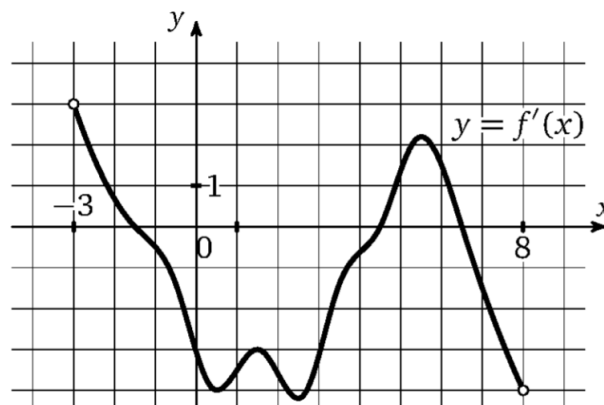
На рисунке изображён график функции $f(x)$ и двенадцать точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



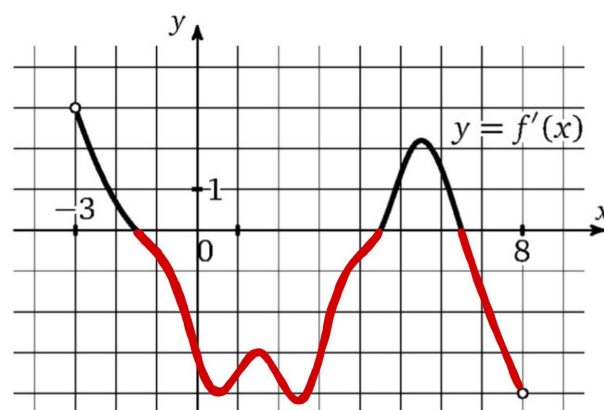
3.2.2 Часть 2

► Пример 1

На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-3; 8)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых чисел, входящих в эти промежутки.

**Решение**

Решение. Заметим, что нам дан график именно производной $y = f'(x)$. На промежутках убывания производная дифференцируемой функции $f(x)$ неположительна (на промежутках возрастания соответственно неотрицательна). Нас интересуют промежутки, где производная неположительна, то есть, где график производной находится не выше оси Ox .

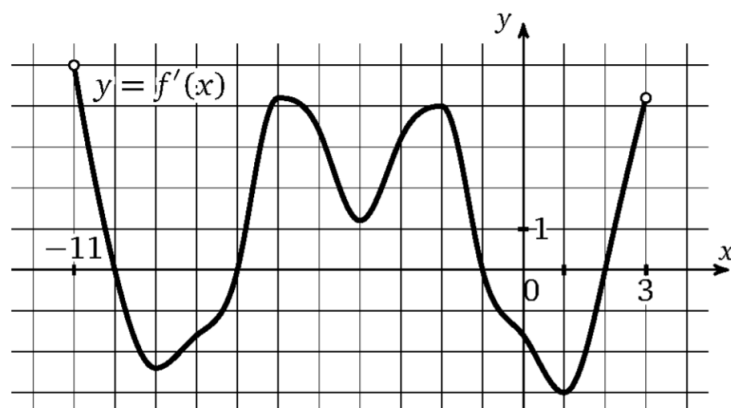


У нас таких промежутков два: $[-1, 5]$ и $[6, 8]$. Целые числа, входящие в эти промежутки, — это $-1; 0; 1; 2; 3; 4; 7$, то есть искомая сумма равна $-1 + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 7 = 16$.

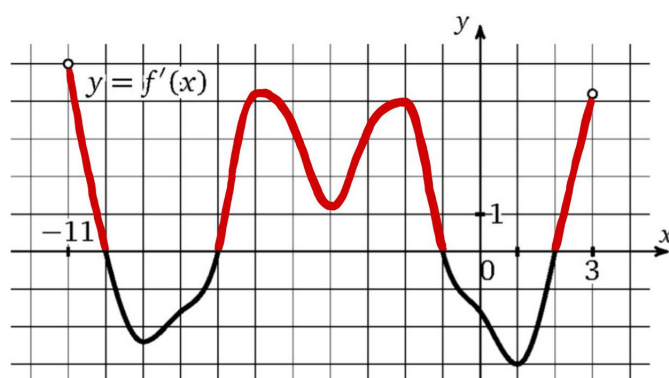
Ответ: 16.

► Пример 2

На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-11; 3)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.

**Решение**

Заметим, что нам дан график именно производной $y = f'(x)$. На промежутках возрастания производная дифференцируемой функции $f(x)$ неотрицательна (на промежутках убывания, соответственно, неположительна). Нас интересуют промежутки, где производная неотрицательна, то есть, где график производной находится не ниже оси Ox .

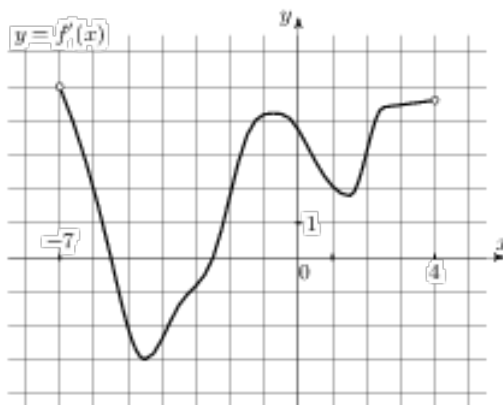


В нашем случае их 3: $(-11; -10]$, $[-7; -1]$ и $[2; 3]$, наибольшую длину из них, очевидно, имеет промежуток $[-7; -1]$, его длина равна $-1 - (-7) = 6$.

Ответ: 6.

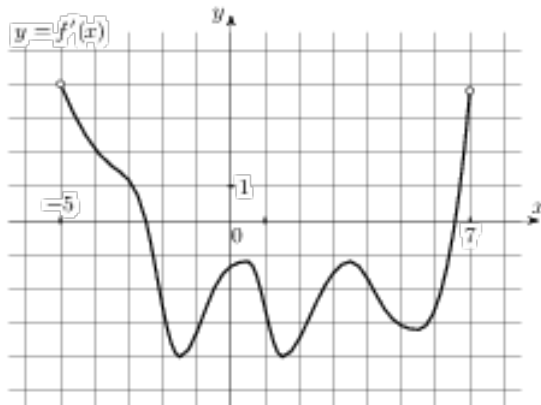
Задача 1

На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-7; 4)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.



Задача 2

На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-5; 7)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.

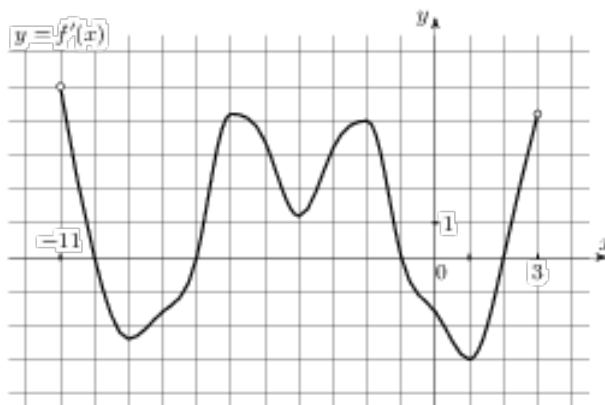


⇒ Решение задачи



Задача 3

На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-11; 3)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.

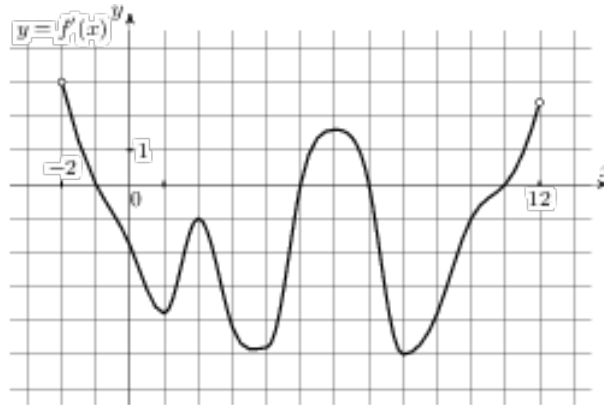


⇒ Решение задачи



Задача 4

На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-2; 12)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.



Начни заниматься
с нами уже сегодня



Преподы, которые влюбят тебя в ЕГЭ



Игорь Уколов

отец Профиматики

Выпускник мехмата МГУ

Лично подготовил 30+ стобалльников

3 раза сдал ЕГЭ на 100 баллов

Опыт подготовки к ЕГЭ — 15 лет

С Игорем ты научишься решать быстро и качественно задачи, которые обязан решить каждый



Влад Вуль

отец корги и не только

Диплом факультета прикладной математики МГОУ

Обладатель многократных премий «Репетитор года» PROFI.RU

8 раз сдал ЕГЭ на 100 баллов

Преподаёт математику с 2006 года

С Владом ты поймёшь все самые сложные задачи ЕГЭ. Объясняет математику предельно понятно. Ты будешь в шоке от того, как на самом деле всё легко.



Антон Гурко

преподаватель высшей математики

Выпускник ВМК МГУ

Учитель высшей категории со стажем более 10 лет

Призёр олимпиады для учителей: «Команда большой страны»

Ведущий эксперт ЕГЭ, член конфликтной комиссии по проверке ЕГЭ по математике и рассмотрению апелляций

Ещё больше
полезных методичек
в нашем Telegram-
канале



Отзывы
о школе



4 Точки экстремума. Точки минимума и точки максимума

4.1 Теория

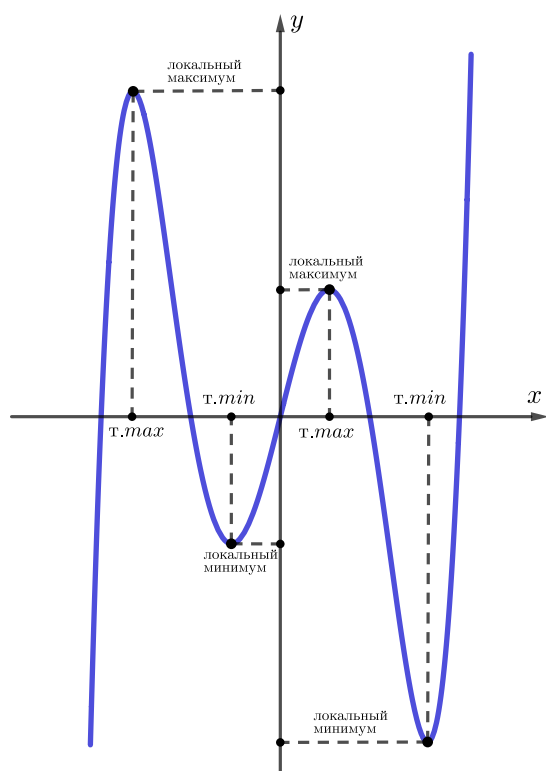
Важное замечание. В этом разделе мы считаем, что функции, с которыми мы имеем дело, имеют производную во всех точках интервала, на котором они определены. В задаче 8 профильного ЕГЭ мы будем иметь дело только с такими функциями.

Определения:

Точки, в которых производная $f'(x)$ равна 0 или не существует, называются критическими точками функции $f(x)$.

Экстремум функции — минимум или максимум этой функции.

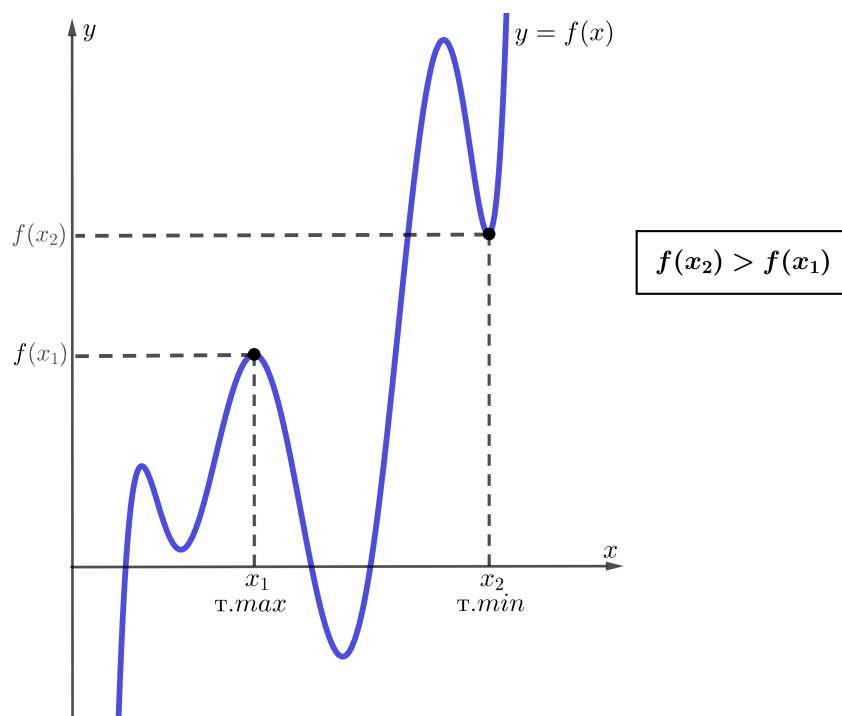
Точка экстремума x_0 — точка, в которой функция достигает минимума или максимума.



Кстати, значение функции определяется по координате y , а точка экстремума по координате x .

!

Важное замечание. Значение в точке минимума может быть больше, чем значение в точке максимума.

**Необходимое условие экстремума:**

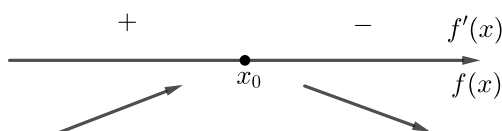
Если x_0 — точка экстремума функции $f(x) \Rightarrow f'(x) = 0$

То есть, во всех точках, где $f(x)$ достигает локального min / max, производная равна 0.

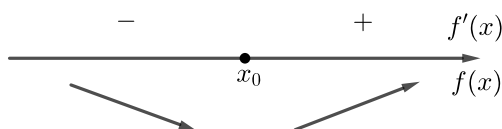
Достаточное условие экстремума:

Пусть x_0 — точка в которой $f'(x) = 0$.

Если производная при переходе через точку x_0 меняет свой знак с плюса на минус, то x_0 — точка максимума.



Если производная при переходе через точку x_0 меняет свой знак с минуса на плюс, то x_0 — точка минимума.

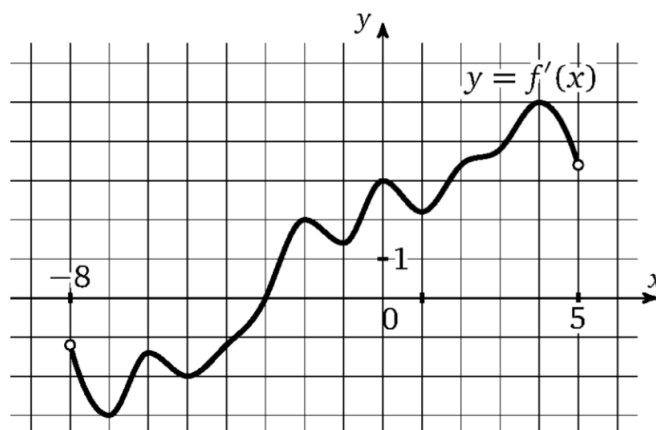


4.2 Задачи

4.2.1 Часть 1

► Пример

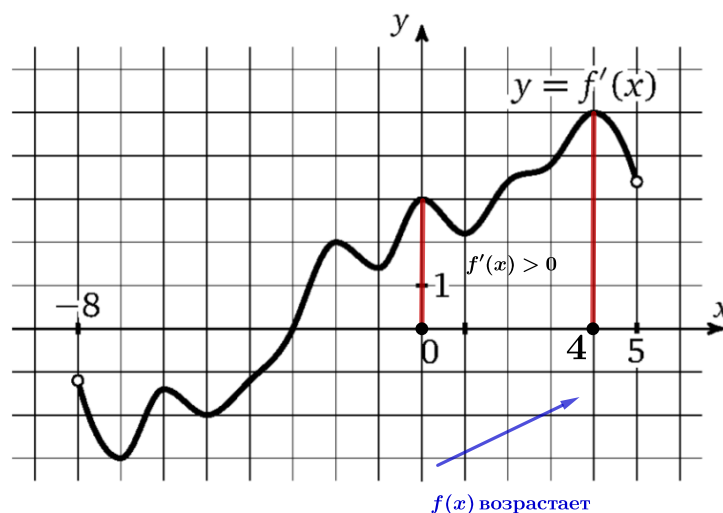
На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8; 5)$. В какой точке отрезка $[0; 4]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?



Решение

Заметим, что нам дан график именно производной $y = f'(x)$. На промежутках убывания дифференцируемой функции $f(x)$ ее производная неположительна (на промежутках возрастания соответственно неотрицательна).

Для начала отметим на рисунке границы отрезка, о котором идет речь в условии задачи:



Заметим, что на этом отрезке **производная** функции **положительна** (график находится выше оси Ox).

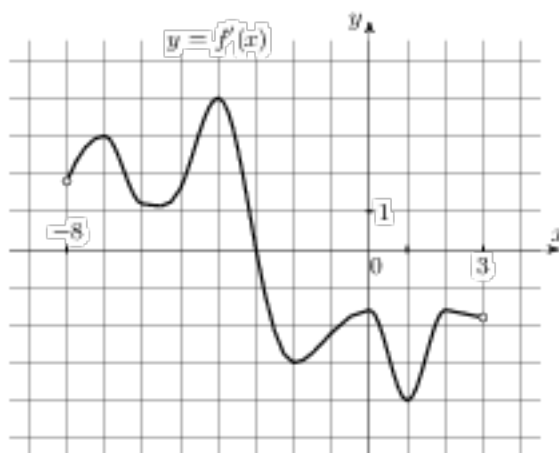
Значит, сама функция $f(x)$ **возрастает**, а значит, чем больше значение x , тем больше значение функции $f(x)$.

Поэтому наименьшее значение на этом отрезке она принимает в левом конце отрезка, то есть в точке 0.

Ответ: 0.

Задача 1

На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8; 3)$. В какой точке отрезка $[-3; 2]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?

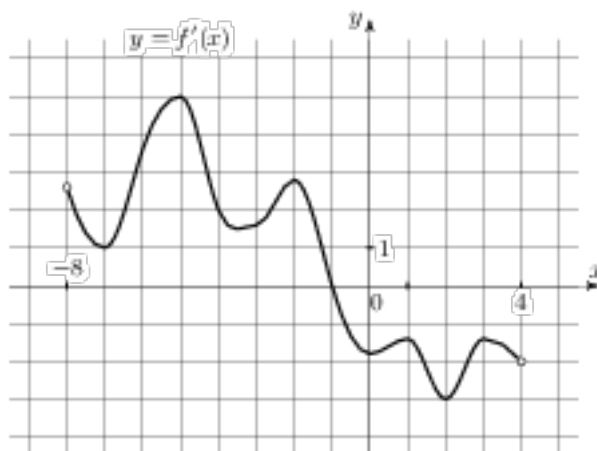


⇒ Решение задачи



Задача 2

На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8; 4)$. В какой точке отрезка $[-7; -3]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?



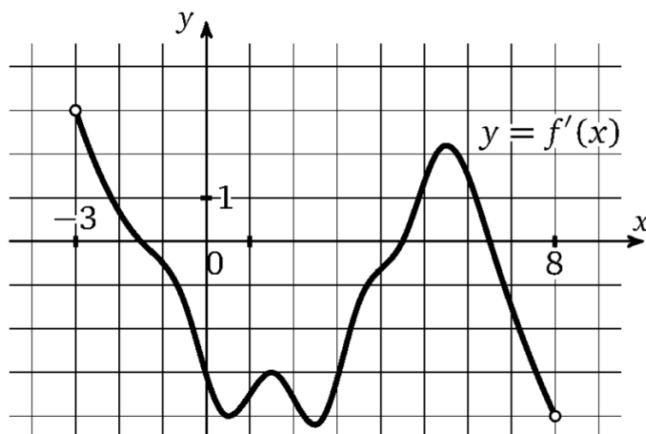
⇒ Решение задачи



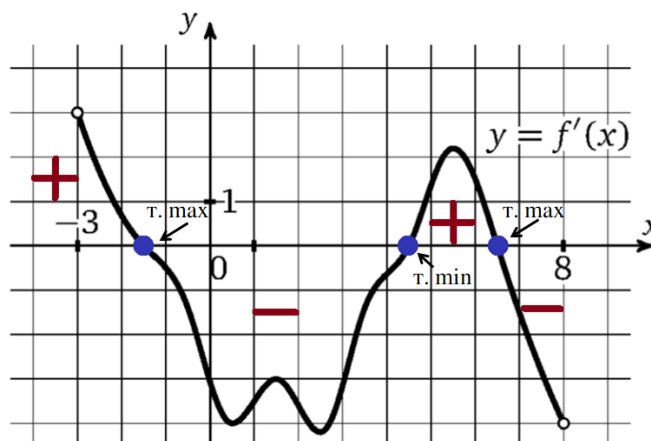
4.2.2 Часть 2

► Пример

На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-3; 8)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-2; 7]$.

**Решение**

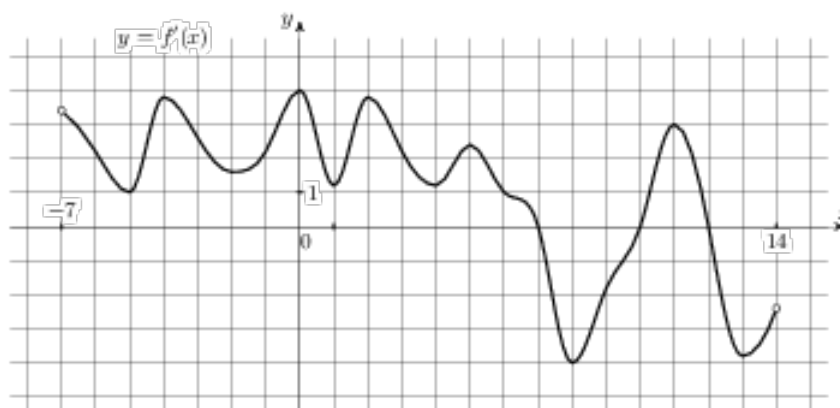
В точке максимума производная функции равна 0 либо не существует. Видно, что таких точек, в которых производная равна 0 и которые принадлежат отрезку $[-2; 7]$ – три: $-1,5$; $4,5$; $6,5$. При этом в точке $4,5$ производная слева отрицательна, а справа положительна – это точка минимума.



В точках $-1,5$ и $6,5$ производная меняет знак с «+» на «-» – это точки максимума.
 Ответ: 2.

Задача 1

На рисунке изображен график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-7; 14)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-6; 9]$.

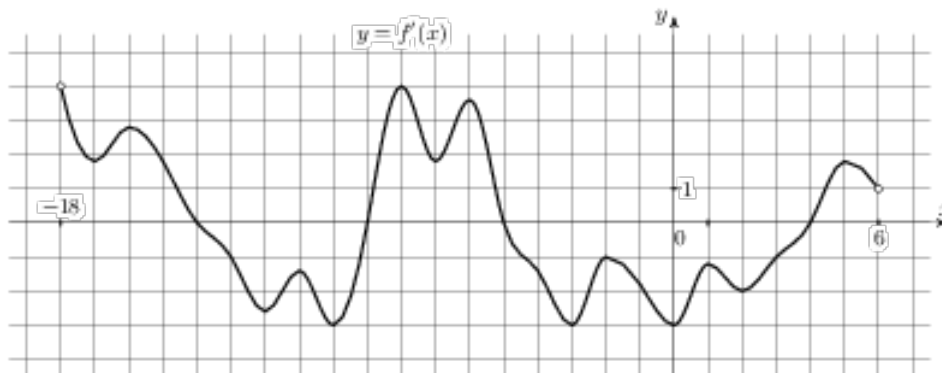


⇒ Решение задачи



Задача 2

На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-18; 6)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-13; 1]$.

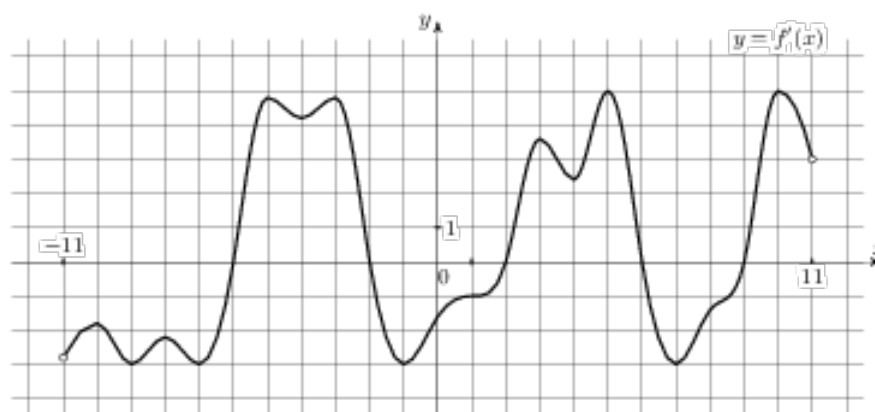


⇒ Решение задачи



Задача 3

На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-11; 11)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-10; 10]$.

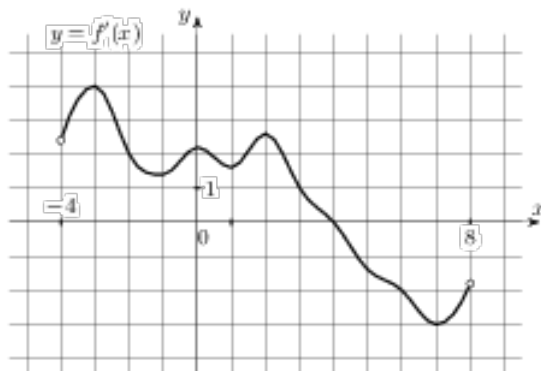


⇒ Решение задачи



Задача 4

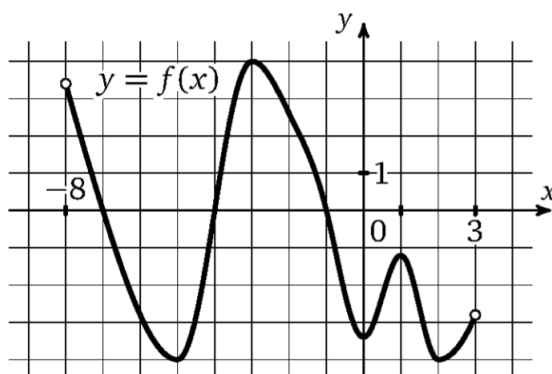
На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-4; 8)$. Найдите точку экстремума функции $f(x)$, принадлежащую отрезку $[-2; 6]$.



4.2.3 Часть 3

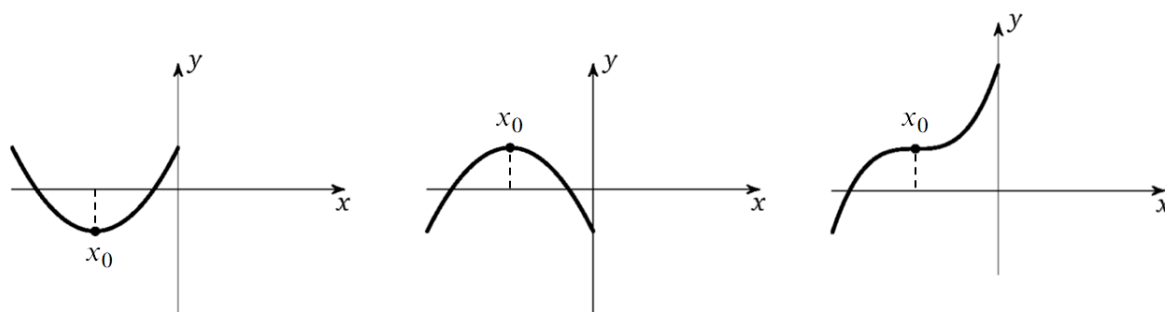
► Пример

На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-8; 3)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.



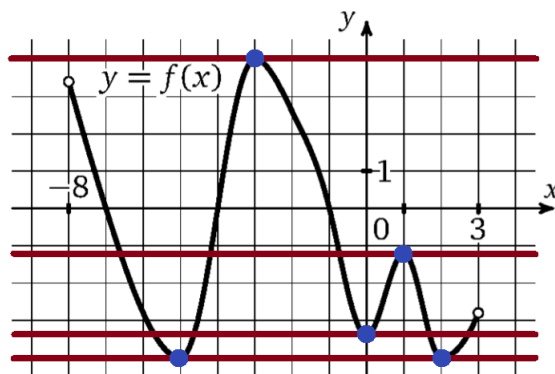
Решение

В школьном курсе возможны три различные "картинки", которые соответствуют фразе "в точке x_0 производная функции $f(x)$ равна 0".



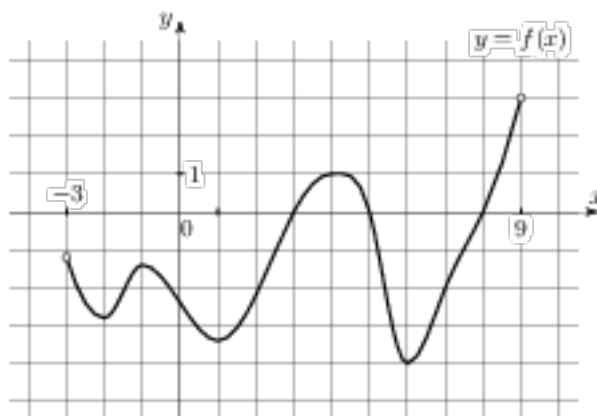
Третий вариант в задачах №8 профильного ЕГЭ по математике не встречается, поэтому отметим на рисунке все места, где встречаются первые два варианта, и сосчитаем их количество.

Производная функции в точке x_0 равна 0 тогда и только тогда, когда касательная к графику функции, проведенная в точке с абсциссой x_0 , горизонтальна. Отсюда следует, что можно приложить линейку и, двигая «вниз», сосчитать количество точек с горизонтальной касательной. Таких точек у нас 5. На рисунке они выделены синим. Ответ: 5



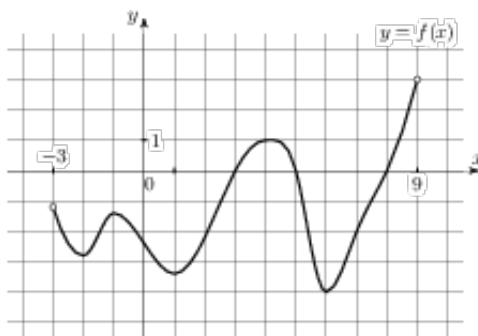
Задача 1

На рисунке изображен график функции $f(x)$, определенной на интервале $(-3; 9)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.



Задача 2

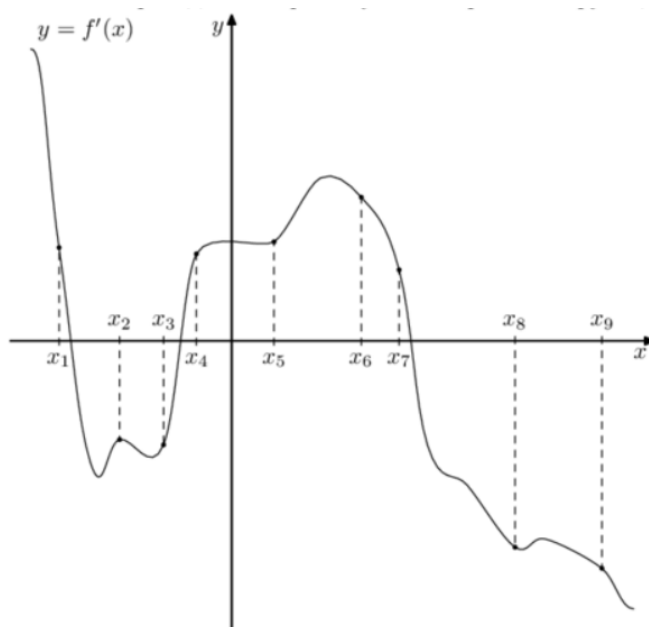
На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-3; 9)$. Найдите количество решений уравнения $f'(x) = 0$ на отрезке $[0; 8]$.



4.2.4 Часть 4

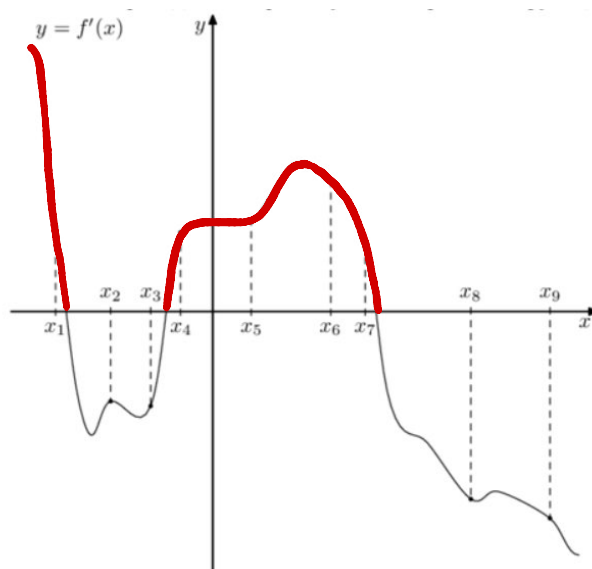
► Пример

На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$ - производной функции $f(x)$. На оси абсцисс отмечены девять точек: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9$. Сколько из этих точек лежит на промежутках возрастания функции $f(x)$?



Решение

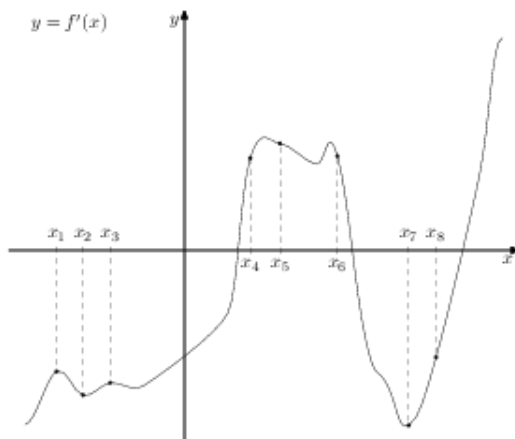
Нам дан график производной. Нас интересуют точки на промежутках возрастания. В этих точках производная функции положительна. Значит, график производной находится выше оси Ox . Выделим промежутки, где график производной $y = f'(x)$ находится выше оси.



Видим, что точки x_1, x_4, x_5, x_6, x_7 лежат в выделенных промежутках. Значит ответ: 5 точек.

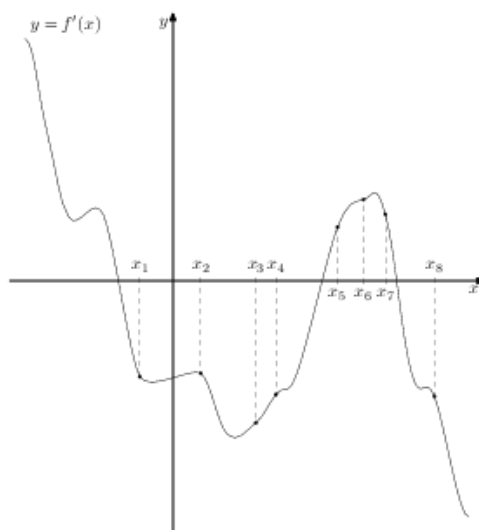
Задача 1

На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. На оси абсцисс отмечены восемь точек: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$. Сколько из этих точек лежит на промежутках возрастания функции $f(x)$?



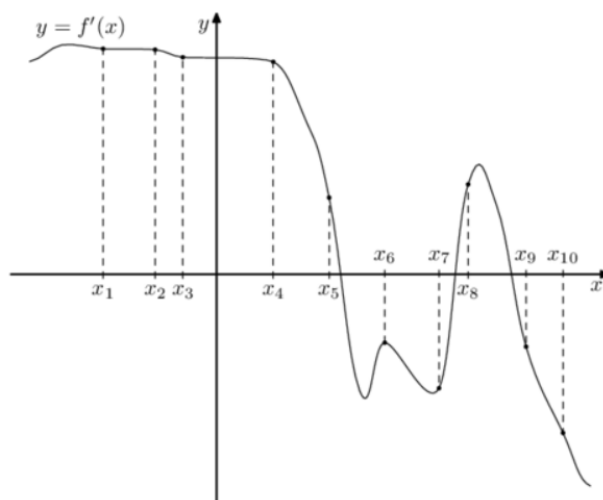
Задача 2

На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. На оси абсцисс отмечены восемь точек: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$. Сколько из этих точек лежит на промежутках убывания функции $f(x)$?



Задача 3

На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. На оси абсцисс отмечены десять точек: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}$. Сколько из этих точек лежит на промежутках убывания функции $f(x)$?



5 Физический смысл производной

5.1 Теория

Если материальная точка движется прямолинейно вдоль некоторой оси x и ее координата вдоль этой оси изменяется по закону $x(t)$, то скоростью материальной точки в момент времени t_0 мы будем считать значение производной $x'(t)$ при $t = t_0$:

$$v(t) = x'(t).$$

5.2 Задачи

5.2.1 Часть 1. Ищем скорость материальной точки в момент времени $t = t_0$

► Пример 1

Материальная точка движется прямолинейно по закону

$$x(t) = 6t^2 - 48t + 17,$$

(где x – расстояние от точки отсчета в метрах, t – время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t = 9$.

Решение

Скорость материальной точки $v(t)$ в момент времени $t = 9$ это значение производной $x'(t)$ при $t = 9$:

$$v(t) = x'(t) = (6t^2 - 48t + 17)' = 12t - 48;$$

$$v(9) = 12 \cdot 9 - 48 = 60 \text{ м/с}$$

► Пример 2

Материальная точка движется прямолинейно по закону

$$x(t) = \frac{1}{2}t^3 - 3t^2 + 2t,$$

(где x – расстояние от точки отсчета в метрах, t – время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость в момент времени $t = 6$ с.



Решение

Скорость материальной точки $v(t)$ в момент времени $t = 6$ это значение производной $x'(t)$ при $t = 6$:

$$v(t) = x'(t) = \left(\frac{1}{2}t^3 - 3t^2 + 2t \right)' = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot t^2 - 3 \cdot 2 \cdot t + 2 = \frac{3}{2}t^2 - 6t + 2;$$

$$v(6) = \frac{3}{2} \cdot 6^2 - 6 \cdot 6 + 2 = 20 \text{ м/с.}$$

Задача 1

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 6t^2 - 48t + 17$, где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите ее скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t = 9$ с.

Задача 2

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \frac{1}{2}t^3 - 3t^2 + 2t$, где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите ее скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t = 6$ с.

⇒ **Решение задачи**

**Задача 3**

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = -t^4 + 6t^3 + 5t + 23$, где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите ее скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t = 3$ с.

⇒ **Решение задачи**

**5.2.2 Часть 2. Ищем момент времени $t = t_0$ в который скорость материальной точки $v(t) = v_0$** **► Пример**

Материальная точка движется прямолинейно по закону

$$x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 - 5t + 3,$$

(где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). В какой момент времени ее скорость была равна 2 м/с?

Решение

Скорость материальной точки $v(t)$ в момент времени $t = t_0$ это значение производной $x'(t)$ при $t = t_0$:

$$v(t) = x'(t) = \left(\frac{1}{3}t^3 - 3t^2 - 5t + 3 \right)' = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot t^2 - 3 \cdot 2 \cdot t - 5 = t^2 - 6t - 5.$$

Нас интересует момент t_0 , когда $v(t_0) = 2$. Тогда:

$$t_0^2 - 6t_0 - 5 = 2 \Leftrightarrow t_0^2 - 6t_0 - 7 = 0$$

Решим это квадратное уравнение:

$$D = 6^2 - 4 \cdot (-7) = 64 = 8^2$$

$$\begin{cases} t_0 = \frac{6+8}{2} = 7, \\ t_0 = \frac{6-8}{2} = -1. \end{cases}$$

Ввиду того, что t_0 – время, оно не может быть отрицательным, поэтому искомое время 7 секунд.

Задача 1

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = t^2 - 13t + 23$, где x – расстояние от точки отсчета в метрах, t – время в секундах, измеренное с начала движения. В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 3 м/с?

⇒ **Решение задачи**



Задача 2

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 - 5t + 3$, где x – расстояние от точки отсчета в метрах, t – время в секундах, измеренное с начала движения. В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 2 м/с?

⇒ **Решение задачи**



Задача 3

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = t^3 - 9t^2 + 2t + 30$ (где x – расстояние от точки отсчета в метрах, t – время в секундах, измеренное с начала движения). В какой момент времени ее скорость была равна 50 м/с?

6 Первообразная

6.1 Теория

Определение

$F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$.

► Пример 1

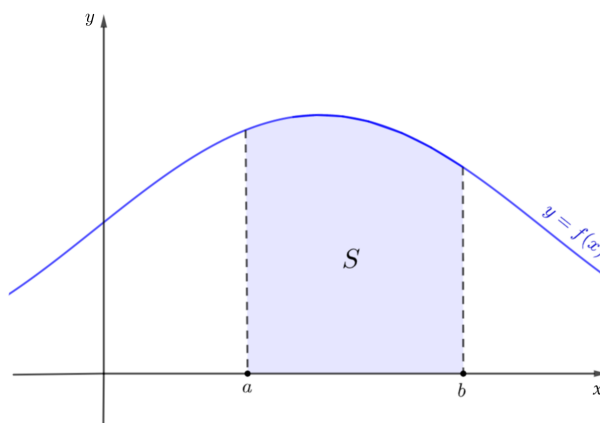
Функция x^2 является первообразной функции $2x$.

Функция $\sin x$ является первообразной функции $\cos x$.

Примечание: У одной и той же функции может быть несколько первообразных. Например, функции $x^2 + 1$, $x^2 - 8$, $x^2 - 1000$ являются первообразными функции $2x$. Более общий факт звучит так:

1. Если $F(x)$ первообразная функции $f(x)$, то для любого действительного числа c $F(x) + c$ тоже первообразная $f(x)$.
2. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ две первообразные функции $f(x)$, то они отличаются на некоторую константу. Иначе говоря $F_1(x) - F_2(x) = \text{const}$.

Первообразная связана с площадью под графиком. Тут нам понадобится картинка:



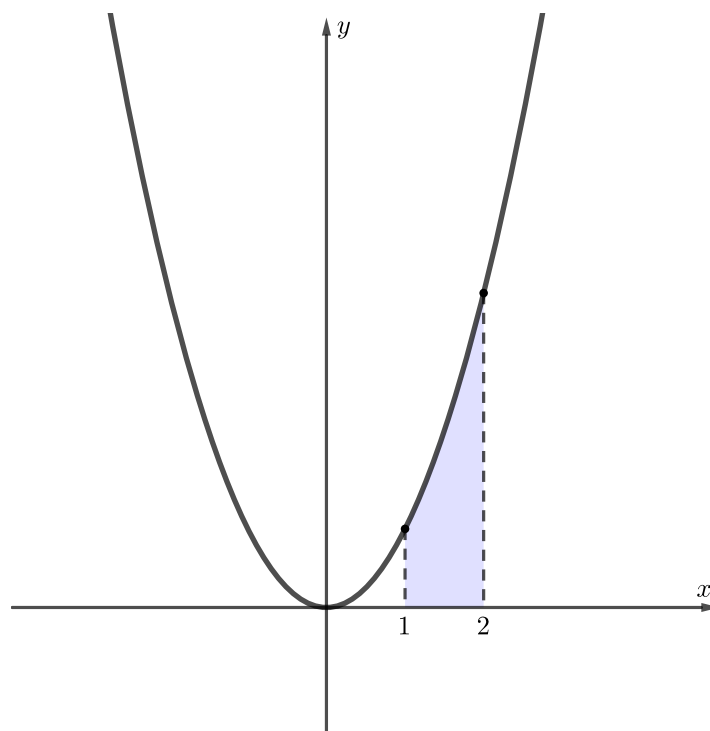
У нас есть график некоторой непрерывной функции $y = f(x)$. Мы зафиксировали на оси Ox какие-то точки a и b . Мы хотим посчитать площадь под графиком функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Пусть $F(x)$ – это некоторая первообразная функции $f(x)$. Оказывается, площадь S есть разность значений первообразной $F(x)$ в точке b и точке a , то есть:

$$S = F(b) - F(a)$$

Это соотношение также называется формулой Ньютона-Лейбница.

► Пример 2

Вычислим площадь под графиком функции $f(x) = x^2$ на отрезке $[1; 2]$.

**Решение**

Попробуем найти такую функцию, производная от которой равна x^2 .
Заметим, что

$$\left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{3x^2}{3} = x^2.$$

Это значит что $\frac{x^3}{3}$ является одной из первообразных функции x^2 .

Тогда возьмём $F(x) = \frac{x^3}{3}$.

По формуле площади под графиком:

$$S = F(2) - F(1) = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

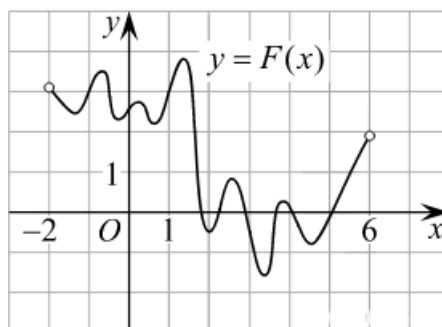
Площадь под графиком $\frac{7}{3}$.

6.2 Задачи

6.2.1 Часть 1. По графику первообразной $y = F(x)$ определяем количество решений уравнения $f(x) = 0$ на заданном отрезке.

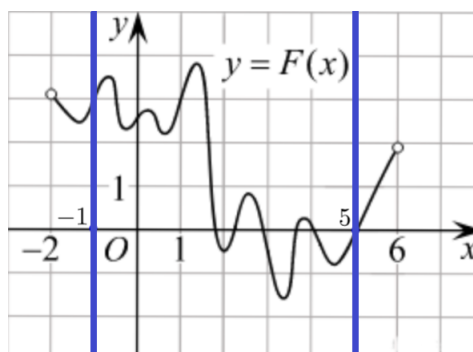
► Пример

На рисунке изображён график функции $y = F(x)$, одной из первообразных некоторой функции $f(x)$, определённой на интервале $(-2; 6)$. Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[-1; 5]$.



Решение:

Отметим отрезок от -1 до 5.



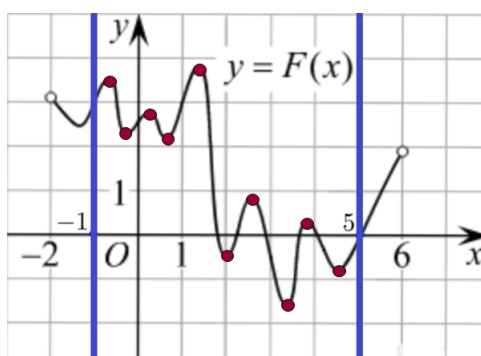
Если $F(x)$ одна из первообразных функций $f(x)$, то можно говорить, что $f(x) = F'(x)$. Значит мы можем в условии нашего задания вместо $f(x)$ написать $F'(x)$. Тогда наша задача примет вид:

На рисунке изображён график функции $y = F(x)$, определённой на интервале $(-2; 6)$. Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения $F'(x) = 0$ на отрезке $[-1; 5]$.

Эту задачу мы уже умеем решать.

Нам дан график функции, а просят понять, сколько существует точек, в которых производная равна 0.

Можно считать, что производная равна 0 в точках минимума и максимума. Значит нам надо найти точки минимума и максимума у нашей функции на отрезке $[-1; 5]$ и посчитать их количество.

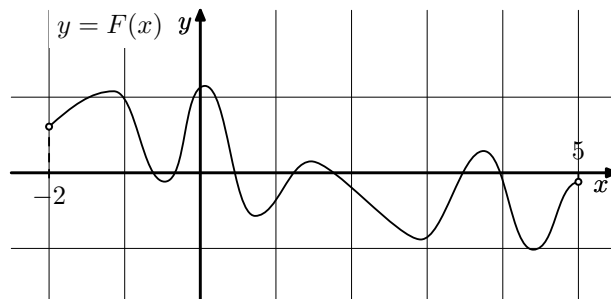


Получилось 10 точек, а значит, наше уравнение имеет 10 корней.

Ответ: 10.

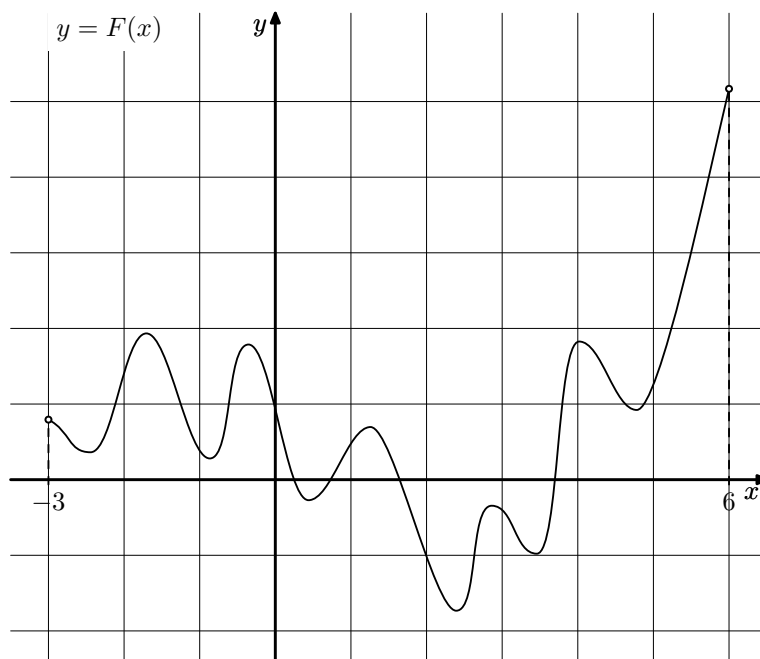
Задача 1

На рисунке изображён график функции $y = F(x)$ — одной из первообразных функции $f(x)$, определённой на интервале $(-2; 5)$. Найдите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[-1; 4]$.



Задача 2

На рисунке изображён график функции $y = F(x)$ — одной из первообразных функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3; 6)$. Найдите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[-2; 5]$.



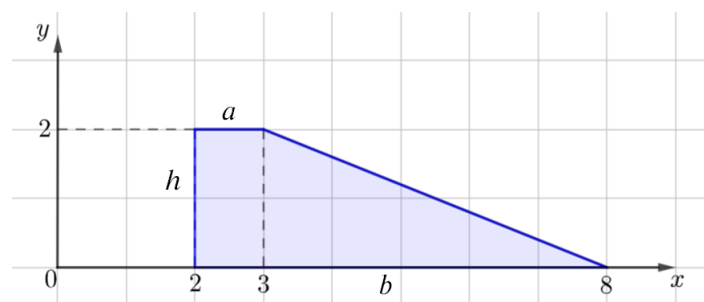
6.2.2 Часть 2. Связь первообразной и площади под графиком. Тип №1

► Пример

На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$ (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите $F(8) - F(2)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.

**Решение:**

Нам надо найти $F(8) - F(2)$. Вспоминая теорию, мы понимаем, что надо найти площадь под графиком функции $y = f(x)$ на отрезке $[2; 8]$. Заштрихуем эту площадь:



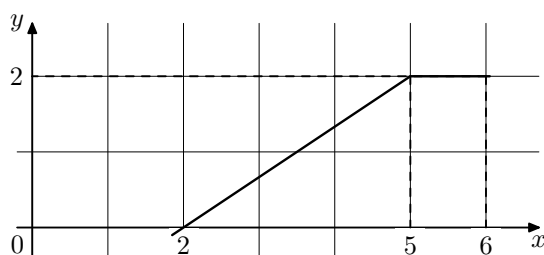
Перед нами трапеция. Площадь трапеции равна $S_{\text{тр}} = \frac{a+b}{2} \cdot h$. Верхнее основание равно $a = (3 - 2) = 1$, нижнее основание равно $b = (8 - 2) = 6$ и высота $h = 2$. Тогда:

$$S = 2 \cdot \frac{1+6}{2} = 7$$

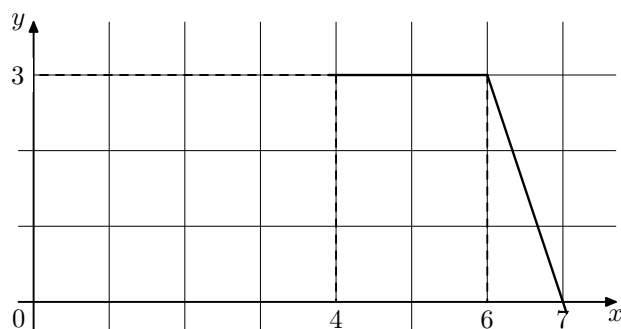
Ответ: 7.

Задача 1

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите $F(6) - F(2)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.

**Задача 2**

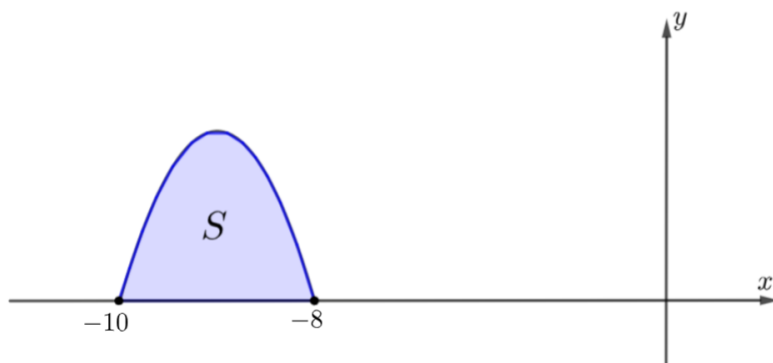
На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите $F(7) - F(4)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.



6.2.3 Часть 3. Связь первообразной и площади под графиком. Тип №2

► Пример

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = -x^3 - 27x^2 - 240x - 8$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.



Решение:

Нам дано, что $F(x) = -x^3 - 27x^2 - 240x - 8$. Нас просят найти площадь S . Воспользуемся формулой Ньютона-Лейбница: $S = F(b) - F(a)$.

В нашем случае $S = F(-8) - F(-10)$. Вычислим:

$$F(-8) = -(-8)^3 - 27 \cdot (-8)^2 - 240 \cdot (-8) - 8 = 512 - 27 \cdot 64 + 30 \cdot 8 \cdot 8 - 8 = 512 + 3 \cdot 64 - 8 = 696$$

$$F(-10) = -(-10)^3 - 27 \cdot (-10)^2 - 240 \cdot (-10) - 8 = 1000 - 2700 + 2400 - 8 = 692$$

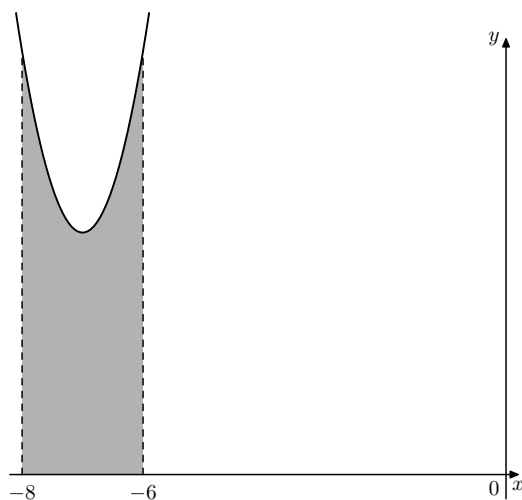
Теперь мы можем посчитать площадь:

$$S = F(-8) - F(-10) = 696 - 692 = 4$$

Ответ: 4.

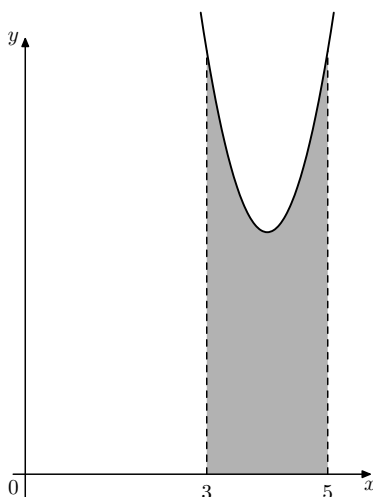
Задача 1

На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = x^3 + 21x^2 + 151x - 1$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.



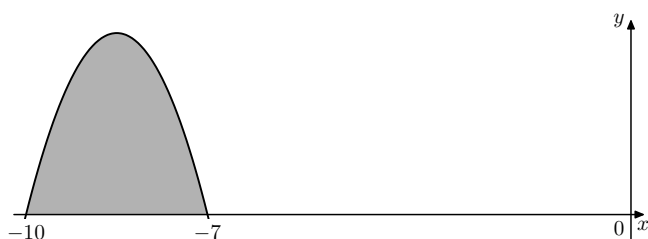
Задача 2

На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = x^3 - 12x^2 + 52x - \frac{3}{2}$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.



Задача 3

На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = -\frac{4}{9}x^3 - \frac{34}{3}x^2 - \frac{280}{3}x - \frac{18}{5}$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.



7 Ответы

Производная и касательная к графику

Часть 1

1. 4; 2. 7; 3. 9.

Часть 2

1. 5; 2. 5; 3. -3 .

Часть 3

1. 2; 2. 0,25; 3. -2 ; 4. $-0,25$.

Часть 4

1. 4.
2. 1.
3. 2.
4. 2.

Касательная к графику. Задачи на вычисление

Часть 1

1. $-6,5$; 2. -5 ; 3. $5,5$.

Часть 2

1. -1 ; 2. 0; 3. -2 .

Часть 3

1. 0,125; 3. 7; 5. -6 ;
2. -33 ; 4. $-0,2$; 6. 7.

Возрастание и убывание функции

Часть 1

1. 4; 2. 7; 3. 5; 4. 7.

Часть 2

1. -3 ; 2. 18; 3. 6; 4. 6.

Точки экстремума. Точки минимума и точки максимума**Часть 1**

1. -3 ; 2. -7 .

Часть 2

1. 1 ; 2. 1 ; 3. 5 ; 4. 4 .

Часть 3

1. 5 ; 2. 3 .

Часть 4

1. 3 ; 2. 5 ; 3. 4 ;

Физический смысл производной**Часть 1**

1. 60 ; 2. 20 ; 3. 59 .

Часть 2

1. 8 ; 2. 7 ; 3. 8 .

Первообразная**Часть 1**

1. 6 ; 2. 10 .

Часть 2

1. 5 ; 2. $7,5$.

Часть 3

1. 10 ; 2. 10 ; 3. 6 .