ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЕГИОН

Задачи по теории вероятностей в ЕГЭ-2022 (математика, профильный уровень)

Фридман Елена Михайловна,
специалист отдела математики
и автор пособий издательства «Легион».

Основные понятия

Понятие	Описание/Определение	Пример
Испытание	опыт, эксперимент	Игральный кубик или монету бросают один или несколько раз
Элементарное событие	появление или не появление того или иного исхода испытания	Выпадение герба при бросании монеты
Пространство элементарных событий	это множество (конечное или бесконечное), каждому элементу которого соответствует один исход испытания	При бросании игральной кости пространство элементарных событий представляет собой шестиэлементное множество {1, 2, 3 ,4, 5, 6}
Случайное событие	подмножество пространства элементарных событий. Иначе – это событие, которое в результате данного испытания может произойти, а может не произойти	Появление четного числа при бросании игрального кубика

Понятие	Описание/Определение	Пример
Достоверное событие	событие, которое обязательно произойдет в данном испытании. Иначе, подмножество пространства элементарных событий достоверного события совпадает с пространством элементарных событий	Выпадение герба или решетки при бросании монеты
Невозможное событие	событие, которое точно не произойдет в данном испытании. Подмножество элементарных событий невозможного события – пустое множество	Выпадение десятки при бросании игрального кубика
Несовместные события	два случайных события, которые в данном испытании не могут произойти одновременно	При однократном бросании монеты одновременное выпадение орла и решки

Понятие	Описание/Определение	Пример
Факториал натурального числа *n*	$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$	$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$
Перестановка *n* элементов	Любой способ расставить *n* элементов в определенном порядке. Число таких способов равно *n!*	Очередь из 4-х человек можно составить 4!=24 способами
Размещение из *n* элементов по *k*	Размещение из *n* элементов по *k* – любое упорядоченное k-элементное подмножество *n*-элементного множества $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ или $A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$	Выбрать двоих дежурных из четверых, один из которых назначен ответственным, можно $\frac{4!}{2!} = 12$ способами
Сочетание из *n* элементов по *k*	Сочетание из *n* элементов по *k* – любое k-элементное подмножество *n*-элементного множества $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$	Выбрать двоих дежурных из четверых можно $\frac{4!}{(4-2)! \cdot 2!} = 6$

Варианты составлены по новой спецификации

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ЛЕГИОН

В книгу включены все типы новых заданий.

ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЕГИОН

В два параграфа книги, посвященные теории вероятностей, включены более 150 задач, каждая четвертая из них – с подробным решением.

В конце каждого параграфа есть задания для контроля: 4 варианта по 5 заданий каждый.

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ЛЕГИОН

Формула классической вероятности

Пусть производится испытание, в котором возможно n исходов, причем исходы попарно несовместны (не могут происходить одновременно) и равновозможны. Пусть А - случайное событие данного испытания. Тогда вероятность события А вычисляется по формуле

$$p(A)=\frac{k}{n},$$

где k – число исходов, благоприятствующих событию А в данном испытании, n - общее число исходов, возможных в данном испытании.

Замечание.

Так как $k \leq n$, то вероятность события А - это число, удовлетворяющее неравенству $0 \leq p(A) \leq 1$. При этом вероятность достоверного события равна 1, а вероятность невозможного события равна 0.

Задача

В случайном эксперименте бросают 2 игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 8 очков. Результат округлите до сотых.

Решение.

Благоприятные исходы:

(6; 2)

(5; 3)

(4; 4)

(3; 5)

(2; 6)

Искомая вероятность $\frac{5}{36} = 0{,}138\ldots \approx 0{,}14$.

Ответ: 0,14.

Задача

В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что орёл выпадет ровно один раз.

Решение.

О – выпал орел, Р – выпала решка.

Равновозможные исходы:

(О; Р), (Р; О), (О; О), (Р; Р).

Благоприятные исходы:

(О; Р), (Р; О).

Вероятность равна 2 : 4 = 0,5.

Задача

Андрей выбирает трехзначное число. Найдите вероятность того, что оно делится на 33.

Решение.
Событие А – выбранное трехзначное число делится на 33.
n – количество трехзначных чисел, n=900.
k - количество трехзначных чисел, делящихся на 33.
k=30 (**30**$\cdot$33=990).
Вероятность, что выбранное трехзначное число делится на 33, равна

$$p(A)=\frac{30}{900}=\frac{1}{30}.$$

Задача

В ящике лежат гелевые ручки: 8 синих, 6 красных и 32 зеленых. Надя достает случайным образом две ручки. Какова вероятность, что она достанет одну синюю и одну красную ручки?

Решение.

Будем считать все ручки различными. Результатом эксперимента является неупорядоченная пара ручек, которые достала Надя. Всего есть $C_{16}^2 = \dfrac{16!}{14! \cdot 2!} = \dfrac{16 \cdot 15}{2!} = 120$ равновозможных способов выбрать две ручки. Пару из синей и красной ручки можно составить $6 \cdot 8 = 48$ способами. Следовательно, искомая вероятность равна $\dfrac{48}{120} = 0{,}4$.

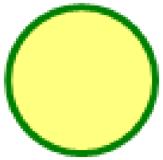
Алгоритм применения формулы классической вероятности при решении задач

1. Четко сформулируйте для себя, в чем состоит испытание, исходя из условия задачи.
2. Сформулируйте, что происходит в результате испытания, то есть каков исход испытания.
3. Убедитесь в том, что исходы испытания являются попарно несовместными и равновозможными.
4. Найдите общее число ***n*** исходов данного испытания.
5. Введите событие, вероятность которого требуется найти в условии задачи, обозначив его, например, А.
6. Установите число исходов ***k*** данного испытания, благоприятствующих введенному в п.5 событию А.
7. Примените формулу Р(А)=$\frac{k}{n}$.

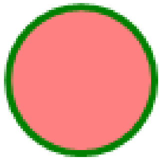
Задача

Перед началом футбольного матча судья бросает монетку, чтобы определить, какая из команд начнет игру с мячом. Команда «Физик» играет три матча с разными командами. Найдите вероятность того, что в этих играх «Физик» выиграет жребий ровно два раза.

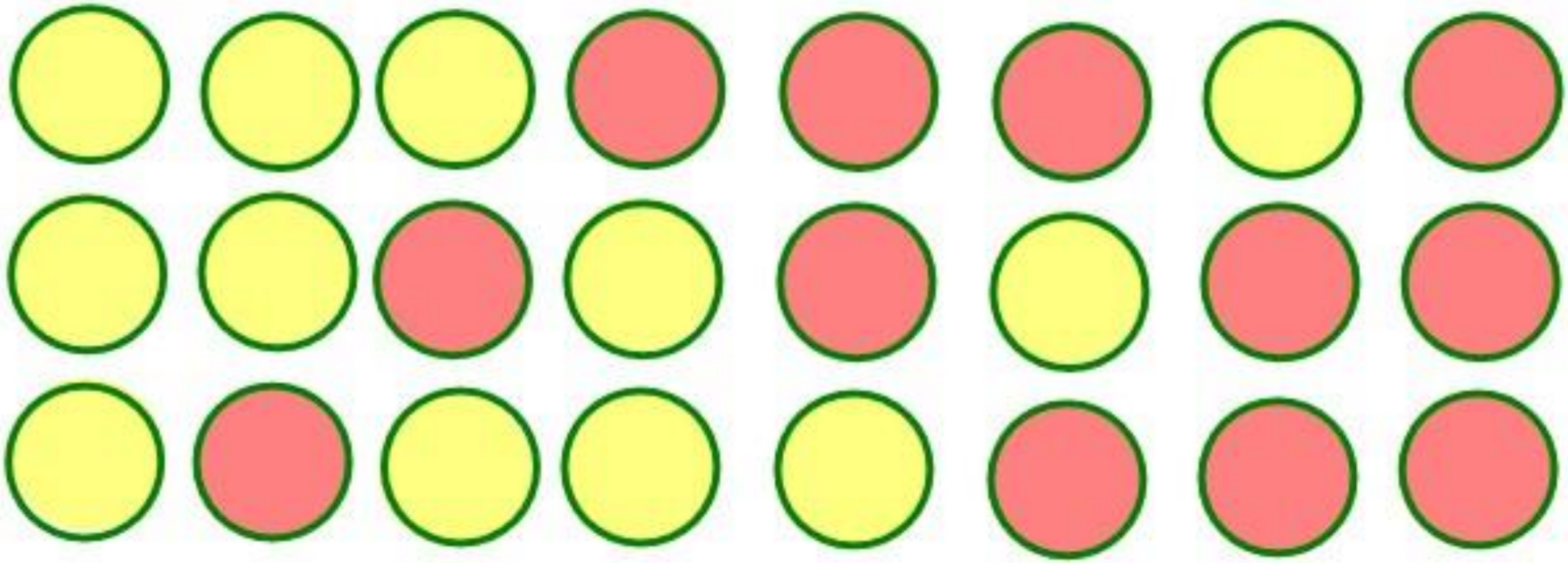
Решение. ***1 способ***



команда «Физик» выигрывает возможность начать игру с мячом.



команда «Физик» проигрывает возможность начать игру с мячом.



3 хороших **всего 8** **Ответ: 0, 375**

2 способ

Обозначим «1» ту сторону монеты, которая отвечает за выигрыш жребия «Физиком», другую сторону монеты обозначим «0». Тогда благоприятных комбинаций три:
110, 101, 011,
а всего комбинаций $2^3 = 8$:
000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111.
Искомая вероятность равна: $\frac{3}{8} = 0{,}375.$

Задача

В группе туристов 5 человек. С помощью жребия они выбирают двух человек, которые должны идти в село за продуктами. Турист А. хотел бы сходить в магазин, но он подчиняется жребию. Какова вероятность того, что А. пойдёт в магазин?

Решение. ***1 способ***

В процессе жребия занумеруем туристов случайным образом цифрами 1, 2, 3, 4, 5 договорившись, что в магазин пойдут туристы под номерами 1 и 2. Эксперимент заключается в выборе номера для туриста А. Он имеет 5 равновозможных исходов, из них два (1 и 2) благоприятствуют событию «турист А пойдет в магазин». Искомая вероятность равна $\frac{2}{5}$.

2 способ Событие С - А. пойдёт в магазин.

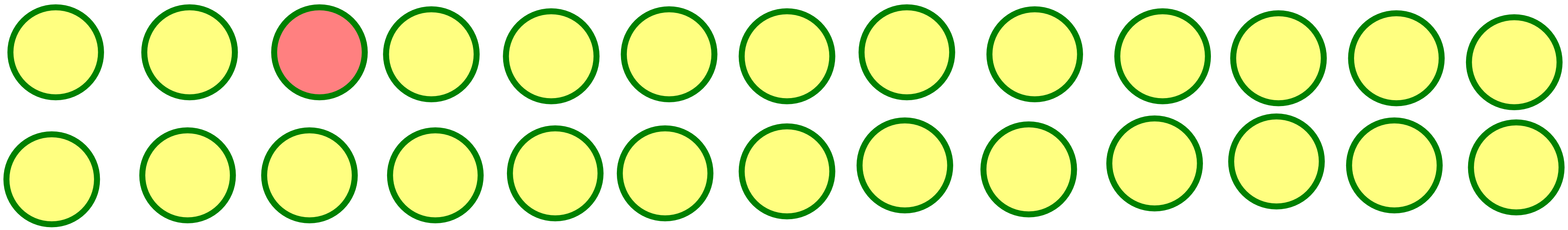
Выбрать двоих туристов из 5 можно 10 способами (n=10). Тогда число способов, при которых А пойдёт в магазин, равно 4 (k=4) . Вероятность *p(C)* того, что А пойдёт в магазин, равна *p(C)* = 0,4.

Задача

В классе 26 человек, среди них два близнеца — Андрей и Сергей. Класс случайным образом делят на две группы по 13 человек в каждой. Найдите вероятность того, что Андрей и Сергей окажутся в одной группе.

Решение.

На рисунке Андрей изображен красным кружком, а группа, в которую он попал – верхняя строка.



Если Андрей попал в группу, то для Сергея число способов попасть в эту же группу – 12 (столько осталось в группе свободных мест). А всего 25 человек могут претендовать на эти места. Таким образом, вероятность того, что Андрей и Сергей окажутся в одной группе, равна $\frac{12}{25} = 0{,}48$.

Задача

Футбольную секцию посещают 33 человека, среди них два брата — Антон и Дмитрий. Посещающих секцию случайным образом делят на три команды по 11 человек в каждой. Найдите вероятность того, что Антон и Дмитрий окажутся в одной команде.

Сформируем команды, последовательно помещая футболистов на свободные места, при этом начнём с Антона и Дмитрия. Сначала поместим Антона на случайно выбранное место из свободных 33. Теперь помещаем на свободное место Дмитрия (исходом будем считать выбор места для него). Всего имеется 32 свободных места (одно уже занял Антон), поэтому всего возможны 32 исхода. В одной команде с Антоном остаётся 10 свободных мест, поэтому событию «Антон и Дмитрий в одной команде» благоприятствуют 10 исходов. Вероятность этого события равна

$$\frac{10}{32} = \frac{5}{16} = \frac{5 \cdot 5^4}{2^4 \cdot 5^4} = \frac{3125}{10\,000} = 0{,}3125.$$

Ответ: 0,3125.

Задача

Фабрика выпускает сумки. В среднем на 100 качественных сумок приходится восемь сумок со скрытыми дефектами. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется качественной. Результат округлите до сотых.

Решение.

Переформулируем задачу.
Из 108 сумок, выпущенных фабрикой, в среднем, восемь сумок со скрытыми дефектами и 100 качественных.
Событие А - купленная сумка окажется качественной.
Число благоприятствующих этому событию исходов k=100. Всего же исходов n=108.

$$p(A) = \frac{100}{108} = \frac{25}{27} \approx 0{,}925 \approx 0{,}93.$$

Сравните условия задач

Фабрика выпускает сумки. В среднем **из 100 сумок восемь сумок со скрытыми дефектами**. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется качественной. Результат округлите до сотых.

Решение.

$$\frac{92}{100} = 0{,}92.$$

Ответ: 0,92.

Фабрика выпускает сумки. В среднем **на 100 <u>качественных</u> сумок приходится восемь сумок <u>со скрытыми дефектами</u>**. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется качественной. Результат округлите до сотых.

Решение.

$$\frac{100}{100+8} = \frac{100}{108} = \frac{25}{27} = 0{,}925\ldots \approx 0{,}93.$$

Ответ: 0,93.

Задача

На фабрике керамической посуды 20% произведённых тарелок имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 70% дефектных тарелок. Остальные тарелки поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная при покупке тарелка не имеет дефектов. Ответ округлите до сотых.

Решение.

Пусть всего произведено x тарелок. Качественных тарелок $0{,}8x$ (80% от общего числа), они поступают в продажу. Дефектных тарелок $0{,}2x$, из них в продажу поступает 30%, то есть $0{,}3 \cdot 0{,}2x = 0{,}06x$. Всего в продажу поступило $0{,}8x + 0{,}06x = 0{,}86x$ тарелок. Вероятность купить тарелку без дефектов равна $\dfrac{0{,}8x}{0{,}86x} = \dfrac{40}{43} \approx 0{,}93$.

Ответ: 0,93.

Формула геометрической вероятности

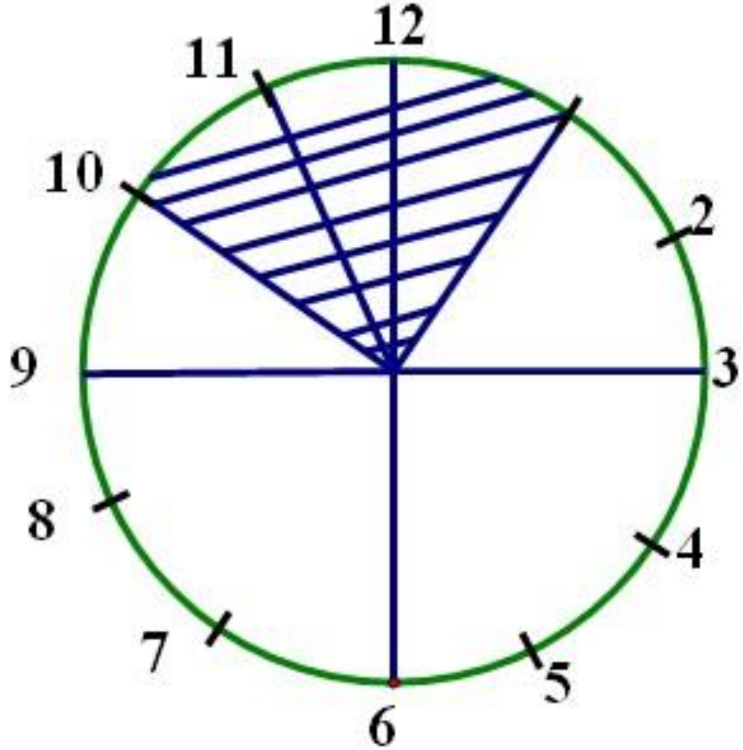
Пусть событие А – попадание точки в заданную область. Вероятность события А есть отношение меры области (длины, площади, объема) к мере пространства элементарных событий.

Задача

Механические часы с двенадцатичасовым циферблатом в какой-то момент сломались и перестали ходить. Найдите вероятность того, что часовая стрелка застыла, достигнув отметки 10, но, не дойдя до отметки 1 час.

Решение.

Площадь части круга, где по условию могла застыть часовая стрелка, составляет четверть площади всего круга.



Ответ. 0,25

Понятие частоты в задачах ЕГЭ по математике

Пусть было произведено n испытаний, в результате которых событие A появилось ровно k раз. Тогда отношение $\frac{k}{n}$ называют относительной частотой события A.

Задача

В некотором городе из 5000 появившихся на свет младенцев 2512 мальчиков. Найдите частоту рождения девочек в этом городе. Результат округлите до тысячных.

Решение.

Испытание - рождение ребенка. $n = 5000$.
Событие А – «рождение девочки».
Узнаем, сколько девочек рождается в городе, о котором речь идет в условии задачи:

$$5000 - 2512 = 2488.$$

$k = 2488$.
Частоту рождения девочек в этом городе найдем по формуле $\frac{k}{n}$:

$$\frac{k}{n} = \frac{2488}{5000} = \frac{4976}{10000} = 0{,}4976 \approx 0{,}498.$$

Задача

Вероятность того, что новый DVD-проигрыватель в течение года поступит в гарантийный ремонт, равна 0,045. В некотором городе из 1000 проданных DVD-проигрывателей в течение года в гарантийную мастерскую поступила 51 штука. На сколько отличается частота события «гарантийный ремонт» от его вероятности в этом городе?

Решение.

Пусть событие А – в некотором городе новый DVD-проигрыватель в течение года поступит в гарантийный ремонт. Так как в этом городе из 1000 проданных DVD-проигрывателей в течение года в гарантийную мастерскую поступила 51 штука, то относительная частота события А равна $\frac{51}{1000}$. Ожидаемая частота равна $\frac{45}{1000}$.

Это означает, что частота события «гарантийный ремонт» отличается от его вероятности в этом городе на

$$\frac{51}{1000} - \frac{45}{1000} = 0{,}006.$$

Сумма событий

Суммой двух событий А и В называется событие А+В, которое произойдет, если произойдет хотя бы одно из событий А или В (А+А=А).

Если события *A и B* несовместны, то

$$p(A+B) = p(A)+p(B).$$

Задача

На экзамене по геометрии школьнику достаётся один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос на тему «Вписанная окружность», равна 0,2. Вероятность того, что это вопрос на тему «Параллелограмм», равна 0,15. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.

Решение.

Событие А – школьнику достанется вопрос на тему «Вписанная окружность», $p(A) = 0{,}2$.
Пусть событие В – школьнику достанется вопрос на тему «Параллелограмм», $p(B) = 0{,}15$.
Событие А+В - школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем. $p(A+B)$ –?
По условию нет вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, значит верно равенство $p(A+B) = p(A)+p(B)$, тогда $p(A+B) = 0{,}2+0{,}15=0{,}35$.

Задача

Вероятность того, что новый электрический чайник прослужит больше года, равна 0,97.
Вероятность того, что он прослужит не меньше двух лет, равна 0,89.
Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

Решение.

Событие A – «чайник прослужит больше года, но меньше двух лет». $p(A)$ - ?

Событие B– «чайник прослужит не меньше двух лет».

По условию $p(B)$=0,89.

Тогда событие A + B – «чайник прослужит больше года».

События A и B несовместны, значит

$p(A + B)= p(A)+ p(B)$.

$p(A+B)$=0,97

0,97= $p(A)$+ 0,89, $p(A)$=0,97-0,89=0,08.

Произведение событий

Произведением двух событий A и B называется событие $A \cdot B$, которое произойдет, если произойдут оба события A и B.

Произведение несовместных событий A и B – невозможное событие, то есть $A \cdot B = \emptyset$.

События A и B называются **независимыми**, если появление одного из них не меняет вероятности появления другого.

Для независимых событий верно $p(A \cdot B) = p(A) \cdot p(B)$

Задача

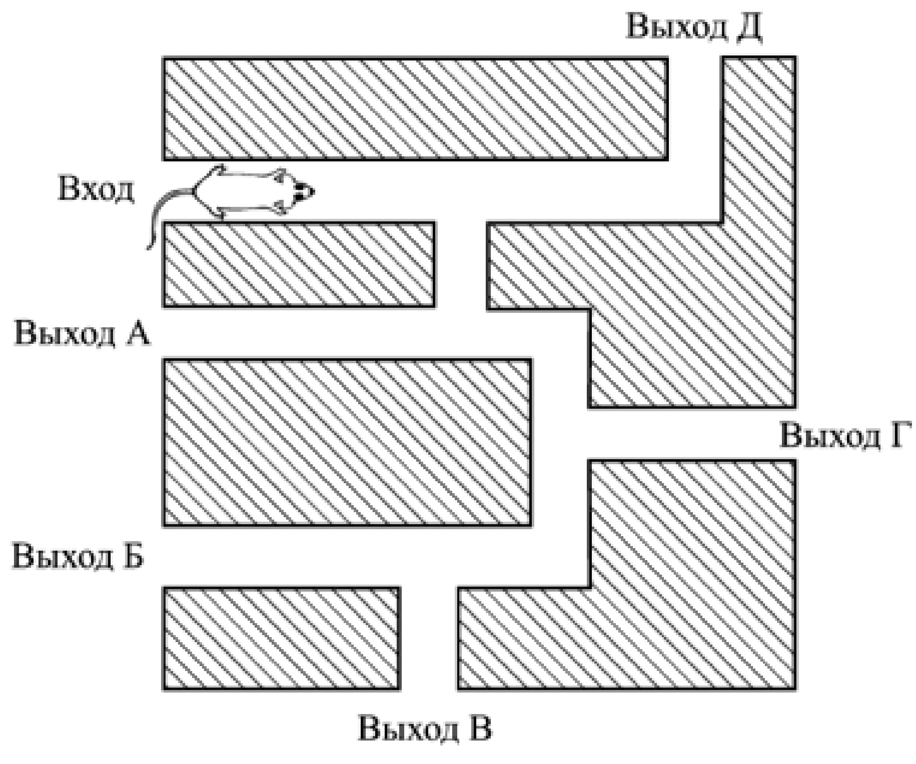
Если гроссмейстер А. играет белыми, то он выигрывает у гроссмейстера Б. с вероятностью 0,45. Если А. играет черными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,4. Гроссмейстеры А. и Б. играют две партии, причем во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.

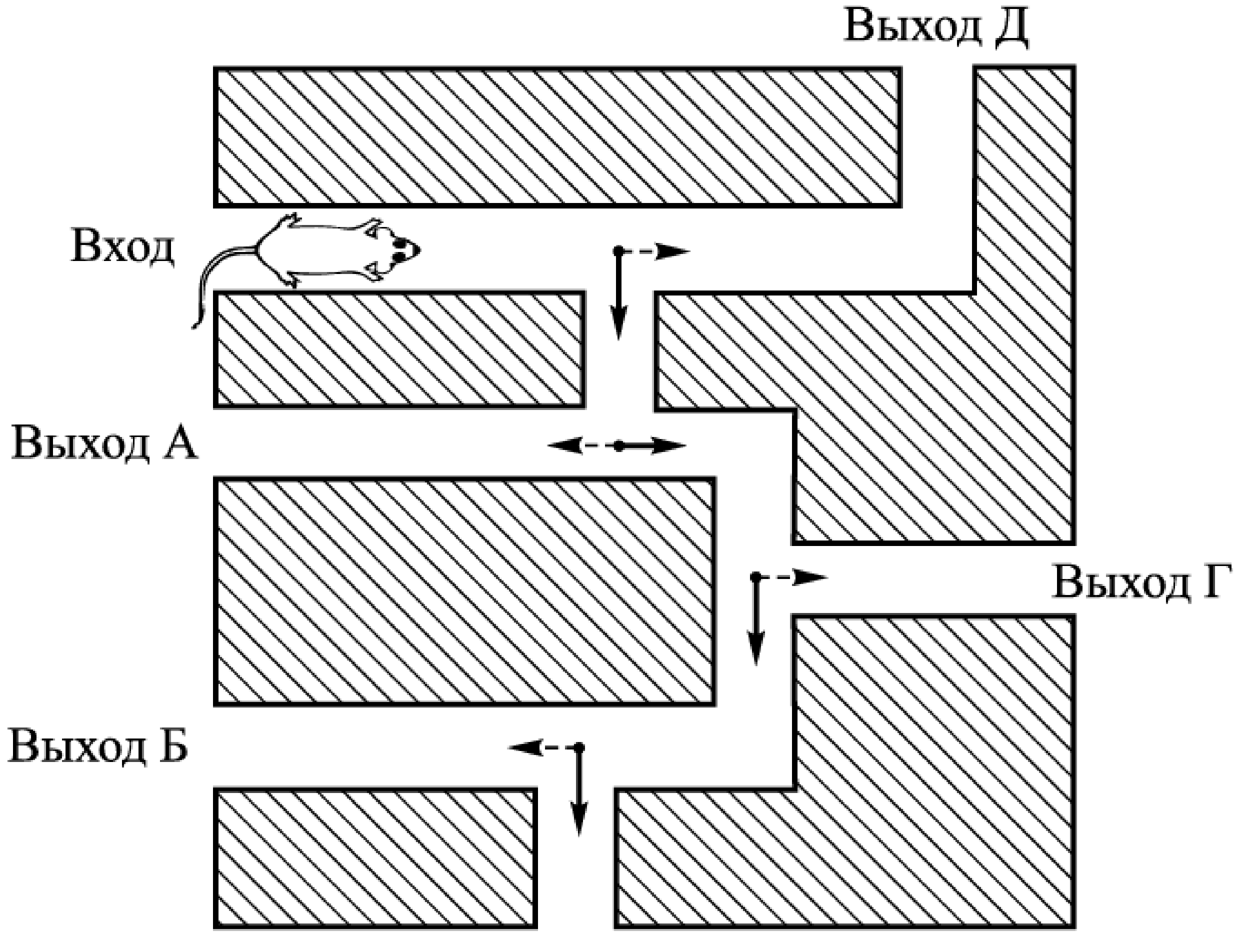
Решение.

Событие C – «А. выиграл белыми».
Событие D – «А. выиграл черными».
Событие C·D – «А. выиграл и белыми и черными».
$p(C \cdot D)$ – ?
События C и D независимы (результат одной партии не зависит от результата другой), поэтому
$p(C \cdot D) = p(C) \cdot p(D) = 0{,}45 \cdot 0{,}4 = 0{,}18.$

Задача

На рисунке изображён лабиринт. Мышка заползает в лабиринт в точке «Вход». Развернуться и идти назад мышка не может, поэтому на каждом разветвлении мышка выбирает один из путей, по которому ещё не шла. Считая, что выбор дальнейшего пути чисто случайный, определите, с какой вероятностью мышка придёт к выходу В.





Ответ: 0,0625.

Противоположные события

События А и В называются **противоположными**, обозначается $\boldsymbol{A = \overline{B}}$, если каждое из них дополняет другое до всего пространства элементарных событий.

Замечания.

1. Из определения следует, что противоположные события несовместны.
2. $A+\bar{A}$ - достоверное событие, $p(A+\bar{A}) = 1$,

$p(A)=1-p(\bar{A})$

Задача

При артиллерийской стрельбе автоматическая система делает выстрел по цели. Если цель не уничтожена, то система делает повторный выстрел. Выстрелы повторяются до тех пор, пока цель не будет уничтожена. Вероятность уничтожения некоторой цели при первом выстреле равна 0,2, а при каждом последующем — 0,7. Сколько выстрелов потребуется для того, чтобы вероятность уничтожения цели была не менее 0,98?

Решение.

Вероятность промаха при первом выстреле равна $1 - 0{,}2 = 0{,}8$. Вероятность промаха при каждом последующем равна $0{,}3$. Подсчитаем число выстрелов, при котором цель остаётся непоражённой с вероятностью менее $1 - 0{,}98 = 0{,}02$.

Вероятность непоражения после второго выстрела равна $0{,}8 \cdot 0{,}3 = 0{,}24$;
после третьего — $0{,}24 \cdot 0{,}3 = 0{,}072$;
после четвёртого — $0{,}072 \cdot 0{,}3 = 0{,}0216$;
после пятого — $0{,}0216 \cdot 0{,}3 = 0{,}00648$.

Следовательно, необходимо 5 выстрелов.

Задача

Биатлонист два раза стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что биатлонист один раз промахнулся.

Решение.

Событие A – «биатлонист попал в мишень при выстреле».

Событие $\bar{A}$ – «биатлонист промахнулся при выстреле».

Событие $A \cdot \bar{A}$ – «биатлонист попал первым выстрелом и промахнулся вторым».

Событие $\bar{A} \cdot A$ – «биатлонист промахнулся первым выстрелом и попал вторым».

Событие $A \cdot \bar{A} + \bar{A} \cdot A$ «биатлонист один раз промахнулся».

События $A \cdot \bar{A}$ и $\bar{A} \cdot A$ несовместны, поэтому

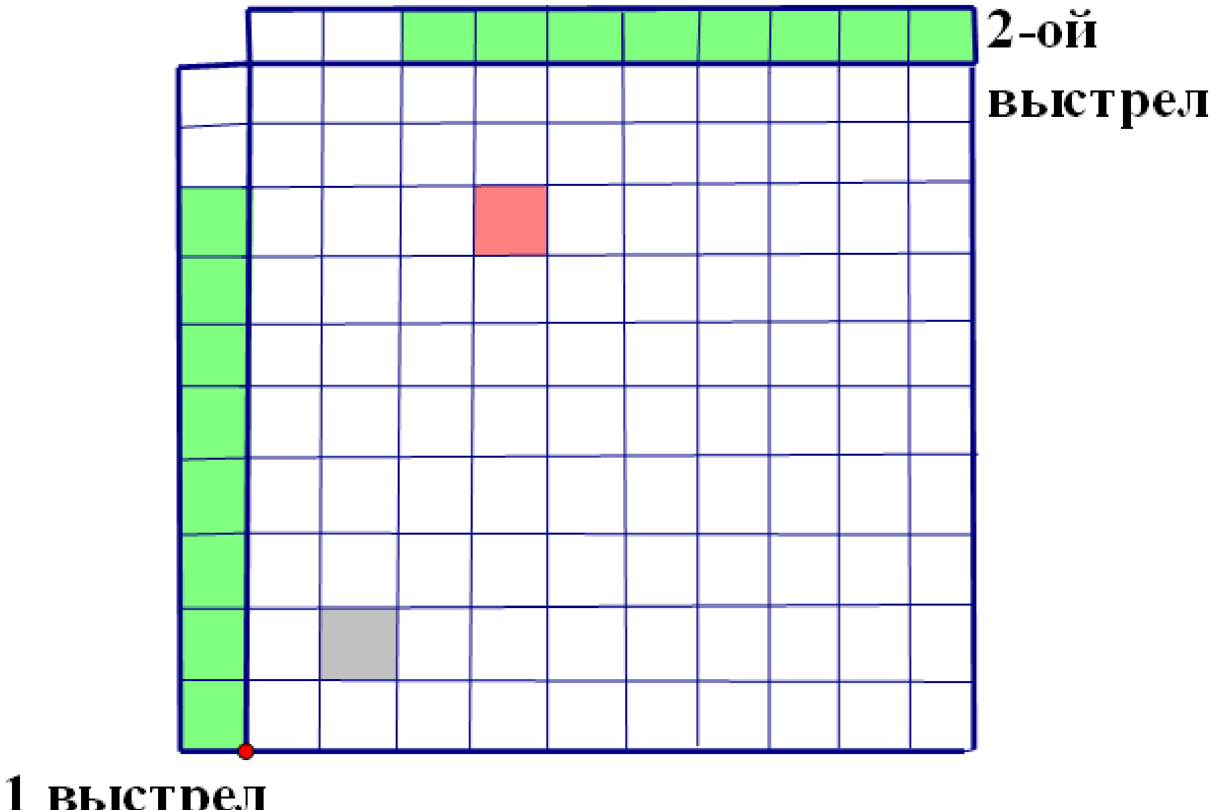
$p(A \cdot \bar{A} + \bar{A} \cdot A) = p(A \cdot \bar{A}) + p(\bar{A} \cdot A)$.

События A и $\bar{A}$ независимы, значит

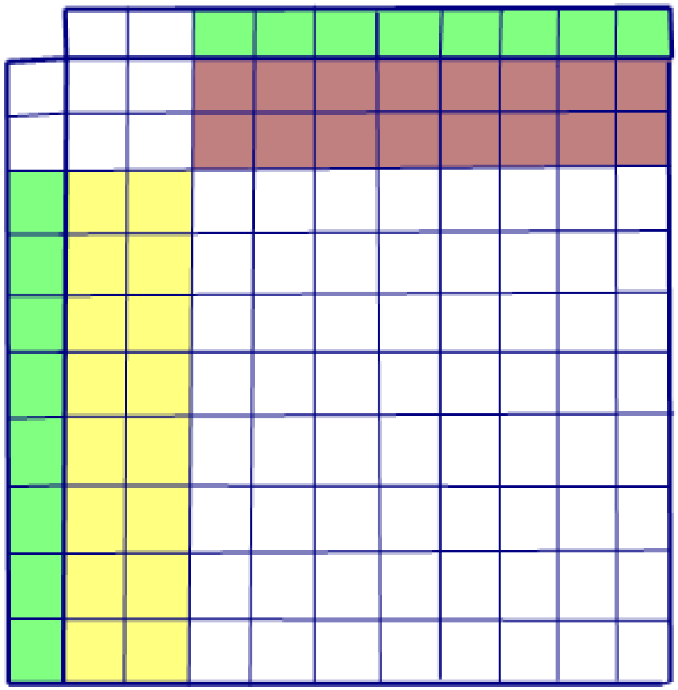
$p(A \cdot \bar{A}) + p(\bar{A} \cdot A) =$

$p(A) \cdot p(\bar{A}) + p(\bar{A}) \cdot p(A) = 0,8 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,8 = 0,32$.

Строки слева от квадрата 10×10 и сверху квадрата показывают, что произведено два выстрела, зелеными прямоугольниками отмечено, что вероятность попадания первым и вторым выстрелами одна и та же и равна 0,8 (закрашены 8 клеточек из 10).



Серая клеточка – биатлонист попал 1-ым выстрелом, вторым промахнулся, красная клеточка – оба раза попал.



2-ой выстрел

$$p(A\cdot\overline{A}) = 0{,}8\cdot 0{,}2 = 0{,}16$$

$$p(\overline{A}\cdot A) = 0{,}8\cdot 0{,}2 = 0{,}16$$

$$p(A\cdot\overline{A}) + p(\overline{A}\cdot A) = 0{,}32$$

1 выстрел

желтый прямоугольник означает, что биатлонист попал первым выстрелом и промахнулся вторым (соответствует событию $A\cdot\overline{A}$)

а коричневый – первым промахнулся, а вторым попал (коричневый прямоугольник соответствует событию $\overline{A}\cdot A$)

Из ста клеточек закрашены 32. Значит, $p(C)=0{,}32$.

Задача

Помещение освещается фонарём с двумя лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течение года равна 0,3. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

Решение.

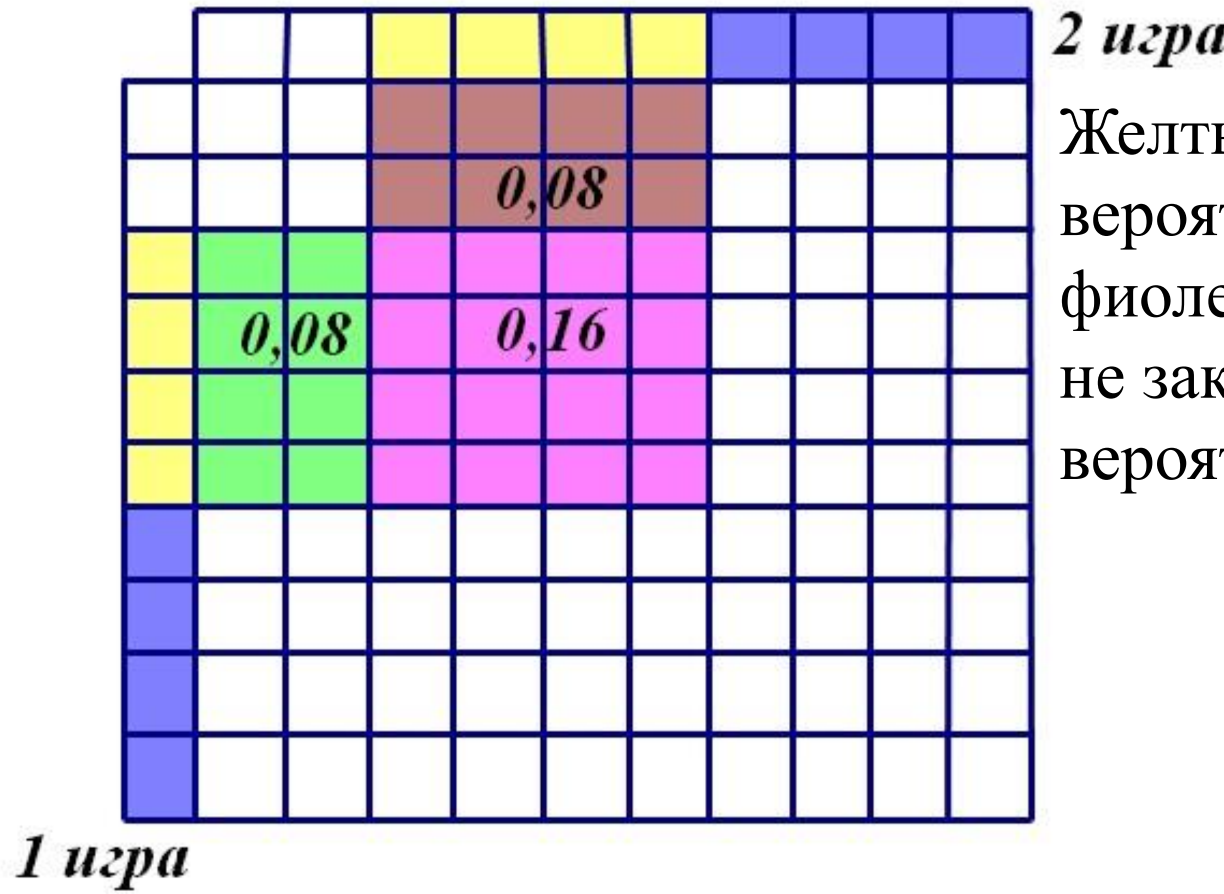
Событие А – «в течение года хотя бы одна лампа не перегорит».
Противоположное событие $\bar{A}$ – «в течение года обе лампы перегорят»
Событие В – «в течение года одна лампа перегорит».
p(B)=0,3.

$$\bar{A} = B \cdot B$$

Так как одна лампа перегорает независимо от другой, то
$p(\bar{A}) = p(B \cdot B) = p(B) \cdot p(B) = 0,3 \cdot 0,3 = 0,09$.
$p(A) = 1 - p(\bar{A}) = 1 - 0,09 = 0,91$.

Задача

Чтобы пройти в следующий круг соревнований, футбольной команде нужно набрать хотя бы 4 очка в двух играх. Если команда выигрывает, она получает 3 очка, в случае ничьей — 1 очко, если проигрывает — 0 очков. Найдите вероятность того, что команде удастся выйти в следующий круг соревнований. Считайте, что в каждой игре вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,4.



Желтый прямоугольник – вероятность выигрыша, фиолетовый – проигрыша, не закрашенный – вероятность ничьей.

Зеленый прямоугольник – футбольная команда победит в первом матче, а второй сыграет вничью (наберет 4 очка, значит, выйдет в следующий круг), коричневый - победит во втором, а первый сыграет вничью (наберет 4 очка, значит, выйдет в следующий круг),
сиреневый – победит в двух матчах (тем самым, наберет 6 очков и выйдет в следующий круг). Вероятность того, что команде удастся выйти в следующий круг соревнований, равна 0,08 + 0,08 + 0,16 = 0,32.

Задача

В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,12. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

Решение.

Решение.

Событие A – кофе закончился в 1-ом автомате.

Событие B – кофе закончился во 2-ом автомате.

Событие C – кофе закончился хотя бы в одном из двух автоматов ($C=A\cup B$).

Замечание.

Типичная ошибка, которую допускают при решении этой задачи, – это применение формулы $p(C)=p(A)+p(B)$, то есть предположение, что события А и В несовместны. Убедимся в том, что это не так.

Факт, что произошло событие А – кофе закончился в 1-ом автомате, – вовсе не означает, что произошло событие $\overline{B}$ – кофе не закончился во 2-ом автомате. Он может закончиться, а может и не закончиться. Значит, события А и В не являются несовместными, следовательно, применяем формулу

p (C)=p(A)+p(B)-p(AB)

$$P(C)=0{,}3+0{,}3-0{,}12=0{,}48.$$

Событие $\overline{C}$ - к концу дня кофе останется в обоих автоматах (противоположное событию С).

$$p(\overline{C})=1-p(C)=1-0{,}48=0{,}52.$$

Событие А - кофе закончился в первом автомате	=	Кофе закончился только в первом автомате	+	Кофе закончился не только в первом автомате (в обоих автоматах)
0,3	=	?	+	0,12
Событие В - кофе закончился во втором автомате	=	Кофе закончился только во втором автомате	+	Кофе закончился не только во втором автомате (в обоих автоматах)
0,3	=	?	+	0,12

Кофе закончился только в первом автомате	+	Кофе закончился только во втором автомате	+	Кофе закончился в обоих автоматах		
0,18	+	0,18	+	0,12	=	0,48

1-0,48=0,52

Задача

Чтобы поступить в институт на специальность «Архитектура», абитуриент должен набрать на ЕГЭ не менее 60 баллов по каждому из трёх предметов — математике, русскому языку и истории. Чтобы поступить на на специальность «Живопись», нужно набрать не менее 60 баллов по каждому из трёх предметов — русскому языку, истории и литературе.

Вероятность того, что абитуриент Н. получит не менее 60 баллов по истории, равна 0,8, по русскому языку — 0, 5, по литературе — 0,6 и по математике — 0,9.

Найдите вероятность того, что Н. сможет поступить хотя бы на одну из двух упомянутых специальностей.

A — поступил (прошёл по баллам) на «Архитектуру».
$P(A) = 0{,}9 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}8 = 0{,}36.$

B — поступил (прошёл по баллам) на «Живопись».
$P(B) = 0{,}5 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}6 = 0{,}36.$

$P(A \cap B) = 0{,}5 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}9.$ (прошёл и туда, и туда)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$$
$$= 0{,}5 \cdot 0{,}8 \cdot (0{,}9 + 0{,}6 - 0{,}9 \cdot 0{,}6) = 0{,}384.$$

Ответ: 0,384.

Правила суммы и произведения в задачах ЕГЭ по математике

Если объект А может быть выбран m способами, а объект В – другими n способами, причем выборы объектов А и В несовместны, то выбор «либо А либо В» может быть осуществлен $m + n$ способами.

Если объект А может быть выбран m способами и после каждого такого выбора объект В может быть выбран n способами, то выбор упорядоченной пары (А; В) может быть осуществлен $m \cdot n$ способами.

Задача

Сколько существует пятизначных чисел, которые одинаково читаются слева направо и справа налево?

Решение: Рассмотрим какое-нибудь число, которое одинаково читается слева направо и справа налево, к примеру, 23432 .

В таких числах последняя цифра будет такая же, как и первая, а предпоследняя - как и вторая. Третья цифра будет любой. Это число можно представить в виде

$\overline{xyzyx}$, где y и z -любые цифры, а $x \neq 0$.

Значит по правилу произведения количество цифр, одинаково читающихся как слева направо, так и справа налево, равно 9·10·10=900.

Задача (www.mathege.ru)

Маша коллекционирует принцесс из Киндер-сюрпризов. Всего в коллекции 10 разных принцесс, и они равномерно распределены, то есть в каждом очередном Киндер-сюрпризе может с равными вероятностями оказаться любая из 10 принцесс.

У Маши уже есть две разные принцессы из коллекции. Какова вероятность того, что для получения следующей принцессы Маше придётся купить ещё 2 или 3 шоколадных яйца?

Решение.

Присвоим принцессам номера от 1 до 10. Пусть в коллекции у Маши принцессы с номерами 1 и 2.

Событие A – Маше придётся купить ещё 2 или 3 шоколадных яйца.

Событие B – Маше придётся купить ещё 2 яйца.

Событие C – Маше придётся купить 3 шоколадных яйца.

Тогда A=B+C.

События B и C несовместны, P(B+C)=P(B)+P(C).

P(B)= $\frac{2}{10} \cdot \frac{8}{10}$, P(C) = $\frac{2}{10} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{8}{10}$,

P(B+C)= $\frac{2}{10} \cdot \frac{8}{10} + \frac{2}{10} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{8}{10} = 0{,}16 + 0{,}032$=0,192.

Схема Бернулли

Пусть проводится серия из n идентичных независимых экспериментов. В каждом из них вероятность события А равна p. Тогда вероятность того, что в указанной серии экспериментов событие наступит ровно k раз ($k \le n$), вычисляется по формуле

$$C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

Задача

Петя бросает симметричную монету 26 раз. Во сколько раз вероятность события «решка выпадет ровно 7 раз» превосходит вероятность события «решка выпадет ровно 5 раз»?

Решение.

Вероятность того, что решка выпадет ровно 7 раз в серии испытаний из 26 бросков (используем схему Бернулли), равна $C_{26}^{7} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{19} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{7} = \frac{26!}{7! \cdot 19!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{26}$.

Вероятность того, что решка выпадет ровно 5 раз в серии испытаний из 26 бросков (используем схему Бернулли), равна $C_{26}^{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{21} = \frac{26!}{5! \cdot 21!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{26}$.

Искомое отношение равно $\dfrac{\frac{26!}{7! \cdot 19!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{26}}{\frac{26!}{5! \cdot 21!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{26}} = \frac{5! \cdot 21!}{7! \cdot 19!} = \frac{5!}{7!} \cdot \frac{21!}{19!} =$

$= \frac{1}{6 \cdot 7} \cdot \frac{21 \cdot 20}{1} = 10.$

Задача

Стрелок Алексей стреляет по пяти одинаковым мишеням. На каждую мишень дается не более двух выстрелов, и известно, что вероятность поразить мишень каждым отдельным выстрелом равна 0,6.

Во сколько раз вероятность события «Алексей поразит ровно 4 мишени» больше вероятности события «Алексей поразит ровно 3 мишени»?

Решение.

Не попадёт в цель за 2 выстрела с вероятностью $0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}16$.
Попадёт в цель за 2 выстрела с вероятностью $1 - 0{,}16 = 0{,}84$.

A — «Алексей поразит ровно 4 мишени»

$$P(A) = C_5^4 \cdot (0{,}84)^4 \cdot (0{,}16)^1$$

B — «Алексей поразит ровно 3 мишени».

$$P(B) = C_5^3 \cdot (0{,}84)^3 \cdot (0{,}16)^2$$

$$\frac{P(A)}{P(B)} = \frac{C_5^4 \cdot (0{,}84)^4 \cdot (0{,}16)^1}{C_5^3 \cdot (0{,}84)^3 \cdot (0{,}16)^2} = \frac{\dfrac{5!}{4!1!} \cdot (0{,}84)^1}{\dfrac{5!}{3!2!} \cdot (0{,}16)^1} = 2{,}625$$

ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЕГИОН

Условная вероятность

Пусть P(A|B) – условная вероятность события A при условии, что событие B произошло.

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, P(B) \neq 0$$

Задача

Вероятность сдачи студентом зачета равна 0,8.
Если зачет сдан, то студент допускается к экзамену, вероятность сдачи которого равна 0,9. Какова вероятность, что студент сдаст зачет и экзамен?
Решение.
Событие B - студент сдаст зачет. P(B)=0,8.
Событие A – студент сдаст экзамен.
Событие AB- студент сдаст зачет и экзамен. P(AB)-?

$$P(A|B)=0{,}9.$$
$$P(AB)=0{,}8\cdot 0{,}9=072.$$

Задача

Маша подбросила игральную кость три раза. Известно, что в сумме выпало7 очков. Какова вероятность события «хотя бы один раз выпало три очка»?

Решение.

Событие А – сумма очков в результате трех подбрасываний игральной кости равна 7.
Событие В – хотя бы один раз сумма очков равна 3.
P(B|A)-?

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

Перечислим возможные варианты, когда сумма очков в результате трех подбрасываний игральной кости равна 7:
(1;1;5), (1;5;1), (5;1;1); (1;2;4), (1;4;2), (2;1;4), (2;4;1),(4;1;2), (4;2;1), <u>(1;3;3), (3;1;3), (3;3;1), (2;2;3), (2;3;2), (3;2;2).</u>
P(A)=15, P(AB)=6.

$$P(B|A)=\frac{6}{15} = \frac{2}{5} = 0{,}4.$$

Формула полной вероятности, формула Байеса

Если $H_1, H_2, \ldots, H_n$ попарно несовместные события, объединение которых совпадает с пространством элементарных событий проводимого испытания,
А – случайное событие из этого пространств, то верны **формула полной вероятности**

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) + \cdots + P(A|H_n)P(H_n);$$

формула Байеса $P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)}, P(A) \neq 0$

Задача

Ковбой Джон попадает в муху на стене с вероятностью 0,9, если стреляет из пристрелянного револьвера. Если Джон стреляет из не пристрелянного револьвера, то он попадает в муху с вероятностью 0,2. На столе лежит 10 револьверов, из них только 4 пристрелянные.

Ковбой Джон видит на стене муху, наудачу хватает первый попавшийся револьвер и стреляет в муху. Найдите вероятность того, что Джон промахнется.

Решение.

H_1 – Джон схватил пристрелянный пистолет, P(H_1)=0,4.

H_2 – Джон схватил не пристрелянный пистолет, P(H_2)=0,6.

А – Джон промахнулся при выстреле в муху.

Вероятность промаха из пристрелянного пистолета

P(A|H_1)= 1-0,9=0,1 (Джон схватил пристрелянный пистолет, сделал выстрел и промахнулся).

P(A|H_2)= 1-0,2=0,8 (Джон схватил не пристрелянный пистолет сделал выстрел и промахнулся).

P(A)=P(A|H_1) P(H_1)+ P(A|H_2) P(H_2).

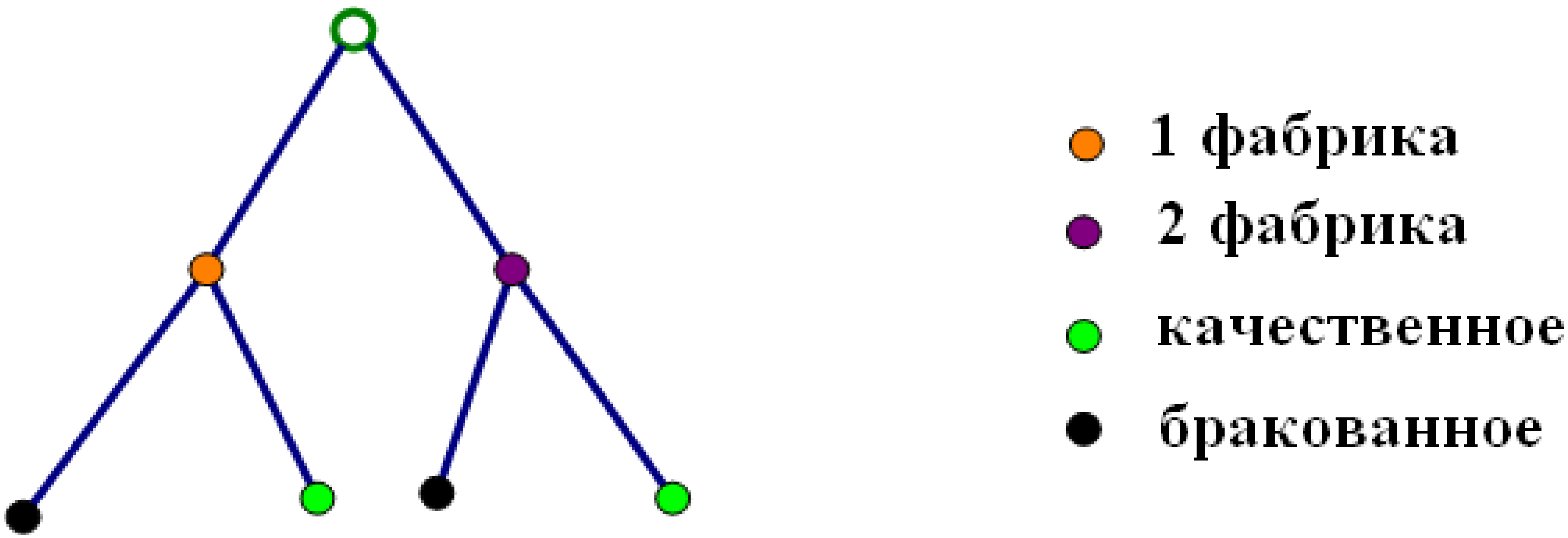
Итак, Джон промахнется с вероятностью

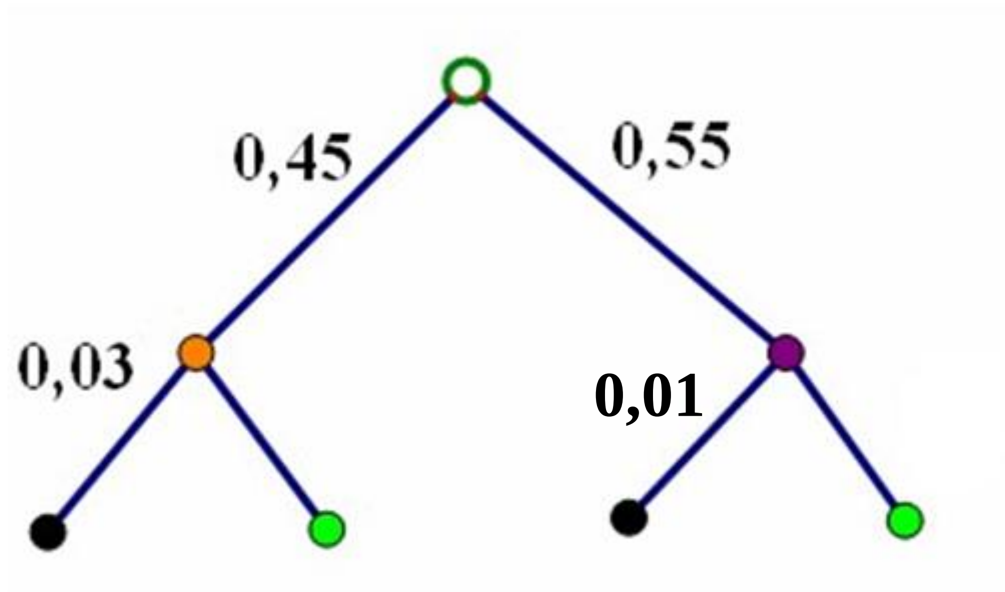
$0,1 \cdot 0,4 + 0,8 \cdot 0,6 = 0,04 + 0,48 = 0,52$.

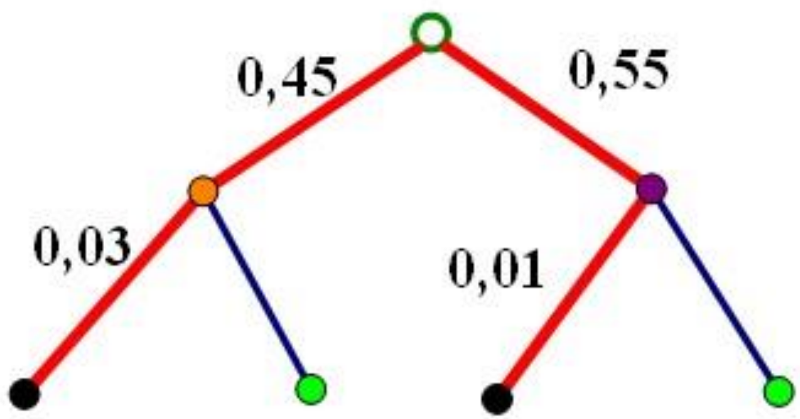
Задача

Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 45% этих стекол, вторая – 55%. Первая фабрика выпускает 3% бракованных стекол, вторая – 1%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло является бракованным.

Решение.







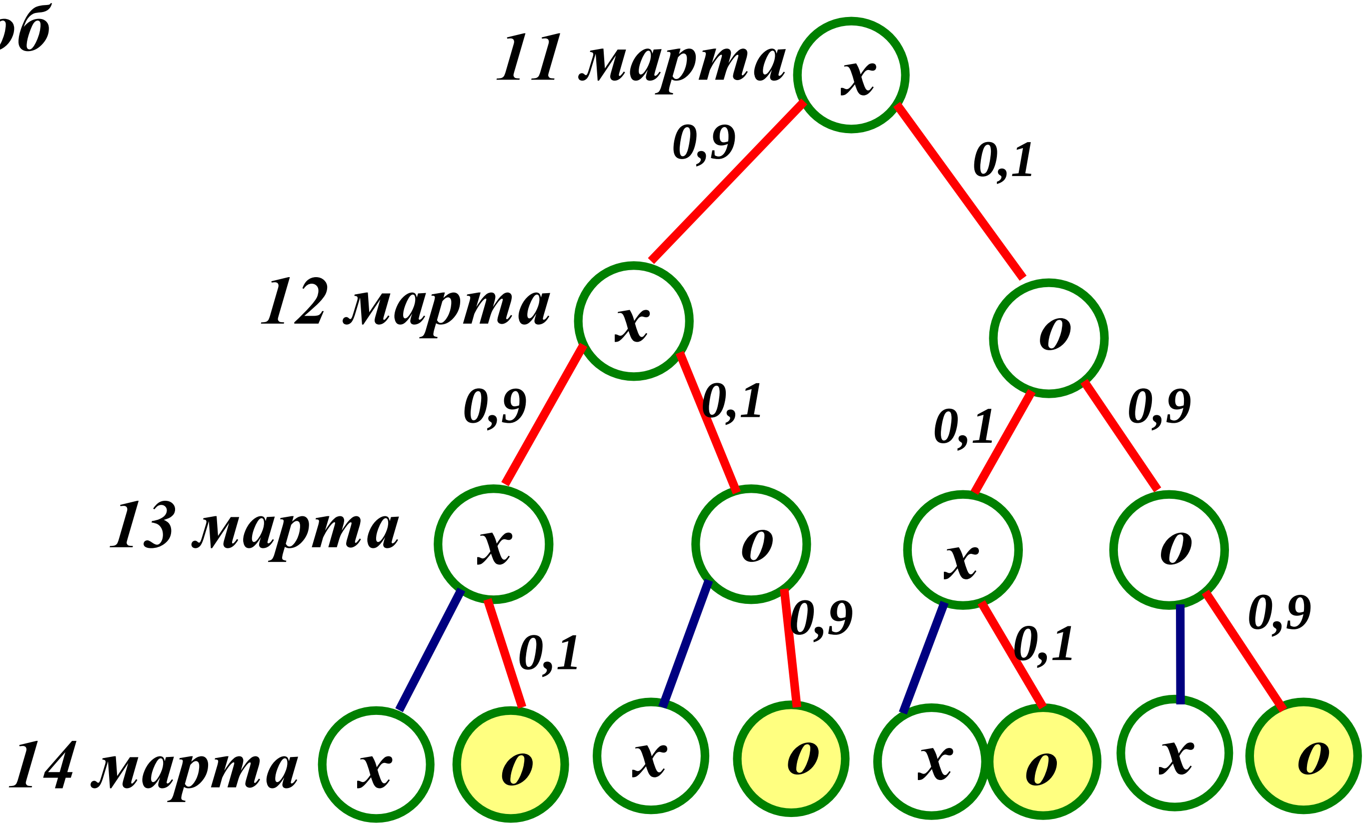
$$0{,}45 \cdot 0{,}03 + 0{,}55 \cdot 0{,}01 = 0{,}019$$

Задача

В Волшебной стране бывает два типа погоды: хорошая и отличная, причём погода, установившись утром, держится неизменной весь день. Известно, что с вероятностью 0,9 погода завтра будет такой же, как и сегодня. Сегодня 11 марта, погода в Волшебной стране хорошая. Найдите вероятность того, что 14 марта в Волшебной стране будет отличная погода.

Решение.

1 способ



Вероятность того, что 14 марта будет отличная погода, равна

0,9·0,9·0,1+ 0,9·0,1·0,9+ 0,1·0,1·0,1+ 0,1·0,9·0,9=3·0,081+
+0,001=0,244.

Решение.

Составим таблицу вероятностей для погоды в Волшебной стране.

	11 марта	12 марта	13 марта	14 марта
хорошая	1			
отличная	0			

Погода 12 марта с вероятностью 0,9 останется хорошей, с вероятностью 0,1 станет отличной. Занесём эти данные в таблицу.

	11 марта	12 марта	13 марта	14 марта
хорошая	1	0,9		
отличная	0	0,1		

Хорошая погода 13 марта может быть в двух случаях.

1) Погода 12 марта была хорошей и не изменилась. Вероятность этого равна $0{,}9 \cdot 0{,}9 = 0{,}81$.

2) Погода 12 марта была отличной и изменилась. Вероятность этого равна $0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}01$.

Таким образом, вероятность хорошей погоды 13 марта равна $0{,}81 + 0{,}01 = 0{,}82$. Вероятность отличной погоды 13 марта равна $1 - 0{,}82 = 0{,}18$. Заносим эти данные в таблицу.

	11 марта	12 марта	13 марта	14 марта
хорошая	1	0,9	0,82	
отличная	0	0,1	0,18	

Отличная погода 14 марта может быть в двух случаях.

Отличная погода 14 марта может быть в двух случаях.

1) Погода 13 марта была хорошей и изменилась. Вероятность этого равна $0{,}82 \cdot 0{,}1 = 0{,}082$.

2) Погода 13 марта была отличной и не изменилась. Вероятность этого равна $0{,}18 \cdot 0{,}9 = 0{,}162$.

Таким образом, вероятность отличной погоды 14 марта равна $0{,}082 + 0{,}162 = 0{,}244$.

	11 марта	12 марта	13 марта	14 марта
хорошая	1	0,9	0,82	
отличная	0	0,1	0,18	0,244

Ответ: 0,244.

Задача

В ресторане администратор предлагает гостям сыграть в следующую игру: гость бросает одновременно две игральные кости. Если он бросит комбинацию 3 и 6 очков хотя бы один раз из двух попыток, то получит комплимент от повара: мини-пиццу. Какова вероятность получить комплимент от повара? Ответ округлите до сотых.

Решение.

1-й способ.

Рассмотрим две гипотезы:

H_1 — при первом броске выпала нужная комбинация и

H_2 — при первом броске не выпала нужная комбинация.

$P(H_1) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$, так как из 36 упорядоченных пар ровно две удовлетворяют требованию: (3; 6) и (6; 3)). $P(H_2) = 1 - \frac{1}{18} = \frac{17}{18}$.

Событие A — «клиент получил комплимент от повара в результате этой игры».

$P(A) = P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|H_2) \cdot P(H_2)$.

$P(A|H_1) = 1$,

$P(A|H_2) = \frac{1}{18}$.

$$P(A) = 1 \cdot \frac{1}{18} + \frac{1}{18} \cdot \frac{17}{18} = \frac{35}{324} = 0{,}108\ldots \approx 0{,}11.$$

Решение.

2-й способ. Найдём вероятность противоположного события — в обеих попытках нужная комбинация не выпала. При одной попытке вероятность выпадения нужной комбинации равна $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$, так как из 36 упорядоченных пар, ровно две удовлетворяют требованию: (3; 6) и (6; 3). Вероятность невыпадения нужной комбинации равна $1 - \frac{1}{18} = \frac{17}{18}$. Оба раза нужная комбинация не выпала с вероятностью $\frac{17}{18} \cdot \frac{17}{18} = \frac{289}{324}$. И

Искомая вероятность равна $1 - \frac{289}{324} = \frac{35}{324} = 0{,}108\ldots \approx 0{,}11$.

Задача

Игорь бросал игральную кость до тех пор, пока сумма очков не превысила число 4. Найдите вероятность того, что потребовалось ровно 2 броска.

Решение.

Пусть H_i — событие, заключающееся в том, что при первом броске выпало i очков. Тогда $P(H_i) = \frac{1}{6}$ для любого целого i от 1 до 6. Пусть событие A — «сумма очков не превысила 4 при первом броске, но превысила при втором».

$$P(A|H_5) = P(A|H_6) = 0$$

При первом броске могло выпасть от 1 до 4 очков.

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) + P(A|H_3)P(H_3) + P(A|H_4)P(H_4) = P(A|H_1)\cdot\frac{1}{6} + P(A|H_2)\cdot\frac{1}{6} + P(A|H_3)\cdot\frac{1}{6} + P(A|H_4)\cdot\frac{1}{6}.$$

Ясно, что $P(A|H_1) = \frac{3}{6}$ (если при первом броске выпало 1, то при втором броске должно выпасть 4, 5 или 6 — три варианта из шести).

Аналогично $P(A|H_2) = \frac{4}{6}$ (если при первом броске выпало 2, то при втором броске должно выпасть 3, 4, 5 или 6 — четыре варианта из шести).

Далее, $P(A|H_3) = \frac{5}{6}$ (если при первом броске выпало 3, то при втором броске должно выпасть 2, 3, 4, 5 или 6 — пять вариантов из шести).

Наконец, $P(A|H_4) = 1$ (если при первом броске выпало 4, то при втором броске сумма гарантированно превысит 4).

Отсюда $P(A) = \frac{3}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{4}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} + 1\cdot\frac{1}{6} = 0{,}5.$

Задача

Артём бросил одновременно две игральных кости, ни на одной из них не выпало шесть. Какова вероятность при этом условии, что в сумме выпало 9 очков?

Решение. *1-й способ*

. Эксперимент заключается в подбрасывании двух игральных костей, исходом является упорядоченная пара чисел.

Эксперимент имеет $6 \cdot 6 = 36$ равновозможных исходов. Пусть событие A — «ни разу не выпало 6»

$5 \cdot 5 = 25$ исходов из 36 благоприятствуют событию A, $P(A) = \frac{25}{36}$.

Пусть событие B — «в сумме выпало 9 очков».

Тогда $A \cap B$ — «в сумме выпало 9 очков и ни разу не выпало 6».

Событию $A \cap B$ благоприятствуют исходы (4; 5) и (5; 4) — всего 2 исхода.

$P(A \cap B) = \frac{2}{36}$.

Тогда $P(B|A) = \dfrac{P(AB)}{P(B)} = \dfrac{\frac{2}{36}}{\frac{25}{36}} = \dfrac{2}{25} = 0{,}08$.

2-й способ

Посчитаем вероятность события B при условии, что A наступило. Если A наступило, то возможен любой из 25 исходов, из которых 2 благоприятствуют событию A. Искомая вероятность равна $\frac{2}{25} = 0{,}08$.

Задача

В городе 51 % взрослого населения — женщины. Работающие составляют 79,8 % взрослого населения. При этом доля работающих среди взрослых мужчин составляет 90 %. Для проведения исследования выбрали взрослую женщину случайным образом. Какая вероятность того, что выбранная женщина окажется работающей?

Решение.

Пусть всего в городе n взрослых жителей. Тогда женщин — $0{,}51n$, мужчин — $0{,}49n$. Доля работающих среди взрослых мужчин по условию равна 0,9. Долю работающих среди взрослых женщин обозначим через x, причём $0 \leqslant x \leqslant 1$. Тогда

$0{,}9 \cdot 0{,}49n + x \cdot 0{,}51n = 0{,}798n.$

Отсюда $0{,}9 \cdot 0{,}49 + x \cdot 0{,}51 = 0{,}798;$

$0{,}51x = 0{,}357;$ $x=0{,}7$

Можно решить по-другому. Пусть H_1 — «наудачу выбранный взрослый человек является мужчиной», H_2 — «наудачу выбранный взрослый человек является женщиной», A — «наудачу выбранный взрослый человек работает». По условию $P(A|H_1) = 0{,}9$, $P(H_2) = 0{,}51$, $P(H_1) = 1 - 0{,}51 = 0{,}49$, $P(A) = 0{,}798$. Подставив эти числа в формулу полной вероятности $P(A) = P(A|H_1)(H_1) + P(A|H_2)(H_2)$, можно определить, что $P(A|H_2) = 0{,}7$, что и является искомой величиной.

Задача

В ящике 8 фломастеров: 5 красных и 3 зелёных. Катя вытаскивает фломастеры по очереди. Какова вероятность, что в первый раз зелёный фломастер она вытащит четвёртым по счёту? Ответ округлите до сотых.

Решение.

Вероятность того, что первым Катя вытащит красный фломастер, равна $\frac{5}{8}$. Если это событие наступит, то вероятность вытащить снова красный фломастер станет равна $\frac{4}{7}$.

Аналогично вероятность вытащить третий красный фломастер при условии того, что первые два — красные, равна $\frac{3}{6}$.

Вероятность того, что первые три вытащенных фломастера — красные, равна $\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{5}{28}$. Если первые три вытащенных фломастера — красные, то вероятность четвёртым вытащить зелёный равна $\frac{3}{5}$.

Искомая вероятность равна $\frac{5}{28} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{28} = 0{,}107\ldots \approx 0{,}11$.

Задача

У Вадима есть два игральных кубика. Первый из них обычный, а на гранях второго кубика числа 2 и 4 встречаются по три раза. В остальном кубики одинаковые. Вадим наудачу выбрал один из двух кубиков и бросил его два раза. Известно, что в каком-то порядке выпали 2 и 4 очка. Какова вероятность того, что он бросил второй кубик?

Решение.

Рассмотрим две гипотезы:

H_1 — «был взят первый кубик»

H_2 — «был взят второй кубик».

По условию обязательно наступает ровно одна из этих гипотез, $P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}$.

A — «в каком-то порядке выпали числа 2 и 4».

$$P(A|H_1) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{18}. \quad P(A|H_2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

(Сначала 2, потом 4 или сначала 4 потом 2)

$$P(A) = P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|H_2) \cdot P(H_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{18} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{18}$$

$$P(H_2|A) = \frac{P(A|H_2)P(H_2)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{5}{18}} = 0{,}9.$$

Задача

При подозрении на наличие некоторого заболевания пациента отправляют на ПЦР-тест. Если заболевание действительно есть, то тест подтверждает его в 88 % случаев. Если заболевания нет, то тест выявляет отсутствие заболевания в среднем в 92 % случаев. Известно, что в среднем тест оказывается положительным у 11 % пациентов некоторой поликлиники, направленных на тестирование. При обследовании пациента А. врач направил его на ПЦР-тест, который оказался положительным. Какова вероятность того, что пациент А. действительно имеет это заболевание?

Решение.

Пусть эксперимент заключается в выборе одного случайного пациента, направленного на анализ.

H_1 — «этот пациент болен», H_2 — «этот пациент не болен».

A — «у наудачу взятого пациента тест дал положительный результат».

По условию $P(A) = 0{,}11$. $P(H_1) = x$, $P(H_2) = 1 - x$.

$P(A|H_1) = 0{,}88$, $P(A|H_2) = 1 - 0{,}92 = 0{,}08$. $P(H_1|A)$—?

$$P(A) = P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|H_2) \cdot P(H_2) = 0{,}88x + 0{,}08(1 - x).$$

Получим уравнение $0{,}88x + 0{,}08(1 - x) = 0{,}11$; $x = \frac{3}{80}$.

$$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1) \cdot P(H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}88 \cdot \frac{3}{80}}{0{,}11} = 0{,}3.$$

Задача

Турнир по футболу проводится по олимпийской системе в несколько туров: если в туре участвует чётное число команд, то они разбиваются на случайные игровые пары. Если число команд нечётно, то с помощью жребия выбираются случайные игровые пары, а одна команда остаётся без пары и не участвует в туре. Проигравшая в каждой паре команда (в случае ничьей проводятся серии пенальти до победы одного из участников) выбывает из турнира, а победители и команда без пары, если она есть, выходят в следующий тур, который проводится по таким же правилам. Так продолжается до тех пор, пока не останутся две команды, которые играют между собой финальный тур, то есть последний матч, который выявляет победителя турнира. Всего в турнире участвует 20 команд, все они играют одинаково хорошо, поэтому в каждой встрече вероятность выигрыша и поражения у каждого игрока равна 0,5. Среди игроков две команды из Ставрополя «Факел» и «Пламя». Определите вероятность того, что каком-то туре им придётся сыграть друг с другом.

Решение.

Рассмотрим два события:

A — «Команда „Факел“ прекратила участие в турнире, проиграв „Пламени“»;

B — «Команда „Пламя“ прекратила участие в турнире, проиграв „Факелу“».

Эти два события несовместны.

Искомая вероятность равна $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Найдём $P(A)$. Рассмотрим две гипотезы:

H_1 — «„Факел“ выиграл турнир»,

H_2 — «„Факел“ не выиграл турнир» (эти гипотезы являются противоположными событиями).

$P(H_1) = \dfrac{1}{20}$, так как каждая из 20 команд-участников имеет по условию равные шансы на победу в турнире.

Отсюда $P(H_2) = 1 - \dfrac{1}{20} = \dfrac{19}{20}$. $P(A|H_1) = 0$ $P(A|H_2) = \dfrac{1}{19}$

$$P(A) = P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|H_2) \cdot P(H_2) = 0 + \frac{1}{19} \cdot \frac{19}{20} = \frac{1}{20}.$$

$$P(B) = P(A) = \frac{1}{20}.$$

Искомая вероятность равна $\dfrac{1}{20} + \dfrac{1}{20} = 0{,}1$.

Задача

В некотором турнире участвуют 8 команд. Все команды разной силы, и в каждой встрече выигрывает та команда, которая сильнее. В первом раунде встречаются две случайно выбранные команды. Ничья невозможна. Проигравшая команда выбывает из турнира, а победившая команда играет со следующим случайно выбранным соперником. Известно, что в первых трёх играх победила команда «Игрек». Какова вероятность того, что эта команда выиграет четвёртый раунд?

Решение.

За время первых k игр в турнир вступит $(k+1)$ команда.

Можно считать, что одна из команд, выступающих в первом раунде, заходит в помещение для игры раньше другой, поэтому все команды вступают в турнир в определённом порядке.

A — «Команда „Игрек“ выиграла первые три игры турнира»,

B — «Команда „Игрек“ выиграла четвёртую игру турнира».

Тогда $B \cap A$ — «Команда „Игрек“ выиграла первые четыре игры турнира».

Искомая вероятность $P(B|A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)}$.

1. Найдём $P(A)$. Для наступления события A необходимо, чтобы «Игрек» вступил в турнир в первом раунде и оказался самой сильной командой среди первых четырёх, которые участвуют в этих трёх раундах.

Вероятность того, что «Игрек» вступит в турнир в первом раунде, то есть под номером 1 или 2, равна $\frac{2}{8}$. Вероятность того, что «Игрек» будет самой сильной командой, при этом условии равна $\frac{1}{4}$, так как мы с одинаковой вероятностью можем предполагать любую силу команды «Игрек», а всего в первых трёх раундах участвуют четыре команды.

Тогда $P(A) = \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{4}$.

2. Найдём $P(B \cap A)$.

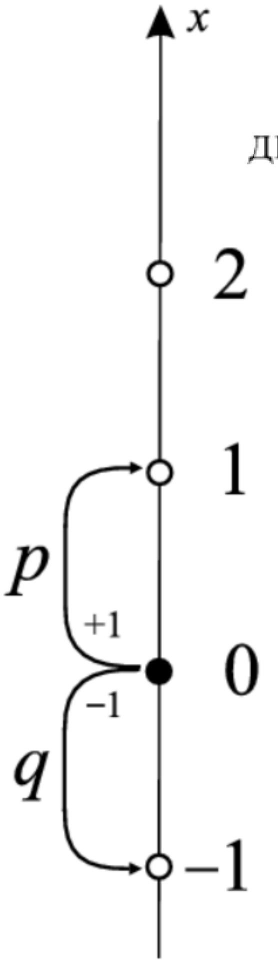
$P(B \cap A) = \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{5}$.

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{8} \cdot \frac{1}{5}}{\frac{2}{8} \cdot \frac{1}{4}} = \frac{\left(\frac{1}{5}\right)}{\left(\frac{1}{4}\right)} = 0{,}8.$$

Задача (www.mathege.ru)

Первый член последовательности целых чисел равен 0. Каждый следующий член последовательности с вероятностью $p = 0{,}8$ на единицу больше предыдущего и с вероятностью $1 - p$ на единицу меньше предыдущего. Какова вероятность того, что какой-то член этой последовательности окажется равен -1?

Решение



Пусть P_0 — вероятность попасть в точку -1, если вначале мы находимся в точке 0.

Так как из точки 0 можно пойти вверх с вероятностью p или вниз с вероятностью $q = 1 - p$ и эти события несовместны, то

$$P_0 = q + p \cdot P_1,$$

где P_1 — вероятность попасть в точку -1, находясь в точке 1.

Так как P_0 — это фактически вероятность из данной начальной точки достигнуть точку на единицу ниже, то $P_1 = P_0 \cdot P_0 = P_0^2$.

Получим квадратное уравнение

$$P_0 = q + p \cdot P_0^2.$$

Перепишем уравнение в виде $p \cdot P_0^2 - P_0 + q = 0$,
его дискриминант $D = 1-4pq = 1-4(1-q)q = 4q^2-4q+1 = (2q-1)^2$.

Тогда $P_0 = \dfrac{1 \pm (2q-1)}{2p}$.

Отсюда

$$P_0 = \frac{1+2q-1}{2p} = \frac{q}{p} \quad \text{или} \quad P_0 = \frac{1-(2q-1)}{2p} = \frac{2(1-q)}{2p} = 1.$$

При $q \geqslant p$ так как $P_0 \leqslant 1$, то $P_0 = 1$.

В нашем случае $q < p$. Поэтому $P_0 = \dfrac{q}{p} = \dfrac{1-0{,}8}{0{,}8} = 0{,}25$. *Ответ:* 0,25.

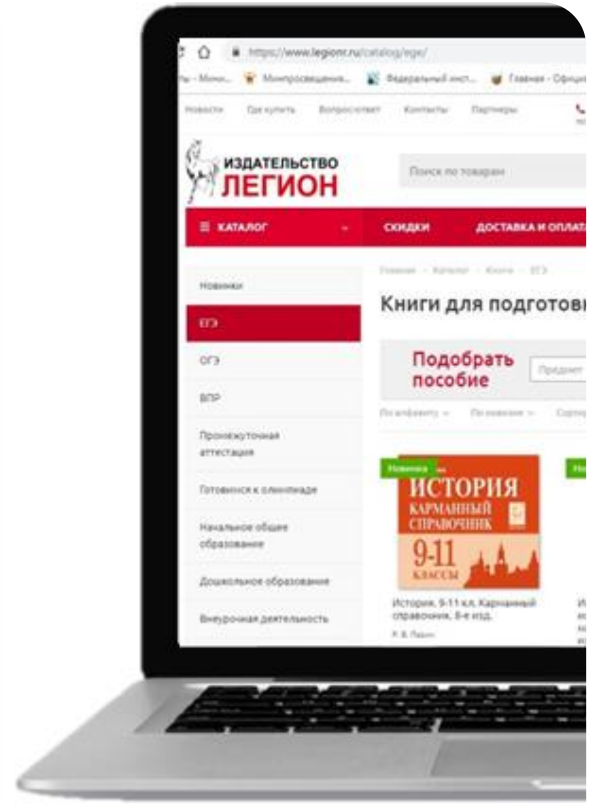
Где купить?

- Официальный интернет-магазин издательства «Легион» www.legionr.ru

  Оплата наличными, банковским переводом, при получении. Доставка «Почтой России» или транспортной компанией. Скидки. Бесплатная доставка при заказе от 1500 руб.

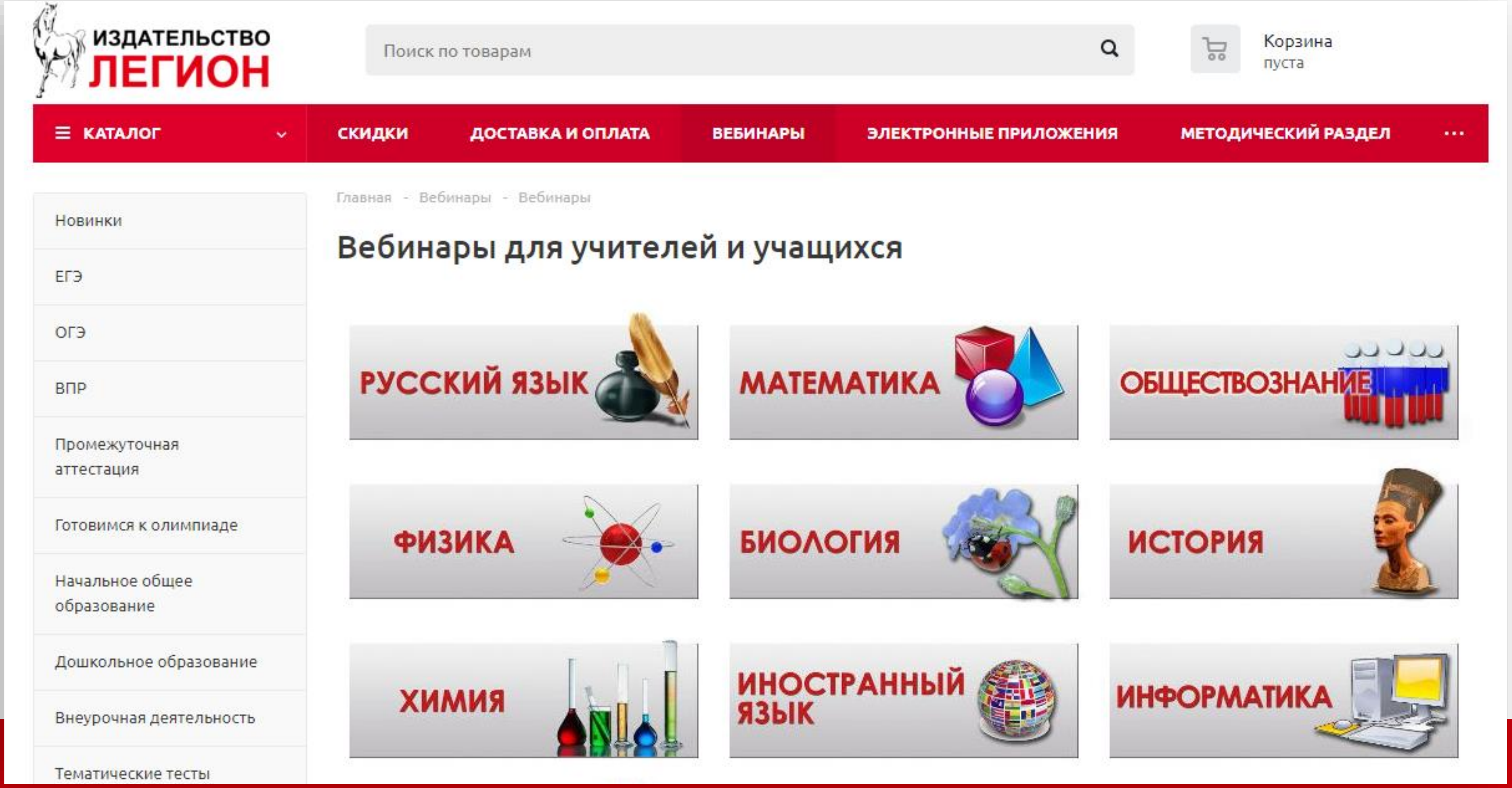
- Интернет-магазины www.ozon.ru, www.labirint.ru

- Книжные магазины города



ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЕГИОН

Бесплатные вебинары, именные сертификаты на www.legionr.ru



ИЗДАТЕЛЬСТВО
ЛЕГИОН

Издательство, отдел оптовых продаж
+7 (863) 303-05-50
legionrus@legionrus.com

Интернет-магазин
+7 (800) 707-37-12
+7 (863) 285-09-77
bookweb@legionrus.com

www.legionr.ru