

1. О подбрасывании монеты и бросках кубика

■ Примеры

- №1. Перед началом футбольного матча судья бросает монетку, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Физик» играет два матча с разными командами. Найдите вероятность того, что оба раза мяч выиграет «Физик».
-
- №2. Перед началом футбольного матча судья бросает монетку, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Геолог» играет три матча с разными командами. Найдите вероятность того, что в этих играх «Геолог» проиграет жребий ровно один раз.
-
- №3. Перед началом волейбольного матча капитаны команд тянут честный жребий, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Стратор» по очереди играет с командами «Ротор», «Стартер» и «Протор». Найдите вероятность того, что «Стратор» будет начинать только вторую и последнюю игры.
-
- №4. Игральный кубик бросают дважды. Известно, что в сумме выпало 8 очков. Найдите вероятность того, что во второй раз выпало 3 очка.
-
- №5. При двукратном бросании кости в сумме выпало 9 очков. Какова вероятность того, что хотя бы раз выпало 5 очков?
-
- №6. Игральную кость бросили два раза. Известно, что три очка не выпали ни разу. Найдите при этом условии вероятность события «сумма выпавших очков окажется равна 8».
-
- №7. Симметричную монету бросают 10 раз. Во сколько раз вероятность события "выпадет ровно 5 орлов" больше вероятности события "выпадет ровно 4 орла".
-
- №8. Игральную кость бросали до тех пор, пока сумма всех выпавших очков не превысила число 6. Какова вероятность того, что для этого потребовалось два броска? Ответ округлите до сотых.
-
- №9. Игральную кость бросали до тех пор, пока сумма всех выпавших очков не превысила число 2. Какова вероятность того, что для этого потребовалось два броска? Ответ округлите до сотых.
-
- №10. Игральную кость бросали до тех пор, пока сумма всех выпавших очков не превысила число 3. Какова вероятность того, что для этого потребовалось ровно три броска? Ответ округлите до сотых.
-
- №11. Игральную кость бросили один или несколько раз. Оказалось, что сумма всех выпавших очков равна 4. Какова вероятность того, что был сделан один бросок? Ответ округлите до сотых.
-
- №12. Игральную кость бросили один или несколько раз. Оказалось, что сумма всех выпавших очков равна 4. Какова вероятность того, что потребовалось сделать три броска? Ответ округлите до сотых.
-
- №13. Первый игральный кубик обычный, а на гранях второго кубика нет четных чисел, а нечетные числа 1, 3 и 5 встречаются по два раза. В остальном кубики одинаковые. Один случайно выбранный кубик бросают два раза. Известно, в каком-то порядке выпали 3 и 5 очков. какова вероятность того, что бросали второй кубик?

Решение (примеры) 1. О подбрасывании монеты и бросках кубика

№1. Перед началом футбольного матча судья бросает монетку, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Физик» играет два матча с разными командами. Найдите вероятность того, что оба раза мяч выиграет «Физик».

Пусть «решка» - это выигрыш в жребии. Количество возможных исходов $2^2 = 4$. Благоприятствует событию «решка выпадет ровно два раза» 1 исход: РР. Искомая вероятность $P(A) = \frac{1}{4} = 0,25$.

Ответ: 0,25.

№2. Перед началом футбольного матча судья бросает монетку, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Геолог» играет три матча с разными командами. Найдите вероятность того, что в этих играх «Геолог» проиграет жребий ровно один раз.

Пусть «орел» - это проигрыш в жребии. Количество возможных исходов $2^3 = 8$. Благоприятствует событию «орел выпадет ровно один раз» 3 исхода: ОРР, РОР, РРО. Искомая вероятность

$$P(A) = \frac{3}{8} = 0,375.$$

Ответ: 0,375.

№3. Перед началом волейбольного матча капитаны команд тянут честный жребий, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Стратор» по очереди играет с командами «Ротор», «Стартер» и «Протор». Найдите вероятность того, что «Стратор» будет начинать только вторую и последнюю игры.

«Стратор»		
«Ротор»	«Стартер»	«Протор»
О	О	О
О	О	Р
О	Р	О
Р	О	О
О	Р	Р
Р	О	Р
Р	Р	О
Р	Р	Р

Пусть «решка» - это выигрыш в жребии. Количество возможных исходов $2^3 = 8$.

Благоприятствует событию «Стратор будет начинать только вторую и последнюю игры» 1 исход. Искомая вероятность

$$P(A) = \frac{1}{8} = 0,125.$$

Ответ: 0,125.

№4. Игральный кубик бросают дважды. Известно, что в сумме выпало 8 очков. Найдите вероятность того, что во второй раз выпало 3 очка.

I / II	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Всего имеется 5 равновозможных исходов «в сумме выпало 8 очков».

Благоприятных исходов «во второй раз выпало 3 очка» (5;3) - одно событие.

$$\text{Искомая вероятность } \frac{1}{5} = 0,2$$

Ответ: 0,2.

№5. При двукратном бросании кости в сумме выпало 9 очков. Какова вероятность того, что хотя бы раз выпало 5 очков?

I / II	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Всего имеется 4 равновозможных исходов «в сумме выпало 9 очков».

Благоприятных исходов «хотя бы раз выпало 5 очка» (5;4) и (4;5) - два события.

$$\text{Искомая вероятность } \frac{2}{4} = 0,5$$

Ответ: 0,5.

№6. Игральную кость бросили два раза. Известно, что три очка не выпали ни разу. Найдите при этом условии вероятность события «сумма выпавших очков окажется равна 8».

I / II	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Всего имеется 25 равновероятных исходов «три очка не выпали ни разу».
Благоприятных исходов при этом условии «сумма выпавших очков окажется равна 8» - 3 события.

Искомая вероятность $\frac{3}{25} = 0,12$

Ответ: 0,12.

№7. Симметричную монету бросают 10 раз. Во сколько раз вероятность события "выпадет ровно 5 орлов" больше вероятности события "выпадет ровно 4 орла".

Пусть $n = 10$ это число событий, $k_1 = 5$ - число событий "орел выпадет ровно пять раз", $k_2 = 4$ - число событий "орел выпадет ровно четыре раза".

Всего возможных исходов при бросании монеты 10 раз равно 2^{10} .

Благоприятных исходов события "орел выпадет ровно пять раз" определяем по формуле сочетания

$$C_n^{k_1} = C_{10}^5 = \frac{n!}{k_1!(n-k_1)!} = \frac{10!}{5!(10-5)!} = \frac{10!}{5! \cdot 5!}. \text{ Тогда вероятность этого события равна } P_1 = \frac{C_n^{k_1}}{2^n} = \frac{C_{10}^5}{2^{10}}.$$

Благоприятных исходов события "орел выпадет ровно четыре раза" определяем по формуле сочетания

$$C_n^{k_2} = C_{10}^4 = \frac{n!}{k_2!(n-k_2)!} = \frac{10!}{4!(10-4)!} = \frac{10!}{4! \cdot 6!}. \text{ Тогда вероятность этого события равна } P_2 = \frac{C_n^{k_2}}{2^n} = \frac{C_{10}^4}{2^{10}}.$$

$$\text{Отношение вероятностей } \frac{P_1}{P_2} = \frac{C_{10}^5}{C_{10}^4} = \frac{C_{10}^5}{C_{10}^4} = \frac{10!}{5! \cdot 5!} : \frac{10!}{4! \cdot 6!} = \frac{4! \cdot 6!}{5! \cdot 5!} = \frac{4! \cdot 5! \cdot 6}{4! \cdot 5! \cdot 5!} = \frac{6}{5} = 1,2.$$

Значит, событие "орел выпадет ровно пять раз" более вероятно, чем событие "орел выпадет ровно четыре раза" в 1,2 раза.

Ответ: 1,2.

№8. Игральную кость бросали до тех пор, пока сумма всех выпавших очков не превысила число 6. Какова вероятность того, что для этого потребовалось два броска? Ответ округлите до сотых.

Рассмотрим случаи, когда сумма выпавших очков превысит число 6 за два броска:

(1;6) (2;5) (3;4) (4;3) (5;2) (6;1)
(2;6) (3;5) (4;4) (5;3) (6;2)
(3;6) (4;5) (5;4) (6;3)
(4;6) (5;5) (6;4)
(5;6) (6;5)

(6;6). Всего 21 случай. Общее число возможных исходов при бросании

игральной кости два раза равно $6^2 = 36$. Тогда искомая вероятность равна $\frac{21}{36} \approx 0,583... \approx 0,58$.

Ответ: 0,58.

№9. Игральную кость бросали до тех пор, пока сумма всех выпавших очков не превысила число 2. Какова вероятность того, что для этого потребовалось два броска? Ответ округлите до сотых.

Рассмотрим случаи, когда сумма выпавших очков превысит число 2 за два броска:

(1;2) (2;1)
(1;3) (2;2)
(1;4) (2;3)
(1;5) (2;4)
(1;6) (2;5)

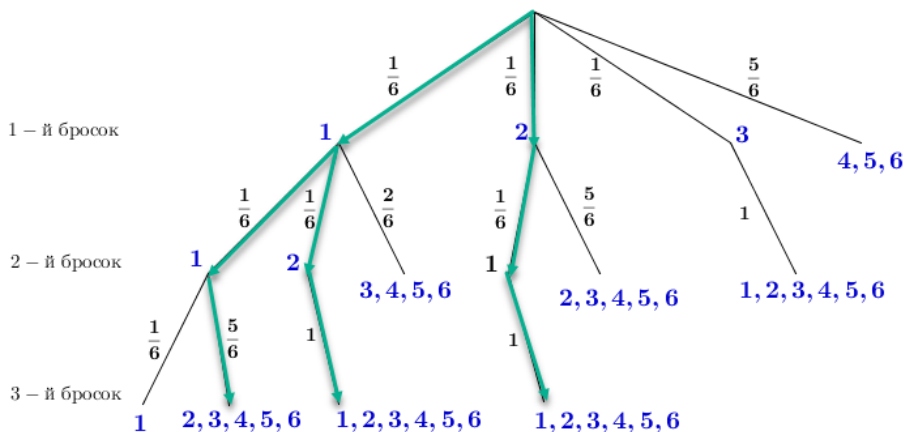
(2;6). Всего 11 случаев. Общее число возможных исходов при бросании игральной кости два раза равно

$6^2 = 36$. Тогда искомая вероятность равна $\frac{11}{36} \approx 0,305... \approx 0,31$.

Ответ: 0,31.

№10. Игральную кость бросали до тех пор, пока сумма всех выпавших очков не превысила число 3. Какова вероятность того, что для этого потребовалось ровно три броска? Ответ округлите до сотых.

Фраза «игральную кость бросали до тех пор, пока сумма всех выпавших очков не превысила число 3» означает, что игральную кость продолжали бросать, если сумма всех выпавших очков была меньше или равна трем, и прекратили бросать, когда эта сумма превысила 3. Следовательно, если было сделано три броска, то на третьем броске сумма должна была превысить 3.

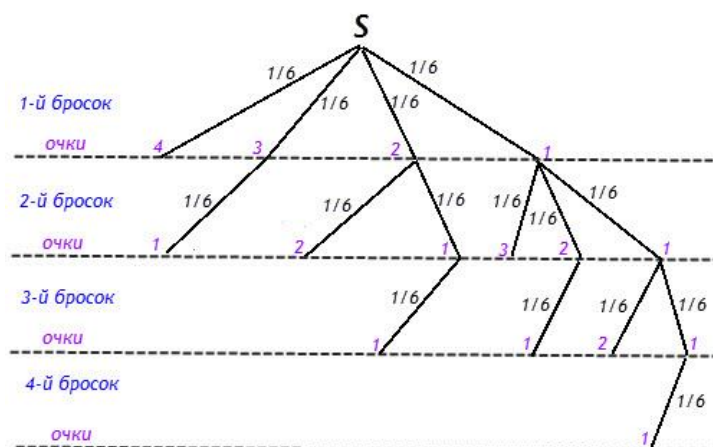


$$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot 1 = \frac{5}{216} + \frac{1}{18} = \frac{17}{216} \approx 0,078... \approx 0,08$$

Ответ: 0,08.

№11. Игральную кость бросили один или несколько раз. Оказалось, что сумма всех выпавших очков равна 4. Какова вероятность того, что был сделан один бросок? Ответ округлите до сотых.

Проиллюстрируем деревом вероятностей как можно получить 4 очка.



Вероятность получить 4 очка равна: $P_{4 \text{ очка}} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{6^4} = \frac{343}{6^4}$.

Вероятность получить 4 очка при одном броске равна: $P_{4 \text{ очка при одном броске}} = \frac{1}{6}$.

Вероятность того, что сделан один бросок и при этом получено 4 очка:

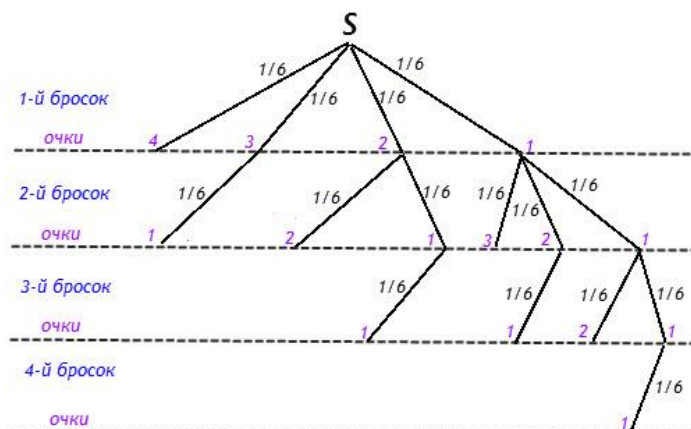
$$P_{4 \text{ очка при одном броске}} = P_{4 \text{ очка}} \cdot P_{1 \text{ бросок}}$$

$$\frac{1}{6} = \frac{343}{6^4} \cdot P_{1 \text{ бросок}}, \quad P_{1 \text{ бросок}} = \frac{216}{343} \approx 0,629... \approx 0,63$$

Ответ: 0,63.

№12. Игральную кость бросили один или несколько раз. Оказалось, что сумма всех выпавших очков равна 4. Какова вероятность того, что потребовалось сделать три броска? Ответ округлите до сотых.

Проиллюстрируем деревом вероятностей как можно получить 4 очка.



Вероятность получить 4 очка равна: $P_{4 \text{ очка}} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{6^4} = \frac{343}{6^4}$.

Вероятность того, что в результате трех бросков сумма выпавших очков оказалась равна 4:

$$P_{4 \text{ очка при трех бросках}} = \frac{1}{6^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{6^3} = \frac{3}{6^3}.$$

Вероятность того, что сделано три броска и при этом получено 4 очка:

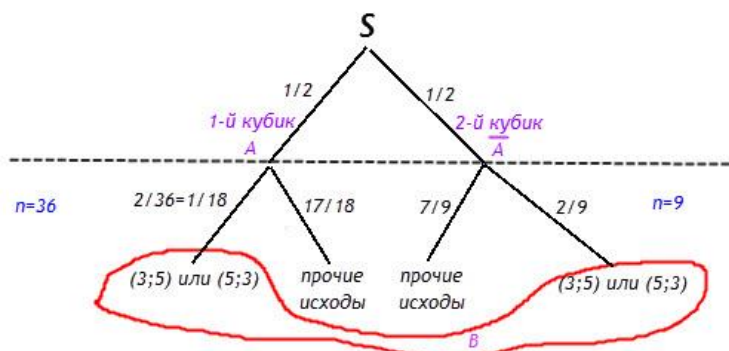
$$P_{4 \text{ очка при трех бросках}} = P_{4 \text{ очка}} \cdot P_{3 \text{ броска}}$$

$$\frac{3}{6^3} = \frac{343}{6^4} \cdot P_{3 \text{ броска}}, \quad P_{3 \text{ броска}} = \frac{18}{343} \approx 0,052... \approx 0,05$$

Ответ: 0,05.

№13. Первый игральный кубик обычный, а на гранях второго кубика нет четных чисел, а нечетные числа 1, 3 и 5 встречаются по два раза. В остальных кубики одинаковые. Один случайно выбранный кубик бросают два раза. Известно, в каком-то порядке выпали 3 и 5 очков. Какова вероятность того, что бросали второй кубик?

Поскольку кубик выбирается случайно, то вероятности события A "бросили первый кубик" и противоположного события $\bar{A}$ "бросили второй кубик" равны. Первый кубик обычный. Число исходов при одном броске равно 6, при двух бросках $6^2 = 36$. При бросании второго кубика число исходов при одном броске равно 3, при двух бросках $3^2 = 9$.



Пусть B - событие, при котором выпадает нужная комбинация при бросании либо первого кубика, либо

второго кубика. Вероятность этого события равна $P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{18} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{9} = \frac{5}{36}$.

Определим вероятность того, что бросали именно второй кубик. Это условная вероятность, т.е. определим долю, которую вероятность события "нужная комбинация выпала на втором кубике" $\bar{A} \cap B$ занимает в

вероятности события B : $P(\bar{A}|B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{9}}{\frac{5}{36}} = \frac{4}{5} = 0,8.$

Ответ: 0,8.

■ Тест

1. О подбрасывании монеты и бросках кубика

- №1. Перед началом футбольного матча судья бросает монетку, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Физик» играет три матча с разными командами. Найдите вероятность того, что в этих играх «Физик» выиграет жребий ровно два раза.
-
- №2. Перед началом волейбольного матча капитаны команд тянут честный жребий, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Стратор» по очереди играет с командами «Ротор», «Стартер» и «Протор». Найдите вероятность того, что «Стратор» будет начинать только первую и последнюю игры.
-
- №3. Игральный кубик бросают дважды. Известно, что в сумме выпало 11 очков. Найдите вероятность того, что в первый раз выпало 6 очков.
-
- №4. При двукратном бросании кости в сумме выпало 11 очков. Какова вероятность того, что хотя бы раз выпало 5 очков?
-
- №5. Игральную кость бросили два раза. Известно, что шесть очков не выпали ни разу. Найдите при этом условии вероятность события «сумма выпавших очков окажется равна 2».
-
- №6. Симметричную монету бросают 22 раза. Во сколько раз вероятность события "выпадет ровно 10 орлов" больше вероятности события "выпадет ровно 9 орлов".
-
- №7. Игральную кость бросали до тех пор, пока сумма всех выпавших очков не превысила число 7. Какова вероятность того, что для этого потребовалось два броска? Ответ округлите до сотых.
-
- №8. Игральную кость бросают до тех пор, пока сумма всех выпавших очков не превысит число 2. Какова вероятность того, что для этого потребуется ровно три броска? Ответ округлите до тысячных.
-
- №9. Игральную кость бросили один или несколько раз. Оказалось, что сумма всех выпавших очков равна 3. Какова вероятность того, что было сделано два броска? Ответ округлите до сотых.
-
- №10. Первый игральный кубик обычный, а на гранях второго кубика нет чисел, больших чем 2, а числа 1 и 2 встречаются по три раза. В остальном кубики одинаковые. Один случайно выбранный кубик бросают два раза. Известно, в каком-то порядке выпали 1 и 2 очков. какова вероятность того, что бросали второй кубик?

■ **Ответы (тест)** 1. О подбрасывании монеты и бросках кубика

№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10
0,375	0,125	0,5	1	0,04	1,3	0,42	0,005	0,24	0,9

■ **Решение (тест)** 1. О подбрасывании монеты и бросках кубика

№1. Перед началом футбольного матча судья бросает монетку, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Физик» играет три матча с разными командами. Найдите вероятность того, что в этих играх «Физик» выиграет жребий ровно два раза.

Пусть «решка» - это выигрыш в жребии. Количество возможных исходов $2^3 = 8$. Благоприятствует событию «решка выпадет ровно два раза» 3 исхода: ОРР, РОР, РРО. Искомая вероятность

$$P(A) = \frac{3}{8} = 0,375.$$

Ответ: 0,375.

№2. Перед началом волейбольного матча капитаны команд тянут честный жребий, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Стратор» по очереди играет с командами «Ротор», «Стартер» и «Протор». Найдите вероятность того, что «Стратор» будет начинать только первую и последнюю игры.

«Стратор»		
«Ротор»	«Стартер»	«Протор»
О	О	О
О	О	Р
О	Р	О
Р	О	О
О	Р	Р
Р	О	Р
Р	Р	О
Р	Р	Р

Пусть «решка» - это выигрыш в жребии. Количество возможных исходов $2^3 = 8$. Благоприятствует событию «Стратор будет начинать только первую и последнюю игры» 1 исход. Искомая вероятность

$$P(A) = \frac{1}{8} = 0,125.$$

Ответ: 0,125.

№3. Игральный кубик бросают дважды. Известно, что в сумме выпало 11 очков. Найдите вероятность того, что в первый раз выпало 6 очков.

I / II	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Всего имеется 2 равновозможных исхода "в сумме выпало 11 очков".

Благоприятных исходов «в первый раз выпало 6 очков» (6;5) - одно событие.

$$\text{Искомая вероятность } \frac{1}{2} = 0,5.$$

Ответ: 0,5.

№4. При двукратном бросании кости в сумме выпало 11 очков. Какова вероятность того, что хотя бы раз выпало 5 очков?

I / II	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Всего имеется 2 равновозможных исхода "в сумме выпало 11 очков".

Благоприятных исходов «хотя бы раз выпало 6 очков» (6;5) и (5;6) - два события.

$$\text{Искомая вероятность } \frac{2}{2} = 1$$

Ответ: 1.

№5. Игральную кость бросили два раза. Известно, что шесть очков не выпали ни разу. Найдите при этом условии вероятность события «сумма выпавших очков окажется равна 2».

I / II	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Всего имеется 25 равновероятных исходов «шесть очков не выпали ни разу».

Благоприятных исходов при этом условии «сумма выпавших очков окажется равна 1» - 1 событие.

$$\text{Искомая вероятность } \frac{1}{25} = 0,04$$

Ответ: 0,04.

№6. Симметричную монету бросают 22 раза. Во сколько раз вероятность события "выпадет ровно 10 орлов" больше вероятности события "выпадет ровно 9 орлов".

Пусть $n = 22$ это число событий, $k_1 = 10$ - число событий "орел выпадет ровно десять раз", $k_2 = 9$ - число событий "орел выпадет ровно девять раз".

Всего возможных исходов при бросании монеты 22 раза равно 2^{22} .

Благоприятных исходов события "орел выпадет ровно десять раз" определяем по формуле сочетания

$$C_n^{k_1} = C_{22}^{10} = \frac{22!}{10!(22-10)!} = \frac{22!}{10! \cdot 12!}. \text{ Тогда вероятность этого события равна } P_1 = \frac{C_n^{k_1}}{2^n} = \frac{C_{22}^{10}}{2^{22}}.$$

Благоприятных исходов события "орел выпадет ровно девять раз" определяем по формуле сочетания

$$C_n^{k_2} = C_{22}^9 = \frac{22!}{9!(22-9)!} = \frac{22!}{9! \cdot 13!}. \text{ Тогда вероятность этого события равна } P_2 = \frac{C_n^{k_2}}{2^n} = \frac{C_{22}^9}{2^{22}}.$$

$$\text{Отношение вероятностей } \frac{P_1}{P_2} = \frac{C_{22}^{10}}{2^{22}} : \frac{C_{22}^9}{2^{22}} = \frac{C_{22}^{10}}{C_{22}^9} = \frac{22!}{10! \cdot 12!} : \frac{22!}{9! \cdot 13!} = \frac{9! \cdot 13!}{10! \cdot 12!} = \frac{9! \cdot 12! \cdot 13}{9! \cdot 10 \cdot 12!} = \frac{13}{10} = 1,3.$$

Ответ: 1,3.

№7. Игральную кость бросали до тех пор, пока сумма всех выпавших очков не превысила число 7. Какова вероятность того, что для этого потребовалось два броска? Ответ округлите до сотых.

Рассмотрим случаи, когда сумма выпавших очков превысит число 7 за два броска:

(2;6) (3;5) (4;4) (5;3) (6;2)

(3;6) (4;5) (5;4) (6;3)

(4;6) (5;5) (6;4)

(5;6) (6;5)

(6;6). Всего 15 случаев. Общее число возможных исходов при бросании игральной

кости два раза равно $6^2 = 36$. Тогда искомая вероятность равна $\frac{15}{36} \approx 0,416... \approx 0,42$. Ответ: 0,42.

№8. Игральную кость бросают до тех пор, пока сумма всех выпавших очков не превысит число 2. Какова вероятность того, что для этого потребуется ровно три броска? Ответ округлите до тысячных.

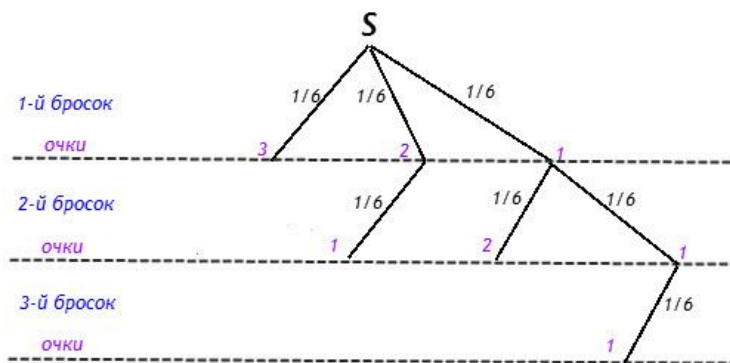
При первых двух бросках сумма выпавших очков равна 2, если выпала комбинация (1;1). Вероятность этого

события $\frac{1}{36}$. На третьем броске любое из значений выпавших очков уже превысит число 2. Вероятность

получить такое число - $\frac{1}{6}$. Искомая вероятность равна $\frac{1}{36} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216} \approx 0,0046... \approx 0,005$ Ответ: 0,005.

№9. Игральную кость бросили один или несколько раз. Оказалось, что сумма всех выпавших очков равна 3. Какова вероятность того, что было сделано два броска? Ответ округлите до сотых.

Проиллюстрируем деревом вероятностей как можно получить 3 очка.



Вероятность получить 3 очка равна: $P_{3 \text{ очка}} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{6^3} = \frac{49}{6^3}$.

Вероятность того, что в результате двух бросков сумма выпавших очков оказалась равна 3:

$$P_{3 \text{ очка при двух бросках}} = \frac{1}{6^2} + \frac{1}{6^2} = \frac{2}{6^2}.$$

Вероятность того, что сделано два броска и при этом получено 3 очка:

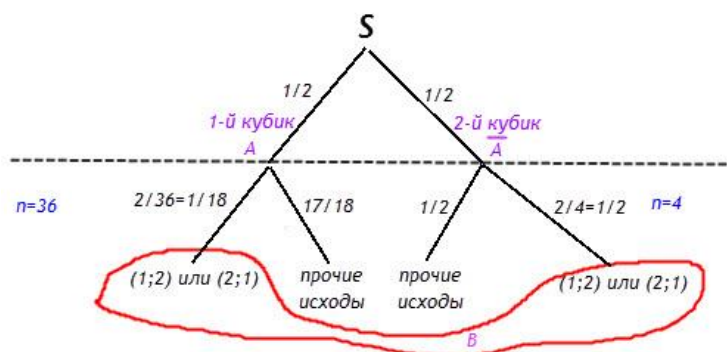
$$P_{3 \text{ очка при двух бросках}} = P_{3 \text{ очка}} \cdot P_{2 \text{ броска}}$$

$$\frac{2}{6^2} = \frac{49}{6^3} \cdot P_{2 \text{ броска}}, \quad P_{2 \text{ броска}} = \frac{12}{49} \approx 0,244... \approx 0,24$$

Ответ: 0,24.

№10. Первый игральный кубик обычный, а на гранях второго кубика нет чисел, больших чем 2, а числа 1 и 2 встречаются по три раза. В остальном кубики одинаковые. Один случайно выбранный кубик бросают два раза. Известно, в каком-то порядке выпали 1 и 2 очка. какова вероятность того, что бросали второй кубик?

Поскольку кубик выбирается случайно, то вероятности события A "бросили первый кубик" и противоположного события $\bar{A}$ "бросили второй кубик" равны. Первый кубик обычный. Число исходов при одном броске равно 6, при двух бросках $6^2 = 36$. При бросании второго кубика число исходов при одном броске равно 2, при двух бросках $2^2 = 4$.



Пусть B - событие, при котором выпадает нужная комбинация при бросании либо первого кубика, либо второго кубика. Вероятность этого события равна $P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{18} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{18}$.

Определим вероятность того, что бросали именно второй кубик. Это условная вероятность, т.е. определим долю, которую вероятность события "нужная комбинация выпала на втором кубике" $\bar{A} \cap B$ занимает в

$$\text{вероятности события } B: P(\bar{A}|B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{5}{18}} = \frac{9}{10} = 0,9.$$

Ответ: 0,9.

2. О пересечении независимых событий

■ Примеры

- №1. В магазине три продавца. Каждый из них занят с клиентом с вероятностью 0,7. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени все три продавца заняты одновременно (считайте, что клиенты заходят независимо друг от друга).
- №2. Если шахматист А. играет белыми фигурами, то он выигрывает у шахматиста Б. с вероятностью 0,5. Если А. играет черными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,34. Шахматисты А. и Б. играют две партии, причём во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выигрывает оба раза.
- №3. Биатлонист 4 раза стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,6. Найдите вероятность того, что биатлонист первые 3 раза попал в мишени, а последний раз промахнулся. Результат округлите до сотых.
- №4. По отзывам покупателей Пётр Петрович оценил надёжность двух интернет-магазинов. Вероятность того, что нужный товар доставят из магазина А, равна 0,87. Вероятность того, что этот товар доставят из магазина Б, равна 0,92. Пётр Петрович заказал товар сразу в обоих магазинах. Считая, что интернет-магазины работают независимо друг от друга, найдите вероятность того, что ни один магазин не доставит товар.
- №5. Вероятность того, что батарейка бракованная, равна 0,02. Покупатель в магазине выбирает случайную упаковку, в которой две таких батарейки. Найдите вероятность того, что обе батарейки окажутся исправными.
- №6. В магазине стоят два платёжных автомата. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,12 независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что хотя бы один автомат исправен.
- №7. Помещение освещается фонарём с двумя лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течение года равна 0,3. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.
- №8. Помещение освещается фонарём с тремя лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течение года равна 0,19. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.
- №9. В одном ресторане в г. Тамбове администратор предлагает гостям сыграть в "Шеш-беш": гость бросает одновременно две игральные кости. Если он выбросит комбинацию 5 и 6 очков хотя бы один раз из двух попыток, то получит комплимент от ресторана: чашку кофе или десерт бесплатно. Какова вероятность получить комплимент? Результат округлите до сотых.
- №10. При артиллерийской стрельбе автоматическая система делает выстрел по цели. Если цель не уничтожена, то система делает повторный выстрел. Выстрелы повторяются до тех пор, пока цель не будет уничтожена. Вероятность уничтожения некоторой цели при первом выстреле равна 0,4, а при каждом последующем - 0,6. Сколько выстрелов потребуется для того, чтобы вероятность уничтожения цели была не менее 0,98?
- №11. Стрелок в тире стреляет по мишени до тех пор, пока не поразит ее. Известно, что он попадает в цель с вероятностью 0,2 при каждом отдельном выстреле. Сколько патронов нужно дать стрелку, чтобы он поразил цель с вероятностью не менее 0,6?
- №12. Чтобы поступить в институт на специальность "Лингвистика", абитуриент должен набрать на ЕГЭ не менее 70 баллов по каждому из трех предметов - математика, русский язык и иностранный язык. Чтобы поступить на специальность "Коммерция", нужно набрать не менее 70 баллов по каждому из трех предметов - математика, русский язык и обществознание. Вероятность того, что абитуриент З. получит не менее 70 баллов по математике, равна 0,6, по русскому языку - 0,8, по иностранному языку - 0,7 и по обществознанию - 0,5. Найдите вероятность того, что З. сможет поступить хотя бы на одну из двух упомянутых специальностей.
- №13. В ящике два красных и три синих фломастера. Фломастеры вытаскивают по очереди в случайном порядке. Какова вероятность того, что первый раз синий фломастер появится третьим по счету?

Решение (примеры) 2. О пересечении независимых событий

№1. В магазине три продавца. Каждый из них занят с клиентом с вероятностью 0,7. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени все три продавца заняты одновременно (считайте, что клиенты заходят независимо друг от друга).

Пусть событие A_1, A_2, A_3 означают - «в данный момент соответствующий продавец занят», а вероятность этого события, по условию $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 0,7$. Искомая вероятность:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0,7^3 = 0,343.$$

Ответ: 0,343.

№2. Если шахматист А. играет белыми фигурами, то он выигрывает у шахматиста Б. с вероятностью 0,5. Если А. играет черными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,34. Шахматисты А. и Б. играют две партии, причём во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.

События «шахматист А. выигрывает у шахматиста Б. белыми или черными фигурами» независимы (результат одной партии не зависит от результата другой), поэтому надо найти пересечение независимых событий, их вероятности умножаются: $0,5 \cdot 0,34 = 0,17$.

Ответ: 0,17.

№3. Биатлонист 4 раза стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,6. Найдите вероятность того, что биатлонист первые 3 раза попал в мишени, а последний раз промахнулся. Результат округлите до сотых.

Есть только два исхода события «биатлонист стреляет в мишень: A – попал, $P(A) = 0,6$ и $\bar{A}$ – промахнулся, $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,6 = 0,4$. События независимые, поэтому их вероятности умножаем:

$$\underbrace{0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,6}_{\text{3 раза попал по мишени}} \cdot 0,4 = 0,0864 \approx 0,09.$$

Ответ: 0,09.

№4. По отзывам покупателей Пётр Петрович оценил надёжность двух интернет-магазинов. Вероятность того, что нужный товар доставят из магазина А, равна 0,87. Вероятность того, что этот товар доставят из магазина Б, равна 0,92. Пётр Петрович заказал товар сразу в обоих магазинах. Считая, что интернет-магазины работают независимо друг от друга, найдите вероятность того, что ни один магазин не доставит товар.

A \ B	B	
	Доставит товар	Не доставит товар
A	Доставит товар	$0,92$ $0,87$
	Не доставит товар	$0,08$ $0,13$

Вероятность того, что нужный товар доставят из магазина А: $P(A) = 0,87$, из магазина Б: $P(B) = 0,92$. Тогда вероятности того, что нужный товар не доставят из магазинов, соответственно будут равны: $P(\bar{A}) = 1 - 0,87 = 0,13$ и $P(\bar{B}) = 1 - 0,92 = 0,08$.

События независимые, поэтому их вероятности умножаем: $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = 0,13 \cdot 0,08 = 0,0104$.

Ответ: 0,0104.

- №5. Вероятность того, что батарейка бракованная, равна 0,02. Покупатель в магазине выбирает случайную упаковку, в которой две таких батарейки. Найдите вероятность того, что обе батарейки окажутся исправными.

I \ II	Исправна	Бракована
	Исправна	Бракована
Исправна	0,98	0,02
Бракована	0,02	0,02

Вероятность того, что батарейка бракованная: $P(A) = 0,02$.

Тогда вероятность противоположного события - «батарейка исправна»: $P(\bar{A}) = 1 - 0,02 = 0,98$.

Вероятность того, что две батарейки в упаковке окажутся исправными (события независимые) равна:

$$P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) = P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) = 0,98^2 = 0,9604.$$

Ответ: 0,9604.

- №6. В магазине стоят два платёжных автомата. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,12 независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что хотя бы один автомат исправен.

I \ II	Исправен	Неисправен
	Исправен	Неисправен
Исправен	0,88	0,12
Неисправен	0,12	0,12

Вероятность того, что платёжный автомат неисправен:

$P(A) = 0,12$. Тогда вероятность противоположного события -

«автомат исправен»: $P(\bar{A}) = 1 - 0,12 = 0,88$.

Найдём вероятность события «оба автомата неисправны»:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = 0,12^2 = 0,0144.$$

Событие «хотя бы один автомат исправен» противоположно событию «оба автомата неисправны» и его вероятность равна:

$$P(\overline{A_1 \cap A_2}) = 1 - P(A_1 \cap A_2) = 1 - 0,0144 = 0,9856.$$

Искомую вероятность можно найти другим способом:

$$\underbrace{0,88 \cdot 0,88}_{\text{оба исправны}} + \underbrace{0,88 \cdot 0,12}_{\text{исправен/неисправен}} + \underbrace{0,12 \cdot 0,88}_{\text{неисправен/исправен}} = 0,9856.$$

Ответ: 0,9856.

- №7. Помещение освещается фонарём с двумя лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течение года равна 0,3. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

I \ II	Не перегорела	Перегорела
	Не перегорела	Перегорела
Не перегорела	0,7	0,3
Перегорела	0,3	0,3

Вероятность того, что лампа в фонаре перегорит: $P(A) = 0,3$.

Тогда вероятность противоположного события - «лампа не перегорит»: $P(\bar{A}) = 1 - 0,3 = 0,7$.

Найдём вероятность события «обе лампы перегорят в течении года»: $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = 0,3^2 = 0,09$.

Событие «хотя бы одна лампа не перегорит» противоположно событию «обе лампы перегорят» и его вероятность равна:

$$P(\overline{A_1 \cap A_2}) = 1 - P(A_1 \cap A_2) = 1 - 0,09 = 0,91.$$

Искомую вероятность можно найти другим способом:

$$\underbrace{0,7 \cdot 0,7}_{\text{обе не перегорели}} + \underbrace{0,3 \cdot 0,7}_{\text{перегорела/не перегорела}} + \underbrace{0,7 \cdot 0,3}_{\text{не перегорела/перегорела}} = 0,91.$$

Ответ: 0,91.

- №8. Помещение освещается фонарём с тремя лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течение года равна 0,19. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

Перегорание ламп - события независимые. Найдем вероятность события «все три лампы перегорят в течение одного года»: $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0,19^3 = 0,006859$.

Событие «хотя бы одна лампа не перегорит в течение года» противоположно событию «все три лампы перегорят» и его вероятность равна: $P(\overline{A_1 \cap A_2 \cap A_3}) = 1 - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 1 - 0,006859 = 0,993141$.

Ответ: 0,993141.

- №9. В одном ресторане в г. Тамбове администратор предлагает гостям сыграть в "Шеш-беш": гость бросает одновременно две игральные кости. Если он выбросит комбинацию 5 и 6 очков хотя бы один раз из двух попыток, то получит комплимент от ресторана: чашку кофе или десерт бесплатно. Какова вероятность получить комплимент? Результат округлите до сотых.

II попытка	Выиграл	Проиграл
I попытка		
Выиграл	1/18	17/18
Проиграл	17/18	1/18

Всего возможных исходов $6^2 = 36$. Благоприятных исходов (5;6) или (6;5) - два. Вероятность того, что клиент выиграет в одной попытке $P(A) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$, тогда вероятности проигрыша равна: $P(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{18} = \frac{17}{18}$. Выиграть или проиграть в двух попытках события независимые, поэтому их вероятности умножаем. Ни разу не выиграл в двух попытках: $\frac{17}{18} \cdot \frac{17}{18}$. Хотя бы один раз выиграл: $1 - \left(\frac{17}{18}\right)^2 = \frac{35}{324} \approx 0,108... \approx 0,11$

Ответ: 0,11.

- №10. При артиллерийской стрельбе автоматическая система делает выстрел по цели. Если цель не уничтожена, то система делает повторный выстрел. Выстрелы повторяются до тех пор, пока цель не будет уничтожена. Вероятность уничтожения некоторой цели при первом выстреле равна 0,4, а при каждом последующем - 0,6. Сколько выстрелов потребуется для того, чтобы вероятность уничтожения цели была не менее 0,98?

Вероятность промаха при первом выстреле равна $1 - 0,4 = 0,6$. Вероятность промаха при каждом последующем выстреле равна $1 - 0,6 = 0,4$. Подсчитаем число выстрелов, при котором цель остается непораженной с вероятностью менее $1 - 0,98 = 0,02$.

Вероятность непоражения после второго выстрела равна $0,6 \cdot 0,4 = 0,24$;

После третьего выстрела: $0,6 \cdot 0,4^2 = 0,096$;

После четвертого выстрела: $0,6 \cdot 0,4^3 = 0,0384$;

После пятого выстрела: $0,6 \cdot 0,4^4 = 0,01536 < 0,02$. Значит, всего необходимо пять выстрелов.

Ответ: 5.

- №11. Стрелок в тире стреляет по мишени до тех пор, пока не поразит ее. Известно, что он попадает

в цель с вероятностью 0,2 при каждом отдельном выстреле. Сколько патронов нужно дать стрелку, чтобы он поразил цель с вероятностью не менее 0,6?

Вероятность события A "стрелок промахнулся n раз" равна $0,8^n$. Значит, вероятность противоположного события $\bar{A}$ "имея n патронов, стрелок попал в мишень", равна $1 - 0,8^n$. По условию, вероятность поражения мишени должна быть не менее 0,6, тогда составим неравенство: $1 - 0,8^n \geq 0,6$. Учитывая, что $n \in \mathbb{N}$, будем подбирать значения n .

$$n = 1 \quad 1 - 0,8 = 0,2 < 0,6$$

$$n = 2 \quad 1 - 0,8^2 = 0,36 < 0,6$$

$$n = 3 \quad 1 - 0,8^3 = 0,488 < 0,6$$

$$n = 4 \quad 1 - 0,8^4 = 0,5904 < 0,6$$

$$n = 5 \quad 1 - 0,8^5 = 0,67232 > 0,6$$

или можно решить показательное неравенство

$$1 - 0,8^n \geq 0,6$$

$$0,8^n \leq 0,4$$

$$\log_{0,8} 0,8^n \geq \log_{0,8} 0,4$$

$$n \geq \log_{0,8} 0,4 \in (4; 5) \Rightarrow n = 5$$

Ответ: 5.

№12. Чтобы поступить в институт на специальность "Лингвистика", абитуриент должен набрать на ЕГЭ не менее 70 баллов по каждому из трех предметов - математика, русский язык и иностранный язык. Чтобы поступить на специальность "Коммерция", нужно набрать не менее 70 баллов по каждому из трех предметов - математика, русский язык и обществознание. Вероятность того, что абитуриент З. получит не менее 70 баллов по математике, равна 0,6, по русскому языку - 0,8, по иностранному языку - 0,7 и по обществознанию - 0,5. Найдите вероятность того, что З. сможет поступить хотя бы на одну из двух упомянутых специальностей.

Вероятность того, что абитуриент получит не менее 70 баллов по математике равна 0,6.

Вероятность того, что абитуриент получит не менее 70 баллов по русскому языку равна 0,8.

Вероятность того, что абитуриент не сможет набрать 70 баллов ни по иностранному языку, ни по обществознанию равна $(1 - 0,7) \cdot (1 - 0,5) = 0,3 \cdot 0,5 = 0,15$. Значит, хотя бы по одному из этих двух предметов он получит более 70 баллов с вероятностью $1 - 0,15 = 0,85$.

Для поступления в институт нужно набрать требуемый балл по математике, по русскому языку и хотя бы по одному из предметов: иностранного языка или обществознания.

Тогда вероятность поступления равна $0,6 \cdot 0,8 \cdot 0,85 = 0,408$.

Ответ: 0,408.

№13. В ящике два красных и три синих фломастера. Фломастеры вытаскивают по очереди в случайном порядке. Какова вероятность того, что первый раз синий фломастер появится третьим по счету?

Всего фломастеров 5. Вероятность достать первым красный фломастер равна $\frac{2}{5}$. Поскольку красных фломастеров осталось 1, а всего осталось 4 фломастера, то вероятность достать вторым красный фломастер равна $\frac{1}{4}$. Всего осталось 3 фломастера, синих тоже три. Значит, третий фломастер окажется синий с

вероятностью $\frac{3}{3} = 1$. События "достать первым красный фломастер", "достать вторым красный фломастер" и "достать третьим синий фломастер" - независимые, поэтому вероятность события "первый раз синий

фломастер появится третьим по счету" равна $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 = 0,1$.

Ответ: 0,1.

■ Тест 2. О пересечении независимых событий

МатематикаОнлайн

ВАШ ОНЛАЙН УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ

www.mathcourse.ru

- №1. В магазине три продавца. Каждый из них занят с клиентом с вероятностью 0,5. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени все три продавца заняты одновременно (считайте, что клиенты заходят независимо друг от друга).
-
- №2. Если шахматист А. играет белыми фигурами, то он выигрывает у шахматиста Б. с вероятностью 0,56. Если А. играет черными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,3. Шахматисты А. и Б. играют две партии, причём во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.
-
- №3. Биатлонист 5 раз стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,5. Найдите вероятность того, что биатлонист первые 3 раза попал в мишени, а последние два промахнулся. Результат округлите до сотых.
-
- №4. По отзывам покупателей Василий Васильевич оценил надёжность двух интернет-магазинов. Вероятность того, что нужный товар доставят из магазина А, равна 0,8. Вероятность того, что этот товар доставят из магазина Б, равна 0,88. Василий Васильевич заказал товар сразу в обоих магазинах. Считая, что интернет-магазины работают независимо друг от друга, найдите вероятность того, что ни один магазин не доставит товар.
-
- №5. Вероятность того, что батарейка бракованная, равна 0,04. Покупатель в магазине выбирает случайную упаковку, в которой две таких батарейки. Найдите вероятность того, что обе батарейки окажутся исправными.
-
- №6. В магазине стоят два платёжных автомата. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,02 независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что хотя бы один автомат исправен.
-
- №7. Помещение освещается фонарём с тремя лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течение года равна 0,21. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.
-
- №8. При артиллерийской стрельбе автоматическая система делает выстрел по цели. Если цель не уничтожена, то система делает повторный выстрел. Выстрелы повторяются до тех пор, пока цель не будет уничтожена. Вероятность уничтожения некоторой цели при первом выстреле равна 0,2, а при каждом последующем - 0,8. Сколько выстрелов потребуется для того, чтобы вероятность уничтожения цели была не менее 0,95?
-
- №9. Стрелок в тире стреляет по мишени до тех пор, пока не поразит ее. Известно, что он попадает в цель с вероятностью 0,3 при каждом отдельном выстреле. Сколько патронов нужно дать стрелку, чтобы он поразил цель с вероятностью не менее 0,7?
-
- №10. Чтобы поступить в институт на специальность "Автоматизация", абитуриент должен набрать на ЕГЭ не менее 60 баллов по каждому из трех предметов - математике, русскому языку и физике. Чтобы поступить на специальность "Механика", нужно набрать не менее 60 баллов по каждому из трех предметов - математике, русскому языку и информатике. Вероятность того, что абитуриент У. получит не менее 60 баллов по математике, равна 0,4, по русскому языку - 0,5, по физике - 0,3 и по информатике - 0,2. Найдите вероятность того, что У. сможет поступить хотя бы на одну из двух упомянутых специальностей.
-
- №11. В ящике четыре красных и два синих фломастера. Фломастеры вытаскивают по очереди в случайном порядке. Какова вероятность того, что первый раз синий фломастер появится третьим по счету?

№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11
0,125	0,168	0,03	0,024	0,9216	0,9996	0,990739	3	4	0,088	0,2

Решение (тест) 2. О пересечении независимых событий

№1. В магазине три продавца. Каждый из них занят с клиентом с вероятностью 0,5. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени все три продавца заняты одновременно (считайте, что клиенты заходят независимо друг от друга).

Пусть событие A_1, A_2, A_3 означают - «в данный момент соответствующий продавец занят», а вероятность этого события, по условию $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 0,5$. Искомая вероятность:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0,5^3 = 0,125.$$

Ответ: 0,125.

№2. Если шахматист А. играет белыми фигурами, то он выигрывает у шахматиста Б. с вероятностью 0,56. Если А. играет черными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,3. Шахматисты А. и Б. играют две партии, причём во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.

События «шахматист А. выигрывает у шахматиста Б. белыми или черными фигурами» независимы (результат одной партии не зависит от результата другой), поэтому надо найти пересечение независимых событий, их вероятности умножаются: $0,56 \cdot 0,3 = 0,168$.

Ответ: 0,168.

№3. Биатлонист 5 раз стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,5. Найдите вероятность того, что биатлонист первые 3 раза попал в мишени, а последние два промахнулся. Результат округлите до сотых.

Есть только два исхода события «биатлонист стреляет в мишень: A – попал, $P(A) = 0,5$ и $\bar{A}$ – промахнулся, $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,5 = 0,5$. События независимые, поэтому их вероятности умножаем:

$$\underbrace{0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5}_{3 \text{ раза попал по мишени}} \cdot \underbrace{0,5 \cdot 0,5}_{2 \text{ раза промахнулся}} = 0,03125 \approx 0,03.$$

Ответ: 0,03.

№4. По отзывам покупателей Василий Васильевич оценил надёжность двух интернет-магазинов. Вероятность того, что нужный товар доставят из магазина А, равна 0,8. Вероятность того, что этот товар доставят из магазина Б, равна 0,88. Василий Васильевич заказал товар сразу в обоих магазинах. Считая, что интернет-магазины работают независимо друг от друга, найдите вероятность того, что ни один магазин не доставит товар.

A \ B	B	
	Доставит товар	Не доставит товар
Доставит товар	0,88 0,8	0,12 0,8
	0,88 0,2	0,12 0,2

Вероятность того, что нужный товар доставят из магазина А: $P(A) = 0,8$, из магазина Б: $P(B) = 0,88$. Тогда вероятности того, что нужный товар не доставят из магазинов, соответственно будут равны: $P(\bar{A}) = 1 - 0,8 = 0,2$ и

$$P(\bar{B}) = 1 - 0,88 = 0,12.$$

События независимые, поэтому их вероятности умножаем:

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = 0,2 \cdot 0,12 = 0,024.$$

Ответ: 0,024.

№5. Вероятность того, что батарейка бракованная, равна 0,04. Покупатель в магазине выбирает случайную упаковку, в которой две таких батарейки. Найдите вероятность того, что обе

батарейки окажутся исправными.

I \ II	Исправна	Бракована
	Исправна	Бракована
Исправна	0,96	0,04
Бракована	0,04	0,04

Вероятность того, что батарейка бракованная: $P(A) = 0,04$.
Тогда вероятность противоположного события - «батарейка исправна»: $P(\bar{A}) = 1 - 0,04 = 0,96$.

Вероятность того, что две батарейки в упаковке окажутся исправными (события независимые) равна:

$$P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) = P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) = 0,96^2 = 0,9216.$$

Ответ: 0,9216.

№6. В магазине стоят два платёжных автомата. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,02 независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что хотя бы один автомат исправен.

I \ II	Исправен	Неисправен
	Исправен	Неисправен
Исправен	0,98	0,02
Неисправен	0,02	0,02

Вероятность того, что платёжный автомат неисправен: $P(A) = 0,02$. Тогда вероятность противоположного события - «автомат исправен»: $P(\bar{A}) = 1 - 0,02 = 0,98$.

Найдем вероятность события «оба автомата неисправны»:
 $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = 0,02^2 = 0,0004$.

Событие «хотя бы один автомат исправен» противоположно событию «оба автомата неисправны» и его вероятность равна:

$$P(\overline{A_1 \cap A_2}) = 1 - P(A_1 \cap A_2) = 1 - 0,0004 = 0,9996.$$

Ответ: 0,9996.

№7. Помещение освещается фонарём с тремя лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течение года равна 0,21. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

Перегорание ламп - события независимые. Найдем вероятность события «все три лампы перегорят в течение одного года»: $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0,21^3 = 0,009261$.

Событие «хотя бы одна лампа не перегорит в течение года» противоположно событию «все три лампы перегорят» и его вероятность равна: $P(\overline{A_1 \cap A_2 \cap A_3}) = 1 - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 1 - 0,009261 = 0,990739$.

Ответ: 0,990739.

№8. При артиллерийской стрельбе автоматическая система делает выстрел по цели. Если цель не уничтожена, то система делает повторный выстрел. Выстрелы повторяются до тех пор, пока цель не будет уничтожена. Вероятность уничтожения некоторой цели при первом выстреле равна 0,2, а при каждом последующем - 0,8. Сколько выстрелов потребуется для того, чтобы вероятность уничтожения цели была не менее 0,95?

Вероятность промаха при первом выстреле равна $1 - 0,2 = 0,8$. Вероятность промаха при каждом последующем выстреле равна $1 - 0,8 = 0,2$. Подсчитаем число выстрелов, при котором цель остается непопавшей с вероятностью менее $1 - 0,95 = 0,05$.

Вероятность непопадания после второго выстрела равна $0,8 \cdot 0,2 = 0,16$;

После третьего выстрела: $0,8 \cdot 0,2^2 = 0,032 < 0,05$. Значит, всего необходимо сделать три выстрела.

Ответ: 3.

№9. Стрелок в тире стреляет по мишени до тех пор, пока не поразит ее. Известно, что он попадает в

цель с вероятностью 0,3 при каждом отдельном выстреле. Сколько патронов нужно дать стрелку, чтобы он поразил цель с вероятностью не менее 0,7?

Вероятность события A "стрелок промахнулся n раз" равна $0,7^n$. Значит, вероятность противоположного события $\bar{A}$ "имея n патронов, стрелок попал в мишень", равна $1 - 0,7^n$. По условию, вероятность поражения мишени должна быть не менее 0,7, тогда составим неравенство: $1 - 0,7^n \geq 0,7$. Учитывая, что $n \in \mathbb{N}$, будем подбирать значения n .

$$n = 1 \quad 1 - 0,7 = 0,3 < 0,7$$

$$n = 2 \quad 1 - 0,7^2 = 0,51 < 0,7$$

$$n = 3 \quad 1 - 0,7^3 = 0,657 < 0,7$$

$$n = 4 \quad 1 - 0,7^4 = 0,7599 > 0,7$$

Ответ: 4.

№10. Чтобы поступить в институт на специальность "Автоматизация", абитуриент должен набрать на ЕГЭ не менее 60 баллов по каждому из трех предметов - математике, русскому языку и физике. Чтобы поступить на специальность "Механика", нужно набрать не менее 60 баллов по каждому из трех предметов - математике, русскому языку и информатике. Вероятность того, что абитуриент $У$. получит не менее 60 баллов по математике, равна 0,4, по русскому языку - 0,5, по физике - 0,3 и по информатике - 0,2. Найдите вероятность того, что $У$. сможет поступить хотя бы на одну из двух упомянутых специальностей.

Вероятность того, что абитуриент получит не менее 60 баллов по математике равна 0,4.

Вероятность того, что абитуриент получит не менее 60 баллов по русскому языку равна 0,5.

Вероятность того, что абитуриент получит менее 60 баллов по физике или по информатике равна

$(1 - 0,3) \cdot (1 - 0,2) = 0,7 \cdot 0,8 = 0,56$. Значит, хотя бы по одному из этих двух предметов он получит более 60 баллов с вероятностью $1 - 0,56 = 0,44$.

Для поступления в институт нужно набрать требуемый балл по математике, по русскому языку и хотя бы по одному из предметов: физике или информатике.

Тогда вероятность поступления равна $0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,44 = 0,088$.

Ответ: 0,088.

№11. В ящике четыре красных и два синих фломастера. Фломастеры вытаскивают по очереди в случайном порядке. Какова вероятность того, что первый раз синий фломастер появится третьим по счету?

Всего фломастеров 6. Вероятность достать первым красный фломастер равна $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Поскольку красных фломастеров осталось 3, а всего осталось 5 фломастеров, то вероятность достать вторым красный фломастер равна $\frac{3}{5}$. Всего осталось 4 фломастера, синих два. Значит, третий фломастер окажется синий с вероятностью

$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. События "достать первым красный фломастер", "достать вторым красный фломастер" и "достать третьим синий фломастер" - независимые, поэтому вероятность события "первый раз синий фломастер

появится третьим по счету" равна $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = 0,2$.

Ответ: 0,2.

3. Об объединении несовместных событий и объединении пересечений событий

■ Примеры

- №1. На экзамене по геометрии школьник отвечает на один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос по теме «Тригонометрия», равна 0,25. Вероятность того, что это вопрос по теме «Внешние углы», равна 0,1. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.
-
- №2. Вероятность того, что новый принтер прослужит больше года, равна 0,98. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,83. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.
-
- №3. При выпечке хлеба производится контрольное взвешивание свежей буханки. Известно, что вероятность того, что масса окажется меньше, чем 810 г, равна 0,97. Вероятность того, что масса окажется больше, чем 790 г, равна 0,91. Найдите вероятность того, что масса буханки больше, чем 790 г, но меньше, чем 810 г.
-
- №4. Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна равна 0,04. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что неисправная батарейка будет забракована, равна 0,95. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,01. Найдите вероятность того, что случайно выбранная батарейка будет забракована системой контроля.
-
- №5. Телефон передает SMS-сообщение. В случае неудачи телефон делает следующую попытку. Вероятность того, что сообщение удастся передать без ошибок в каждой отдельной попытке, равна 0,2. Найдите вероятность того, что для передачи сообщения потребуется не больше трех попыток.
-
- №6. Чтобы пройти в следующий круг соревнований, футбольной команде нужно набрать хотя бы 4 очка в двух играх. Если команда выигрывает, она получает 3 очка, в случае ничьей - 1 очко, если проигрывает - 0 очков. Найдите вероятность того, что команде удастся выйти в следующий круг соревнований. Считайте, что в каждой игре вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,4.
-
- №7. В коробке 10 синих, 9 красных и 6 зеленых фломастеров. Случайным образом выбирают два фломастера. Какова вероятность того, что окажутся выбраны один синий и один красный фломастер?
-
- №8. Всем пациентам с подозрением на гепатит делают анализ крови. Если анализ выявляет гепатит, то результат анализа называется положительным. У больных гепатитом пациентов анализ дает положительный результат с вероятностью 0,9. Если пациент не болен гепатитом, то анализ может дать ложный положительный результат с вероятностью 0,01. Известно, что 5% пациентов, поступающих с подозрением на гепатит, действительно больны гепатитом. Найдите вероятность того, что результат анализа у пациента, поступившего в клинику с подозрением на гепатит, будет положительным.
-
- №9. При подозрении на наличие некоторого заболевания пациента отправляют на ПЦР-тест. Если заболевание действительно есть, то тест подтверждает его в 86% случаев. Если заболевания нет, то тест выявляет отсутствие заболевания в среднем в 94% случаев. Известно, что в среднем тест оказывается положительным у 10% пациентов, направленных на тестирование. При обследовании некоторого пациента врач направил его на ПЦР-тест, который оказался положительным. Какова вероятность того, что пациент действительно имеет это заболевание?

Решение (примеры) 3. Об объединении несовместных событий и объединении пересечений событий

№1. На экзамене по геометрии школьник отвечает на один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос по теме «Тригонометрия», равна 0,25. Вероятность того, что это вопрос по теме «Внешние углы», равна 0,1. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.

Событие A — достанется вопрос по теме «Тригонометрия», $P(A) = 0,25$.

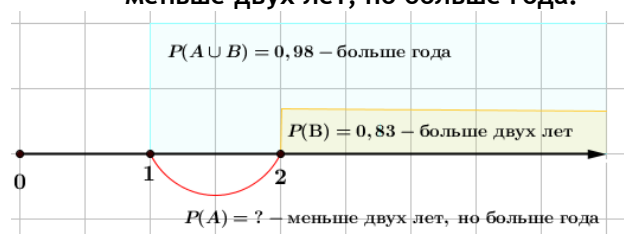
Событие B — достанется вопрос по теме «Внешние углы», $P(B) = 0,1$.

Т.к. нет вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, то события A и B несовместны.

Искомая вероятность $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0,25 + 0,1 = 0,35$.

Ответ: 0,35.

№2. Вероятность того, что новый принтер прослужит больше года, равна 0,98. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,83. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.



Событие A — новый принтер прослужит меньше двух лет, но больше года, $P(A) = ?$ — искомая вероятность.

Событие B — принтер прослужит больше двух лет, $P(B) = 0,83$. События A и B несовместны.

Событие $A \cup B$ — принтер прослужит больше года, $P(A \cup B) = 0,98$.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, $0,98 = P(A) + 0,83$,

$P(A) = 0,15$.

Ответ: 0,15.

№3. При выпечке хлеба производится контрольное взвешивание свежей буханки. Известно, что вероятность того, что масса окажется меньше, чем 810 г, равна 0,97. Вероятность того, что масса окажется больше, чем 790 г, равна 0,91. Найдите вероятность того, что масса буханки больше, чем 790 г, но меньше, чем 810 г.

Вероятность того, что масса буханки окажется меньше, чем 810 г равна 0,97, тогда вероятность противоположного события «масса буханки больше, чем 810 г» равна $1 - 0,97 = 0,03$.

Событие A «масса буханки больше, чем 790 г, но меньше, чем 810 г» несовместно с событием B «масса буханки больше, чем 810 г» и в объединении они дают событие C «масса буханки больше, чем 790 г». Тогда вероятности несовместных событий складываем и получаем вероятность события C .

$$P(A) + P(B) = P(C)$$

$$P(A) + 0,03 = 0,91$$

$$P(A) = 0,91 - 0,03$$

$$P(A) = 0,88$$

Ответ: 0,88.

- №4. Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна равна 0,04. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что неисправная батарейка будет забракована, равна 0,95. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,01. Найдите вероятность того, что случайно выбранная батарейка будет забракована системой контроля.

Вероятность события "произведена неисправная батарейка" равна 0,04, тогда вероятность противоположного события "произведена исправная батарейка" равна $1 - 0,04 = 0,96$. Вероятность события "система забракует исправную батарейку" равна 0,01.

События "произведена исправная батарейка" и "исправная батарейка забракована" независимы, поэтому вероятность события А - "произведена и забракована исправная батарейка" равна

$$P(A) = 0,01 \cdot 0,96 = 0,0096.$$

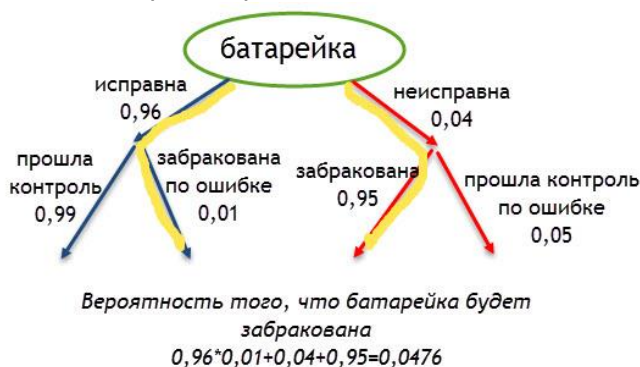
Аналогично находим вероятность события В - "произведена и забракована неисправная батарейка":

$$P(B) = 0,04 \cdot 0,95 = 0,038.$$

События А и В несовместны. Искомая вероятность равна

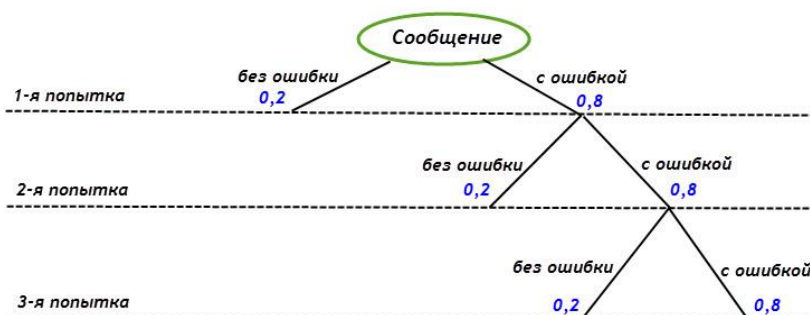
$$P(A) + P(B) = 0,0096 + 0,038 = 0,0476.$$

Или другая запись решения с помощью дерева вероятностей.



Ответ: 0,0476.

- №5. Телефон передает SMS-сообщение. В случае неудачи телефон делает следующую попытку. Вероятность того, что сообщение удастся передать без ошибок в каждой отдельной попытке, равна 0,2. Найдите вероятность того, что для передачи сообщения потребуется не больше трех попыток.



Вероятность передачи сообщения без ошибок при первой попытке: 0,2; при второй попытке $0,8 \cdot 0,2 = 0,16$; при третьей попытке $0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,2 = 0,128$. Тогда вероятность того, что для передачи сообщения потребуется не больше трех попыток $0,2 + 0,16 + 0,128 = 0,488$.

Ответ: 0,488.

- №6. Чтобы пройти в следующий круг соревнований, футбольной команде нужно набрать хотя бы 4 очка в двух играх. Если команда выигрывает, она получает 3 очка, в случае ничьей - 1 очко, если проигрывает - 0 очков. Найдите вероятность того, что команде удастся выйти в следующий круг соревнований. Считайте, что в каждой игре вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,4.

II матч \ I матч	Победа (3) $P = 0,4$	Ничья (1) $P = 0,2$	Проигрыш (0) $P = 0,4$
Победа (3) $P = 0,4$	(6) $0,4 \cdot 0,4 = 0,16$	(4) $0,4 \cdot 0,2 = 0,08$	(3) $0,4 \cdot 0,4 = 0,16$
Ничья (1) $P = 0,2$	(4) $0,2 \cdot 0,4 = 0,08$	(2) $0,2 \cdot 0,2 = 0,04$	(1) $0,2 \cdot 0,4 = 0,08$
Проигрыш (0) $P = 0,4$	(3) $0,4 \cdot 0,4 = 0,16$	(1) $0,4 \cdot 0,2 = 0,08$	(0) $0,4 \cdot 0,4 = 0,16$

Так как вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,4, то вероятность ничьей равна $1 - 0,4 - 0,4 = 0,2$.

События "команда выиграла оба матча" независимы, поэтому его вероятность равна $0,4 \cdot 0,4 = 0,16$. В этом случае команда набирает 6 очков.

Аналогично находим вероятность события "команда выиграла первый матч и закончила вничью второй матч": $0,4 \cdot 0,2 = 0,08$. И вероятность события "команда выиграла второй матч и закончила вничью первый матч": $0,2 \cdot 0,4 = 0,08$. В этих случаях команда набирает по 4 очка.

Все эти события попарно несовместны, их вероятность равна $0,16 + 0,08 + 0,08 = 0,32$.

Ответ: 0,32.

- №7. В коробке 10 синих, 9 красных и 6 зеленых фломастеров. Случайным образом выбирают два фломастера. Какова вероятность того, что окажутся выбраны один синий и один красный фломастер?

Всего фломастеров $10 \text{ синих} + 9 \text{ красных} + 6 \text{ зеленых} = 25$. Вероятность достать первым синий

фломастер: $\frac{10}{25}$. Тогда останется фломастеров 24, и вероятность достать вторым красный: $\frac{9}{24}$. Выбрать

фломастеры в таком порядке - события независимые, поэтому их вероятности перемножаем: $\frac{10}{25} \cdot \frac{9}{24}$.

Возможно, что первым достанем красный фломастер. Вероятность этого события равна $\frac{9}{25}$. Тогда

вероятность вторым достать синий фломастер равна $\frac{10}{24}$. Вероятность выбрать фломастеры в таком порядке

$\frac{9}{25} \cdot \frac{10}{24}$. События "выбрали сначала синий, а затем красный фломастеры" или "выбрали сначала красный, а

затем синий фломастеры" - несовместны, значит их вероятности складываем: $\frac{10}{25} \cdot \frac{9}{24} + \frac{9}{25} \cdot \frac{10}{24} = 0,3$.

Ответ: 0,3.

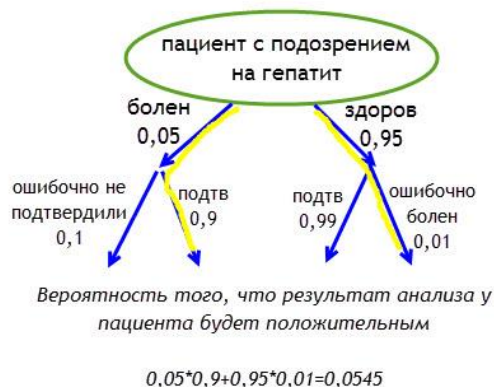
- №8. Всем пациентам с подозрением на гепатит делают анализ крови. Если анализ выявляет гепатит, то результат анализа называется положительным. У больных гепатитом пациентов анализ дает положительный результат с вероятностью 0,9. Если пациент не болен гепатитом, то анализ может дать ложный положительный результат с вероятностью 0,01. Известно, что 5% пациентов, поступающих с подозрением на гепатит, действительно больны гепатитом. Найдите вероятность того, что результат анализа у пациента, поступившего в клинику с подозрением на гепатит, будет положительным.

Пусть событие A - пациент действительно болен гепатитом ($5\%=0,05$) и анализ дает положительный результат с вероятностью 0,9. Тогда $P(A) = 0,05 \cdot 0,9 = 0,045$.

Событие B - пациент здоров ($95\%=0,95$) и анализ дает ложный положительный результат с вероятностью 0,01. Тогда $P(B) = 0,95 \cdot 0,01 = 0,0095$.

События A и B несовместны, значит, вероятность того, что результат анализа у пациента, поступившего в клинику с подозрением на гепатит, будет положительным, равна $P(A \cup B) = 0,045 + 0,0095 = 0,0545$.

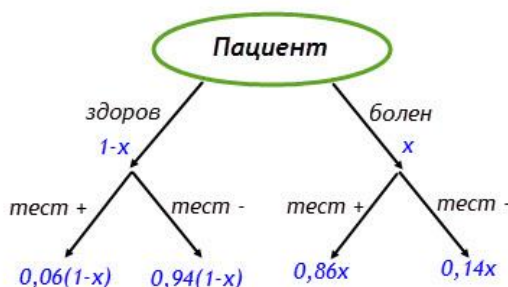
Или другая запись решения с помощью дерева вероятностей.



Ответ: 0,0545.

- №9. При подозрении на наличие некоторого заболевания пациента отправляют на ПЦР-тест. Если заболевание действительно есть, то тест подтверждает его в 86% случаев. Если заболевания нет, то тест выявляет отсутствие заболевания в среднем в 94% случаев. Известно, что в среднем тест оказывается положительным у 10% пациентов, направленных на тестирование. При обследовании некоторого пациента врач направил его на ПЦР-тест, который оказался положительным. Какова вероятность того, что пациент действительно имеет это заболевание?

Пациент приходит к врачу и делает ПЦР-тест. Он может быть болен этим заболеванием с вероятностью x .



ПЦР-тест может оказаться ошибочно положительным у здорового пациента или действительно больного пациента. Поскольку эти события несовместны, то их вероятности складываем $0,06(1-x) + 0,86x$. Известно, что тест оказывается положительным у 10% всех пациентов, направленных на тестирование, значит, получаем уравнение $0,06(1-x) + 0,86x = 0,1$ $x = 0,05$

Тогда действительно больной пациент получает положительный ПЦР-тест с вероятностью $0,86x = 0,86 \cdot 0,05 = 0,043$.

С другой стороны среди 10% пациентов есть здоровые, но получили ошибочно положительный ПЦР-тест. Пусть y — это вероятность того, что пациент, ПЦР-тест которого положителен, действительно имеет это заболевание: $0,1 \cdot y = 0,043$ $y = 0,43$

Ответ: 0,43.

Тест 3. Об объединении несовместных событий и объединении пересечений событий

- №1. На экзамене по геометрии школьник отвечает на один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос по теме «Тригонометрия», равна 0,3. Вероятность того, что это вопрос по теме «Внешние углы», равна 0,2. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.
-
- №2. Вероятность того, что новый сканер прослужит больше года, равна 0,9. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,88. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.
-
- №3. При выпечке хлеба производится контрольное взвешивание свежей буханки. Известно, что вероятность того, что масса окажется меньше, чем 810 г, равна 0,96. Вероятность того, что масса окажется больше, чем 790 г, равна 0,93. Найдите вероятность того, что масса буханки больше, чем 790 г, но меньше, чем 810 г.
-
- №4. Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна равна 0,05. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что неисправная батарейка будет забракована, равна 0,98. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,08. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная батарейка будет забракована системой контроля.
-
- №5. Телефон передает SMS-сообщение. В случае неудачи телефон делает следующую попытку. Вероятность того, что сообщение удастся передать без ошибок в каждой отдельной попытке, равна 0,4. Найдите вероятность того, что для передачи сообщения потребуется не больше двух попыток.
-
- №6. Чтобы пройти в следующий круг соревнований, футбольной команде нужно набрать хотя бы 4 очка в двух играх. Если команда выигрывает, она получает 3 очка, в случае ничьей - 1 очко, если проигрывает - 0 очков. Найдите вероятность того, что команде удастся выйти в следующий круг соревнований. Считайте, что в каждой игре вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,3.
-
- №7. В коробке 11 синих, 6 красных и 8 зеленых фломастеров. Случайным образом выбирают два фломастера. Какова вероятность того, что окажутся выбраны один синий и один красный фломастер?
-
- №8. Всем пациентам с подозрением на гепатит делают анализ крови. Если анализ выявляет гепатит, то результат анализа называется положительным. У больных гепатитом пациентов анализ дает положительный результат с вероятностью 0,8. Если пациент не болен гепатитом, то анализ может дать ложный положительный результат с вероятностью 0,03. Известно, что 22% пациентов, поступающих с подозрением на гепатит, действительно больны гепатитом. Найдите вероятность того, что результат анализа у пациента, поступившего в клинику с подозрением на гепатит, будет положительным.
-
- №9. При подозрении на наличие некоторого заболевания пациента отправляют на ПЦР-тест. Если заболевание действительно есть, то тест подтверждает его в 91% случаев. Если заболевания нет, то тест выявляет отсутствие заболевания в среднем в 93% случаев. Известно, что в среднем тест оказывается положительным у 10% пациентов, направленных на тестирование. При обследовании некоторого пациента врач направил его на ПЦР-тест, который оказался положительным. Какова вероятность того, что пациент действительно имеет это заболевание?

▪ **Ответы (тест) 3. Об объединении несовместных событий и объединении пересечений событий**

№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9
0,5	0,02	0,89	0,125	0,64	0,33	0,22	0,1994	0,325

▪ **Решение (тест) 3. Об объединении несовместных событий и объединении пересечений событий**

№1. На экзамене по геометрии школьник отвечает на один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос по теме «Тригонометрия», равна 0,3. Вероятность того, что это вопрос по теме «Внешние углы», равна 0,2. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.

Событие A — достанется вопрос по теме «Тригонометрия», $P(A) = 0,3$.

Событие B — достанется вопрос по теме «Внешние углы», $P(B) = 0,2$.

Т.к. нет вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, то события A и B несовместны.

Искомая вероятность $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0,3 + 0,2 = 0,5$. Ответ: 0,5.

№2. Вероятность того, что новый сканер прослужит больше года, равна 0,9. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,88. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

Событие A — новый сканер прослужит меньше двух лет, но больше года, $P(A) = ?$ — искомая вероятность.

Событие B — сканер прослужит больше двух лет, $P(B) = 0,88$. События A и B несовместны.

Событие $A \cup B$ — сканер прослужит больше года, $P(A \cup B) = 0,9$.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, $0,9 = P(A) + 0,88$, $P(A) = 0,02$. Ответ: 0,02.

№3. При выпечке хлеба производится контрольное взвешивание свежей буханки. Известно, что вероятность того, что масса окажется меньше, чем 810 г, равна 0,96. Вероятность того, что масса окажется больше, чем 790 г, равна 0,93. Найдите вероятность того, что масса буханки больше, чем 790 г, но меньше, чем 810 г.

Вероятность того, что масса буханки окажется меньше, чем 810 г равна 0,96, тогда вероятность противоположного события «масса буханки больше, чем 810 г» равна $1 - 0,96 = 0,04$.

Событие A «масса буханки больше, чем 790 г, но меньше, чем 810 г» несовместно с событием B «масса буханки больше, чем 810 г» и в объединении они дают событие C «масса буханки больше, чем 790 г». Тогда вероятности несовместных событий складываем и получаем вероятность события C .

$$P(A) + P(B) = P(C)$$

$$P(A) + 0,04 = 0,93$$

$$P(A) = 0,93 - 0,04 \quad P(A) = 0,89$$

Ответ: 0,89.

- №4. Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна равна 0,05. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что неисправная батарейка будет забракована, равна 0,98. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,08. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная батарейка будет забракована системой контроля.

Вероятность события "произведена неисправная батарейка" равна 0,05, тогда вероятность противоположного события "произведена исправная батарейка" равна $1 - 0,05 = 0,95$. Вероятность события "система забракует неисправную батарейку" равна 0,98.

События "произведена неисправная батарейка" и "неисправная батарейка забракована" независимы, поэтому вероятность события A - "произведена и забракована исправная батарейка" равна

$$P(A) = 0,05 \cdot 0,98 = 0,049.$$

Аналогично находим вероятность события B - "произведена и забракована исправная батарейка":

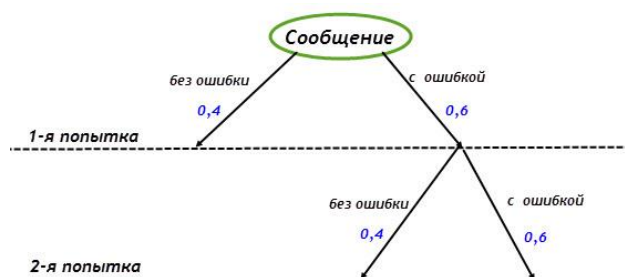
$$P(B) = 0,08 \cdot 0,95 = 0,076.$$

События A и B несовместны. Искомая вероятность равна

$$P(A) + P(B) = 0,049 + 0,076 = 0,125.$$

Ответ: 0,125.

- №5. Телефон передает SMS-сообщение. В случае неудачи телефон делает следующую попытку. Вероятность того, что сообщение удастся передать без ошибок в каждой отдельной попытке, равна 0,4. Найдите вероятность того, что для передачи сообщения потребуется не больше двух попыток.



Вероятность передачи сообщения без ошибок при первой попытке: 0,4; при второй попытке $0,6 \cdot 0,4 = 0,24$. Тогда вероятность того, что для передачи сообщения потребуется не больше двух попыток $0,4 + 0,24 = 0,64$

Ответ: 0,64.

- №6. Чтобы пройти в следующий круг соревнований, футбольной команде нужно набрать хотя бы 4 очка в двух играх. Если команда выигрывает, она получает 3 очка, в случае ничьей - 1 очко, если проигрывает - 0 очков. Найдите вероятность того, что команде удастся выйти в следующий круг соревнований. Считайте, что в каждой игре вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,3.

II матч \ I матч	Победа (3) $P = 0,3$	Ничья (1) $P = 0,4$	Проигрыш (0) $P = 0,3$
Победа (3) $P = 0,3$	(6) $0,3 \cdot 0,3 = 0,09$	(4) $0,3 \cdot 0,4 = 0,12$	(3) $0,3 \cdot 0,3 = 0,09$
Ничья (1) $P = 0,4$	(4) $0,4 \cdot 0,3 = 0,12$	(2) $0,4 \cdot 0,4 = 0,16$	(1) $0,4 \cdot 0,3 = 0,12$
Проигрыш (0) $P = 0,3$	(3) $0,3 \cdot 0,3 = 0,09$	(1) $0,3 \cdot 0,4 = 0,12$	(0) $0,3 \cdot 0,3 = 0,09$

Так как вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,4, то вероятность ничьей равна $1 - 0,3 - 0,3 = 0,4$.

События "команда выиграла оба матча" независимы, поэтому его вероятность равна $0,3 \cdot 0,3 = 0,09$. В этом случае команда набирает 6 очков.

Аналогично находим вероятность события "команда выиграла первый матч и закончила вничью второй матч": $0,3 \cdot 0,4 = 0,12$. И вероятность события "команда выиграла второй матч и закончила вничью первый матч": $0,4 \cdot 0,3 = 0,12$. В этих случаях команда набирает по 4 очка.

Все эти события попарно несовместны, их вероятность равна $0,09 + 0,12 + 0,12 = 0,33$.

Ответ: 0,33.

- №7. В коробке 11 синих, 6 красных и 8 зеленых фломастеров. Случайным образом выбирают два фломастера. Какова вероятность того, что окажутся выбраны один синий и один красный фломастер?

Всего фломастеров $11 \text{ синих} + 6 \text{ красных} + 8 \text{ зеленых} = 25$. Вероятность достать первым синий фломастер:

$\frac{11}{25}$. Тогда останется фломастеров 24, и вероятность достать вторым красный: $\frac{6}{24}$. Выбрать фломастеры в

таком порядке - события независимые, поэтому их вероятности перемножаем: $\frac{11}{25} \cdot \frac{6}{24}$. Возможно, что первым

достанем красный фломастер. Вероятность этого события равна $\frac{6}{25}$. Тогда вероятность вторым достать синий

фломастер равна $\frac{11}{24}$. Вероятность выбрать фломастеры в таком порядке $\frac{6}{25} \cdot \frac{11}{24}$. События "выбрали сначала

синий, а затем красный фломастеры" или "выбрали сначала красный, а затем синий фломастеры" -

несовместны, значит их вероятности складываем: $\frac{11}{25} \cdot \frac{6}{24} + \frac{6}{25} \cdot \frac{11}{24} = 0,22$.

Ответ: 0,22.

- №8. Всем пациентам с подозрением на гепатит делают анализ крови. Если анализ выявляет гепатит, то результат анализа называется положительным. У больных гепатитом пациентов анализ дает положительный результат с вероятностью 0,8. Если пациент не болен гепатитом, то анализ может дать ложный положительный результат с вероятностью 0,03. Известно, что 22% пациентов, поступающих с подозрением на гепатит, действительно больны гепатитом. Найдите вероятность того, что результат анализа у пациента, поступившего в клинику с подозрением на гепатит, будет положительным.

Пусть событие А - пациент действительно болен гепатитом ($22\% = 0,22$) и анализ дает положительный результат с вероятностью 0,8. Тогда $P(A) = 0,22 \cdot 0,8 = 0,176$.

Событие В - пациент здоров ($78\% = 0,78$) и анализ дает ложный положительный результат с вероятностью 0,03. Тогда $P(B) = 0,78 \cdot 0,03 = 0,0234$.

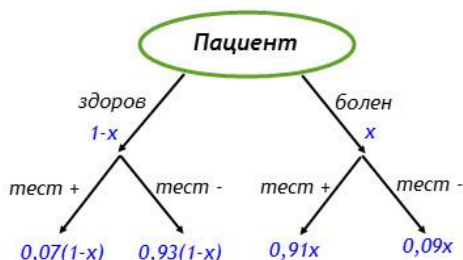
События А и В несовместны, значит, вероятность того, что результат анализа у пациента, поступившего в клинику с подозрением на гепатит, будет положительным, равна $P(A \cup B) = 0,176 + 0,0234 = 0,1994$.

Ответ: 0,1994.

- №9. При подозрении на наличие некоторого заболевания пациента отправляют на ПЦР-тест. Если заболевание действительно есть, то тест подтверждает его в 91% случаев. Если заболевания нет, то тест выявляет отсутствие заболевания в среднем в 93% случаев. Известно, что в среднем тест оказывается положительным у 10% пациентов, направленных на тестирование. При обследовании некоторого пациента врач направил его на ПЦР-тест, который оказался положительным. Какова вероятность того, что пациент действительно имеет это заболевание?

1-й способ.

Пациент приходит к врачу и делает ПЦР-тест. Он может быть болен этим заболеванием с вероятностью x .



ПЦР-тест может оказаться ошибочно положительным у здорового пациента или действительно больного пациента. Поскольку эти события несовместны, то их вероятности складываем $0,07(1-x) + 0,91x$.

Известно, что тест оказывается положительным у 10% всех пациентов, направленных на тестирование, значит, получаем уравнение $0,07(1-x) + 0,91x = 0,1$ $x = \frac{1}{28}$.

Тогда действительно больной пациент получает положительный ПЦР-тест с вероятностью $0,91x = 0,91 \cdot \frac{1}{28}$.

С другой стороны среди 10% пациентов есть здоровые, но получили ошибочно положительный ПЦР-тест. Пусть y – это вероятность того, что пациент, ПЦР-тест которого положителен, действительно имеет это заболевание:

$$0,1 \cdot y = \frac{0,91}{28} \quad y = 0,325$$

Ответ: 0,325.

2-й способ.

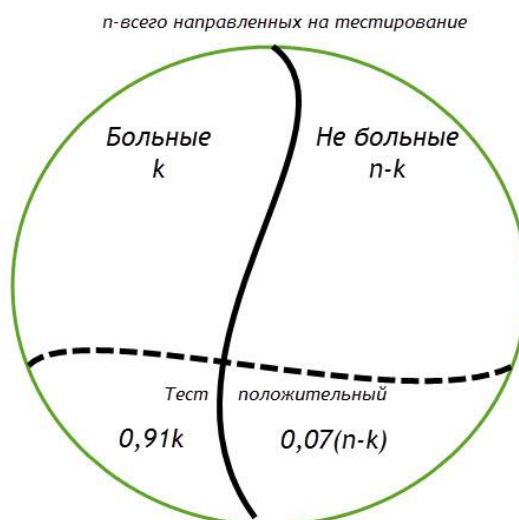
Пусть всего направлено на тестирование n пациентов, из которых k больных и $(n-k)$ не больных. Тогда

$0,1n$ – пациентов с положительным тестом;

$0,91k$ – больных с положительным тестом;

$0,93(n-k)$ – не больных с отрицательным тестом;

$0,07(n-k)$ – не больных с положительным тестом;



Получим уравнение

$$0,91k + 0,07(n-k) = 0,1n$$

$$0,91k + 0,07n - 0,07k = 0,1n$$

$$0,84k = 0,03n$$

$$k = \frac{3}{84}n; \quad k = \frac{n}{28}$$

Тогда больных с положительным тестом $0,91k = 0,91 \cdot \frac{n}{28}$.

Искомая вероятность того, что наугад выбранный пациент с положительным тестом действительно болен,

$$P = \frac{0,91 \cdot \frac{n}{28}}{0,1n} = 0,325$$

Ответ: 0,325.

4. Разные задачи

■ Примеры

№1. Агрофирма закупает куриные яйца в двух домашних хозяйствах. 95% яиц из первого хозяйства - яйца высшей категории, а из второго хозяйства - 55% яиц высшей категории. Всего высшую категорию получают 75% яиц. Найдите вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства.

№2. Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 45% этих стекол, вторая - 55%. Первая фабрика выпускает 3% бракованных стекол, а вторая - 1%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

№3. На фабрике керамической посуды 10% произведенных тарелок имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 80% дефектных тарелок. Остальные тарелки поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная при покупке тарелка не имеет дефектов. Ответ округлите до сотых.

№4. В городе 46% взрослого населения - мужчины. Пенсионеры составляют 7,7% взрослого населения, причем доля пенсионеров среди женщин равна 10%. Для социологического опроса выбран случайным образом мужчина, проживающий в этом городе. Найдите вероятность события "выбранный мужчина является пенсионером".

№5. В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,12. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

№6. В таблице показано количество билетов и возможные выигрыши беспроигрышной денежной лотереи. Цена билета лотереи равна 50 рублей. Всего билетов выпущено 1000 штук. Участник покупает один случайный билет. На сколько рублей цена билета выше, чем математическое ожидание выигрыша?

Выигрыш	10	50	100	5000
Количество билетов	990	6	3	1

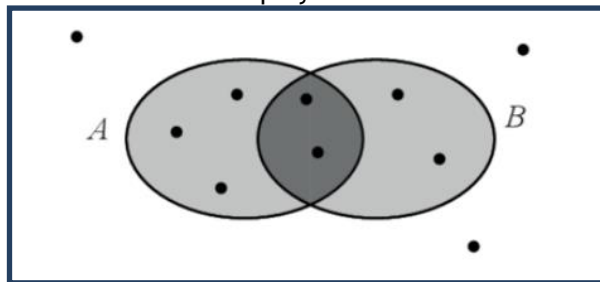
№7. В таблице показано распределение случайной величины X . Найдите EX – математическое ожидание этой случайной величины.

Значения X	-4	0	1	3
Вероятности	0,2	0,1	0,4	0,3

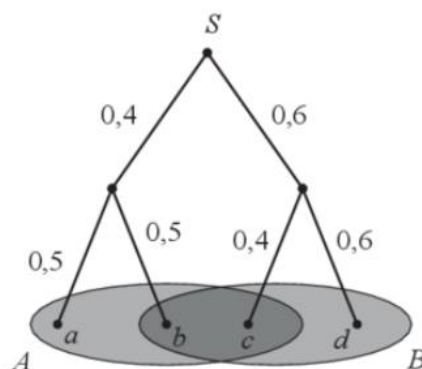
№8. Стрелок в тире стреляет по пяти одинаковым мишеням. На каждую мишень дается не более двух выстрелов, и известно, что вероятность поразить мишень каждым отдельным выстрелом равна 0,6. Во сколько раз вероятность события "стрелок поразит ровно пять мишеней" больше вероятности события "стрелок поразит ровно четыре мишени"?

№9. Маша коллекционирует принцесс из Киндер-сюрпризов. Всего в коллекции 10 разных принцесс, и они равномерно распределены, то есть в каждом очередном Киндер-сюрпризе может с равными вероятностями оказаться любая из 10 принцесс. У Маши уже есть две разные принцессы из коллекции. Какова вероятность того, что для получения следующей принцессы Маше придется купить еще 2 или 3 шоколадных яйца.

- №10. На диаграмме Эйлера показаны события A и B в некотором случайном эксперименте, в котором 10 равновозможных элементарных событий. Элементарные события показаны точками. Найдите $P(B|A)$ – условную вероятность события B при условии A .



- №11. На рисунке показано дерево некоторого случайного эксперимента. Событию A благоприятствуют элементарные события a, b, c , а событию B благоприятствуют элементарные события b, c, d . Найдите $P(A|B)$ – условную вероятность события A при условии B .



- №12. В викторине участвуют 5 команд. Все команды разной силы, и в каждой встрече выигрывает та команда, которая сильнее. В первом раунде встречаются две случайно выбранные команды. Ничья невозможна. Проигравшая команда выбывает из викторины, а победившая играет со следующим случайно выбранным соперником. Известно, что в первых двух играх победила команда А. Какова вероятность того, что эта команда выиграет третий раунд?

- №13. Турнир по настольному теннису проводится по олимпийской системе: игроки случайным образом разбиваются на игровые пары; проигравший в каждой паре выбывает из турнира, а победитель выходит в следующий тур, где встречается со следующим противником, который определен жребием. Всего в турнире участвует 8 игроков, все они играют одинаково хорошо, поэтому в каждой встрече вероятность выигрыша и поражения у каждого игроков равна 0,5. Среди игроков два друга - Иван и Алексей. Какова вероятность того, что этим двоим в каком-то туре придется сыграть друг с другом?

- №14. Турнир по настольному теннису проводится по олимпийской системе в несколько туров: если в туре участвует четное число игроков, то они разбиваются на случайные игровые пары. Если игроков нечетно, то с помощью жребия выбираются игровые пары, а один игрок остается без пары и не участвует в туре. Проигравший в каждой паре (ничья невозможна) выбывает из турнира, а победители и игрок без пары, если он есть, выходят в следующий тур, который проводится по таким же правилам. Так продолжается до тех пор, пока не останутся двое, которые играют между собой финальный тур, то есть последнюю партию, которая выявляет победителя турнира. Всего в турнире участвует 10 игроков, все они играют одинаково хорошо, поэтому в каждой встрече вероятность выигрыша и поражения у каждого игроков равна 0,5. Среди игроков два друга - Иван и Алексей. Какова вероятность того, что этим двоим в каком-то туре придется сыграть друг с другом?

- №15. Первый член последовательности целых чисел равен 0. Каждый следующий член последовательности с вероятностью $p = 0,8$ на единицу больше предыдущего и с вероятностью $1 - p$ на единицу меньше предыдущего. Какова вероятность того, что какой-то член этой последовательности окажется равен -1?

№16. Монету подбрасывают 13 раз. Найдите математическое ожидание количества выпавших орлов.

№17. Монету подбрасывают до тех пор, пока орел не выпадет два раза (не обязательно подряд). Найдите математическое ожидание числа бросков.

№18. Монету подбрасывают до тех пор, пока орел не выпадет три раза (не обязательно подряд). Найдите математическое ожидание числа бросков.

■ Решение (примеры) 4. Разные задачи

№1. Агрофирма закупает куриные яйца в двух домашних хозяйствах. 95% яиц из первого хозяйства - яйца высшей категории, а из второго хозяйства - 55% яиц высшей категории. Всего высшую категорию получают 75% яиц. Найдите вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства.

	Всего яиц	Высшей категории
I хозяйство	x	$0,95x$
II хозяйство	y	$0,55y$
I+II агрофирма	$x + y$	$0,75(x + y) = 0,95x + 0,55y$

$$x = y, \quad P = \frac{x}{x + y} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2} = 0,5$$

Вероятность того, что купленное яйцо в этой агрофирме окажется из первого хозяйства равна 0,5.

Ответ: 0,5.

№2. Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 45% этих стекол, вторая - 55%. Первая фабрика выпускает 3% бракованных стекол, а вторая - 1%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

Пусть всего произведено x стекл для фар. Первая фабрика выпускает $0,45x$ этих стекл, а вторая - $0,55x$. Бракованные стекла на первой фабрике $0,03 \cdot 0,45x = 0,0135x$, на второй фабрике - $0,01 \cdot 0,55x = 0,0055x$. Всего бракованных стекл с двух фабрик $0,0134x + 0,0055x = 0,019x$.

Вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным равна $\frac{0,019x}{x} = 0,019$

Ответ: 0,019.

№3. На фабрике керамической посуды 10% произведенных тарелок имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 80% дефектных тарелок. Остальные тарелки поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная при покупке тарелка не имеет дефектов. Ответ округлите до сотых.

Пусть всего производится на фабрике x тарелок. Из них имеют дефект 10% или $0,1x$, тогда в продажу поступают 90% тарелок без дефекта или $0,9x$. При контроле качества продукции выявляется только 80% дефектных тарелок, значит, 20% дефектных тарелок уйдет в продажу, а именно, $0,2 \cdot 0,1x = 0,02x$. Таким образом, в продажу поступает $0,9x$ тарелок без дефекта и $0,02x$ с дефектом. Всего поступило в продажу

$0,92x$ тарелок. Вероятность купить тарелку без дефекта $\frac{0,9x}{0,92x} = \frac{45}{46} \approx 0,978... \approx 0,98$.

Ответ: 0,98.

- №4. В городе 46% взрослого населения - мужчины. Пенсионеры составляют 7,7% взрослого населения, причем доля пенсионеров среди женщин равна 10%. Для социологического опроса выбран случайным образом мужчина, проживающий в этом городе. Найдите вероятность события "выбранный мужчина является пенсионером".

Пусть в городе всего x жителей, тогда мужчин - $0,46x$, а женщин - $0,54x$. Пенсионеров $0,077x$, а женщин среди пенсионеров - $0,1 \cdot 0,54x = 0,054x$. Пенсионеров среди мужчин $0,077x - 0,054x = 0,023x$. Тогда вероятность события "выбранный мужчина является пенсионером" равна $\frac{0,023x}{0,46x} = 0,05$.

Ответ: 0,05.

- №5. В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,12. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

Поскольку $0,3 \cdot 0,3 \neq 0,12$, то события "кофе закончится в 1-ом автомате" и "кофе закончится во 2-м автомате" зависимые. Составим таблицу вероятностей возможных результатов в конце дня.

		2-й автомат	
		Кофе закончился	Кофе остался
1-ый автомат	Кофе закончился	0,12	$0,3 - 0,12 = 0,18$
	Кофе остался	$0,3 - 0,12 = 0,18$	$1 - (0,12 + 0,18 + 0,18) = 0,52$

Ответ: 0,52.

- №6. В таблице показано количество билетов и возможные выигрыши беспроигрышной денежной лотереи. Цена билета лотереи равна 50 рублей. Всего билетов выпущено 1000 штук. Участник покупает один случайный билет. На сколько рублей цена билета выше, чем математическое ожидание выигрыша?

Выигрыш	10	50	100	5000
Количество билетов	990	6	3	1

$$\frac{990}{1000} \cdot 10 + \frac{6}{1000} \cdot 50 + \frac{3}{1000} \cdot 100 + \frac{1}{1000} \cdot 5000 = 9,9 + 0,3 + 0,3 + 5 = 15,5$$

$$50 - 15,5 = 34,5$$

Ответ: 34,5.

- №7. В таблице показано распределение случайной величины X . Найдите EX – математическое ожидание этой случайной величины.

Значения X	-4	0	1	3
Вероятности	0,2	0,1	0,4	0,3

Математическое ожидание случайной величины $EX = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4$

$$EX = -4 \cdot 0,2 + 0 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,4 + 3 \cdot 0,3 = 0,5$$

Ответ: 0,5.

- №8. Стрелок в тире стреляет по пяти одинаковым мишеням. На каждую мишень дается не более двух выстрелов, и известно, что вероятность поразить мишень каждым отдельным выстрелом равна 0,6. Во сколько раз вероятность события "стрелок поразит ровно пять мишеней" больше вероятности события "стрелок поразит ровно четыре мишени"?

Вероятность не поразить каждую отдельную мишень одним выстрелом равна 0,4, поэтому вероятность не поразить ее двумя независимыми выстрелами равна $0,4^2 = 0,16$. Значит, получается серия из 5 испытаний Бернулли с вероятностью успеха $p = 0,84$ и вероятностью неудачи $q = 0,16$.

Вероятность k успехов в серии из n испытаний Бернулли с вероятностью успеха p : $P = C_n^k p^k q^{n-k}$.

Найдем искомое отношение:
$$\frac{P(\text{поражены ровно 5 мишеней})}{P(\text{поражены ровно 4 мишени})} = \frac{C_5^5 \cdot p^5}{C_5^4 \cdot p^4 \cdot q^1} = \frac{p \cdot 4!}{q \cdot 5!} = \frac{0,84}{0,16 \cdot 5} = 1,05$$

Ответ: 1,05.

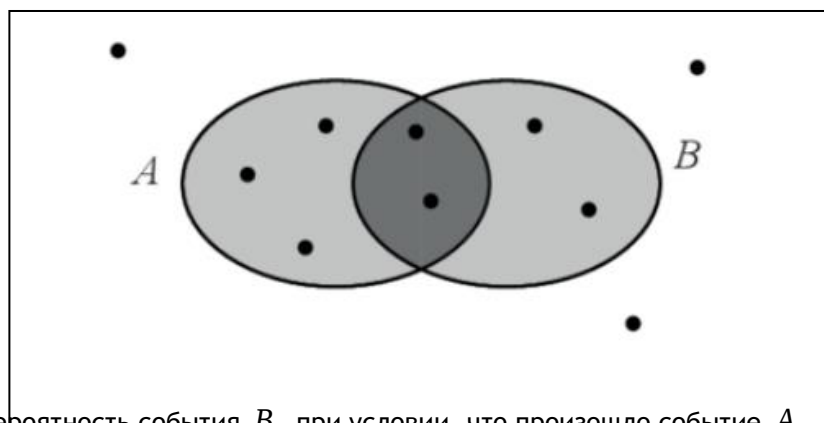
- №9. Маша коллекционирует принцесс из Киндер-сюрпризов. Всего в коллекции 10 разных принцесс, и они равномерно распределены, то есть в каждом очередном Киндер-сюрпризе может с равными вероятностями оказаться любая из 10 принцесс. У Маши уже есть две разные принцессы из коллекции. Какова вероятность того, что для получения следующей принцессы Маше придется купить еще 2 или 3 шоколадных яйца.

В Машинной коллекции не хватает 8 различных принцесс. Значит, вероятность того, что при следующей покупке Маше попадется одна из отсутствующих принцесс, равна 0,8. Получается серия независимых испытаний до первого успеха с вероятностью успеха $p = 0,8$ и неудачи $q = 0,2$. Вероятность того, что успех случится со второй или с третьей попытки, равна

$$\underbrace{\overbrace{q}^{\text{покупка двух яиц}} \cdot \overbrace{p}^{\text{покупка трех яиц}}}_{\substack{\text{первая попытка} \\ \text{неудача}} \quad \substack{\text{вторая попытка} \\ \text{успех}}} + \underbrace{\overbrace{q}^{\text{покупка трех яиц}} \cdot \overbrace{q}^{\text{покупка трех яиц}} \cdot \overbrace{p}^{\text{покупка трех яиц}}}_{\substack{\text{первая попытка} \\ \text{неудача}} \quad \substack{\text{вторая попытка} \\ \text{неудача}} \quad \substack{\text{третья попытка} \\ \text{успех}}} = pq + pq^2 = 0,8 \cdot 0,2 + 0,8 \cdot 0,2^2 = 0,192.$$

Ответ: 0,192.

- №10. На диаграмме Эйлера показаны события A и B в некотором случайном эксперименте, в котором 10 равновозможных элементарных событий. Элементарные события показаны точками. Найдите $P(B|A)$ – условную вероятность события B при условии A .



$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} - \text{вероятность события } B, \text{ при условии, что произошло событие } A.$$

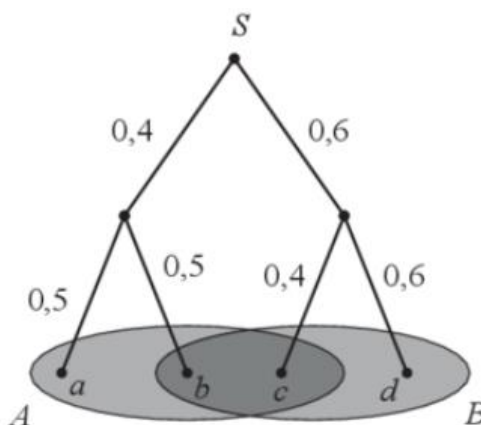
$$P(A) = \frac{5}{10} - \text{всего 10 событий, из них 5 событий } A.$$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{10} - \text{всего 10 событий, из них 2 события являются пересечением событий } A \text{ и } B.$$

$$P(B|A) = \frac{2}{10} : \frac{5}{10} = \frac{2}{5} = 0,4$$

Ответ: 0,4.

- №11. На рисунке показано дерево некоторого случайного эксперимента. Событию A благоприятствуют элементарные события a, b, c , а событию B благоприятствуют элементарные события b, c, d . Найдите $P(A|B)$ – условную вероятность события A при условии B .



$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} - \text{вероятность события } A, \text{ при условии, что произошло событие } B.$$

$$P(B) = 0,4 \cdot 0,5 + 0,6 \cdot 0,4 + 0,6 \cdot 0,6 = 0,8 - \text{вероятность события } B.$$

$$P(A \cap B) = 0,4 \cdot 0,5 + 0,6 \cdot 0,4 = 0,44 - \text{вероятность пересечения двух событий } A \text{ и } B.$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,44}{0,8} = 0,55$$

Ответ: 0,55.

- №12. В викторине участвуют 5 команд. Все команды разной силы, и в каждой встрече выигрывает та команда, которая сильнее. В первом раунде встречаются две случайно выбранные команды. Ничья невозможна. Проигравшая команда выбывает из викторины, а победившая играет со следующим случайно выбранным соперником. Известно, что в первых двух играх победила команда А. Какова вероятность того, что эта команда выиграет третий раунд?

1 способ

Пусть 1, 2, 3, 4, 5 - это силы команд, можно считать, это номера.

В первых двух раундах принимает участие три команды, самая сильная из которых команда А. Выпишем все комбинации команд (по силе), которые играли в первых двух раундах:

Если $A = 3$, то 123 - один вариант

Если $A = 4$, то $\left. \begin{array}{l} 124 \\ 134 \\ 234 \end{array} \right\}$ – 3 варианта

Если $A = 5$, то $\left. \begin{array}{l} 125 \\ 135 \\ 145 \\ 235 \\ 245 \\ 345 \end{array} \right\}$ – 6 вариантов

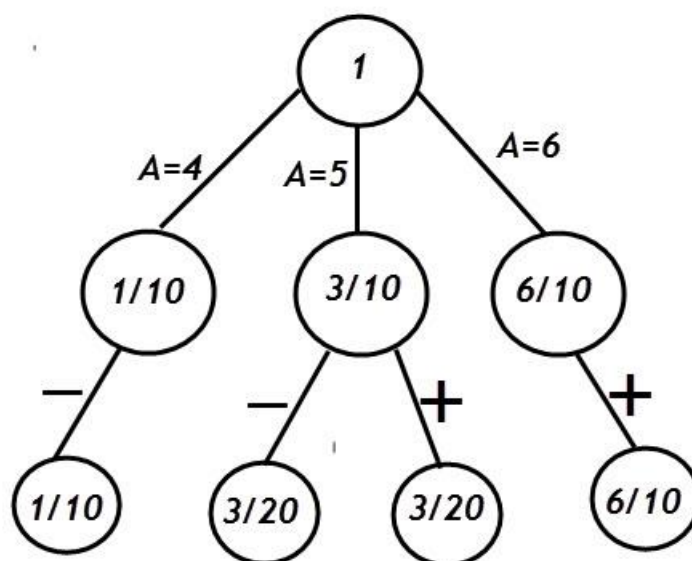
Следовательно,

вероятность того, что $A = 3$, равна $\frac{1}{10}$, в этом случае в третьем раунде команда А проиграет;

вероятность того, что $A = 4$, равна $\frac{3}{10}$, в этом случае в третьем раунде команда А может встретиться с

более сильной или с менее сильной командой, вероятность выигрыша $\frac{1}{2}$:

вероятность того, что $A=5$, равна $\frac{6}{10}$, в этом случае в третьем туре команда А выигрывает.



Вероятность того, что команда А выиграет третий раунд равна $\frac{3}{20} + \frac{6}{10} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4} = 0,75$.

Ответ: 0,75.

II способ

5 команд, в 2 играх команда А выиграла. Вероятность победить в 3-ом раунде

Количество раундов (игр)	Количество команд, принявших участие	Вероятность того, что команда А проиграет	Вероятность того, что команда А выигрывает
2	3 (среди них есть А)		
3	3(среди них есть А) +1 (более сильная)=4	$\frac{1}{4}$	$1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0,75$

15 команд, в 8 играх команда А выиграла. Вероятность победить в 9-ом раунде

Количество раундов (игр)	Количество команд, принявших участие	Вероятность того, что команда А проиграет	Вероятность того, что команда А выигрывает
8	9 (среди них есть А)		
9	9(среди них есть А) +1 (более сильная)=10	$\frac{1}{10}$	$1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10} = 0,9$

В n играх команда А выиграла. Вероятность победить в $n+1$ -ом раунде

Количество раундов (игр)	Количество команд, принявших участие	Вероятность того, что команда А проиграет	Вероятность того, что команда А выигрывает
n	$n+1$ (среди них есть А)		
$n+1$	$n+1$ (среди них есть А) +1 (более сильная)= $= n+2$	$\frac{1}{n+2}$	$1 - \frac{1}{n+2} = \frac{n+1}{n+2}$

№13. Турнир по настольному теннису проводится по олимпийской системе: игроки случайным образом разбиваются на игровые пары; проигравший в каждой паре выбывает из турнира, а победитель выходит в следующий тур, где встречается со следующим противником, который

определен жребием. Всего в турнире участвует 8 игроков, все они играют одинаково хорошо, поэтому в каждой встрече вероятность выигрыша и поражения у каждого игроков равна 0,5. Среди игроков два друга - Иван и Алексей. Какова вероятность того, что этим двоим в каком-то туре придется сыграть друг с другом?

Пусть в турнире по олимпийской системе участвуют n игроков, тогда проводится $n-1$ игра. Разбить игроков

на произвольные пары можно $k = \frac{n(n-1)}{2}$ способами. Для каждого турнира построим дерево игр, в

вершинах которого укажем имена двух встретившихся в соответствующей игре игроков. Любая пара игроков в турнире может сыграть друг с другом не больше одного раза. Выберем один из турниров. Рассмотрим событие, состоящее в том, что двое наперед выбранных игроков встретились в первой игре первого тура.

Вероятность этого события равна $\frac{1}{k}$, то есть $\frac{2}{n(n-1)}$. Выбираем вторую игру первого тура, третью и т.д. до

последней игры $n-1$ -ой игры последнего тура. Эти события равновероятны и несовместимы, а поэтому

искомая вероятность их суммы равна $(n-1) \cdot \frac{1}{k} = (n-1) \cdot \frac{2}{n(n-1)} = \frac{2}{n}$.

$$n=8, P = \frac{2}{n} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0,25$$

Ответ: 0,25.

№14. Турнир по настольному теннису проводится по олимпийской системе в несколько туров: если в туре участвует четное число игроков, то они разбиваются на случайные игровые пары. Если игроков нечетно, то с помощью жребия выбираются игровые пары, а один игрок остается без пары и не участвует в туре. Проигравший в каждой паре (ничья невозможна) выбывает из турнира, а победители и игрок без пары, если он есть, выходят в следующий тур, который проводится по таким же правилам. Так продолжается до тех пор, пока не останутся двое, которые играют между собой финальный тур, то есть последнюю партию, которая выявляет победителя турнира. Всего в турнире участвует 10 игроков, все они играют одинаково хорошо, поэтому в каждой встрече вероятность выигрыша и поражения у каждого игроков равна 0,5. Среди игроков два друга - Иван и Алексей. Какова вероятность того, что этим двоим в каком-то туре придется сыграть друг с другом?

В каждом матче выбывает один игрок, поэтому состоится ровно 9 игр. Рассмотрим случайный эксперимент, который состоит в случайном выборе одной пары, а именно - пары, куда войдут два наших игрока. То есть мы не обращаем никакого внимания на ход турнира, а просто выбираем подмножества множества пар. Всего

в эксперименте $k = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ равновозможных элементарных событий (пар), а событию "пара

Иван-Алексей окажется среди сыгранных", благоприятствуют 9 из них. Следовательно, получим $\frac{9}{45} = 0,2$.

Ответ: 0,2.

- №15. Первый член последовательности целых чисел равен 0. Каждый следующий член последовательности с вероятностью $p = 0,8$ на единицу больше предыдущего и с вероятностью $1 - p$ на единицу меньше предыдущего. Какова вероятность того, что какой-то член этой последовательности окажется равен -1 ?

Пусть P_0 – вероятность попасть в точку (-1) , если вначале мы находились в точке 0.

Так как из точки 0 можно пойти вверх с вероятностью $p = 0,8$ или вниз с вероятностью $q = 1 - p = 1 - 0,8 = 0,2$ и эти события несовместны, то $P_0 = q + p \cdot P_1$, где P_1 – вероятность попасть в точку (-1) , находясь в точке 1.

Так как P_0 – это фактически вероятность из данной начальной точки достигнуть точку на единицу ниже, то $P_1 = P_0 \cdot P_0 = P_0^2$.

Тогда получим уравнение

$$P_0 = q + p \cdot P_1$$

$$P_0 = q + p \cdot P_0^2$$

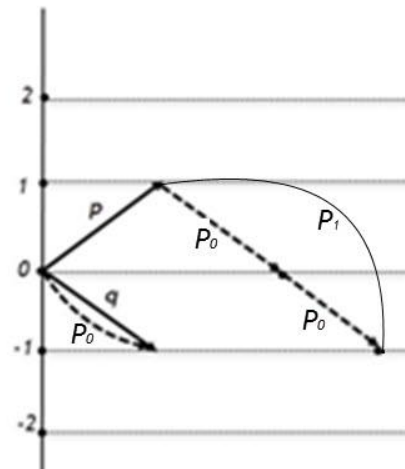
$$p \cdot P_0^2 - P_0 + q = 0$$

$$0,8 \cdot P_0^2 - P_0 + 0,2 = 0$$

$$D = 1 - 4 \cdot 0,8 \cdot 0,2 = 0,36$$

$$P_0 = \frac{1 \pm 0,6}{1,6}, P_0 = 1 \quad P_0 = 0,25$$

Учитывая, что $P_0 < 1$, получим $P_0 = 0,25$.



Ответ: 0,25.

- №16. Монету подбрасывают 13 раз. Найдите математическое ожидание количества выпавших орлов.

Рассмотрим один любой бросок монеты. С вероятностью $\frac{1}{2}$ выпадет 1 орел, с вероятностью $\frac{1}{2}$ выпадет 0

орлов. Математическое ожидание количества орлов при одном броске равно: $\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{2}$.

Следовательно, при 13 бросках математическое ожидание количества орлов равно $13 \cdot \frac{1}{2} = 6,5$. Так как

математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий этих величин, то для получения ответа достаточно 13 раз просуммировать математическое ожидание орлов при однократном броске).

Ответ: 6,5.

№17. Монету подбрасывают до тех пор, пока орел не выпадет два раза (не обязательно подряд). Найдите математическое ожидание числа бросков.

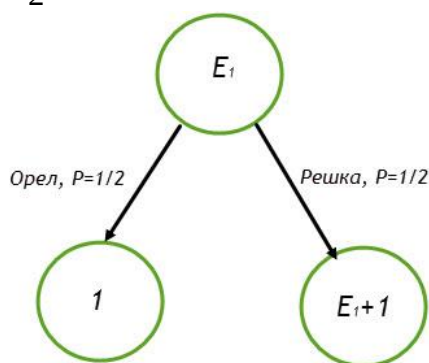
Пусть монету бросают до первого выпадения орла. Найдем E_1 – математическое ожидание числа бросков в этом случае (т.е. E_1 – величина, показывающая, сколько в среднем необходимо сделать бросков монеты).

При первом броске с вероятностью $\frac{1}{2}$ выпадет орел, тогда будет произведен ровно один бросок. С

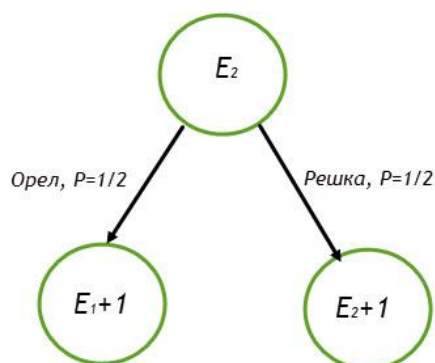
вероятностью $\frac{1}{2}$ при первом броске выпадет решка, тогда мы возвращаемся к исходной ситуации с той разницей, что уже произведен один "лишний" бросок.

Следовательно, в последнем случае в среднем понадобится $E_1 + 1$ бросков. Получаем уравнение

$$E_1 = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot (E_1 + 1), \text{ откуда } E_1 = 2.$$



а)



б)

Бросаем монету, пока дважды не выпадет орел. Пусть E_2 – математическое ожидание числа бросков. Если при первом броске выпадет орел (вероятность этого $\frac{1}{2}$), то в среднем необходимо еще $E_1 = 2$ броска (по предыдущему результату), итого $E_1 + 1 = 2 + 1 = 3$. Если же при первом броске выпадет решка (вероятность этого $\frac{1}{2}$), то мы возвращаемся к исходной ситуации с той разницей, что уже произведен один "лишний"

бросок. Следовательно, в последнем случае понадобится $E_2 + 1$ бросков. Получаем уравнение

$$E_2 = \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot (E_2 + 1), \text{ откуда } E_2 = 4.$$

Ответ: 4.

№18. Монету подбрасывают до тех пор, пока орел не выпадет три раза (не обязательно подряд). Найдите математическое ожидание числа бросков.

Пусть E – искомое математическое ожидание.

С вероятностью $\frac{1}{2}$ при первом броске выпадет орел, а для того чтобы выпали еще 2 орла, в среднем потребуется еще 4 броска (см. задачу №17), то есть всего 5 бросков.

С вероятностью $\frac{1}{2}$ при первом броске выпадет решка. Тогда окажемся в том же положении, что и в начале, но сделав один дополнительный бросок. В среднем остается еще E бросков, а всего – $(E + 1)$ бросок.

Тогда $E = \frac{1}{2} \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot (E + 1)$, откуда $E = 6$.

Ответ: 6.

■ Тест

4. Разные задачи

- №1. Агрофирма закупает куриные яйца в двух домашних хозяйствах. 60% яиц из первого хозяйства - яйца высшей категории, а из второго хозяйства - 30% яиц высшей категории. Всего высшую категорию получает 45% яиц. Найдите вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства.
- №2. На фабрике керамической посуды 20% произведенных пиал имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 90% дефектных пиал. Остальные пиалы поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная при покупке пиала не имеет дефектов. Ответ округлите до сотых.
- №3. В городе 44% взрослого населения - мужчины. Пенсионеры составляют 14,4% взрослого населения, причем доля пенсионеров среди женщин равна 10%. Для социологического опроса выбран случайным образом мужчина, проживающий в этом городе. Найдите вероятность события "выбранный мужчина является пенсионером".
- №4. В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,7. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,56. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

- №5. В таблице показано количество билетов и возможные выигрыши беспроигрышной денежной лотереи. Цена билета лотереи равна 200 рублей. Всего билетов выпущено 1000 штук. Участник покупает один случайный билет. На сколько рублей цена билета выше, чем математическое ожидание выигрыша?

Выигрыш	20	1000	10 000	50 000
Вероятности	990	5	4	1

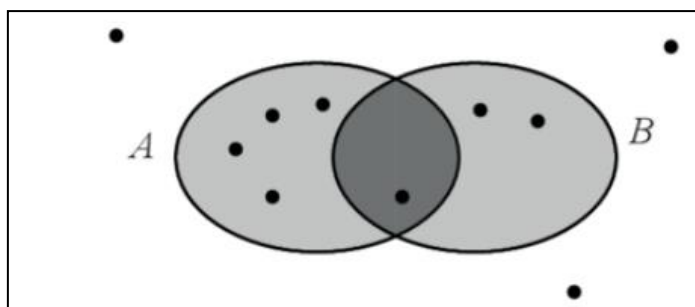
- №6. В таблице показано распределение случайной величины X . Найдите EX – математическое ожидание этой случайной величины.

Значения X	-5	1	2	3
Вероятности	0,3	0,2	0,3	0,2

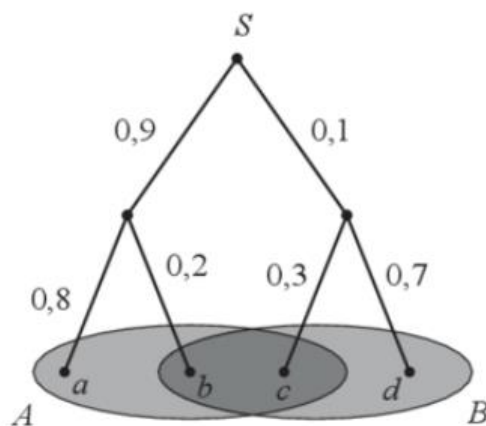
- №7. Стрелок в тире стреляет по пяти одинаковым мишеням. На каждую мишень дается не более двух выстрелов, и известно, что вероятность поразить мишень каждым отдельным выстрелом равна 0,5. Во сколько раз вероятность события "стрелок поразит ровно три мишени" больше вероятности события "стрелок поразит ровно две мишени"?

- №8. Маша коллекционирует принцесс из Киндер-сюрпризов. Всего в коллекции 10 разных принцесс, и они равномерно распределены, то есть в каждом очередном Киндер-сюрпризе может с равными вероятностями оказаться любая из 10 принцесс. У Маши уже есть восемь разных принцесс из коллекции. Какова вероятность того, что для получения следующей принцессы Маше придется купить еще 2 или 3 шоколадных яйца.

- №9. На диаграмме Эйлера показаны события A и B в некотором случайном эксперименте, в котором 10 равновозможных элементарных событий. Элементарные события показаны точками. Найдите $P(B|A)$ – условную вероятность события B при условии A .



- №10. На рисунке показано дерево некоторого случайного эксперимента. Событию A благоприятствуют элементарные события a, b, c , а событию B благоприятствуют элементарные события b, c, d . Найдите $P(A|B)$ – условную вероятность события A при условии B .



- №11. В викторине участвуют 6 команд. Все команды разной силы, и в каждой встрече выигрывает та команда, которая сильнее. В первом раунде встречаются две случайно выбранные команды. Ничья невозможна. Проигравшая команда выбывает из викторины, а победившая играет со следующим случайно выбранным соперником. Известно, что в первых трех играх победила команда А. Какова вероятность того, что эта команда выиграет четвертый раунд.

- №12. Турнир по настольному теннису проводится по олимпийской системе: игроки случайным образом разбиваются на игровые пары; проигравший в каждой паре выбывает из турнира, а победитель выходит в следующий тур, где встречается со следующим противником, который определен жребием. Всего в турнире участвует 32 игрока, все они играют одинаково хорошо, поэтому в каждой встрече вероятность выигрыша и поражения у каждого игрока равна 0,5. Среди игроков два друга – Иван и Алексей. Какова вероятность того, что этим двоим в каком-то туре придется сыграть друг с другом?

- №13. Турнир по настольному теннису проводится по олимпийской системе в несколько туров: если в туре участвует четное число игроков, то они разбиваются на случайные игровые пары. Если игроков нечетно, то с помощью жребия выбираются игровые пары, а один игрок остается без пары и не участвует в туре. Проигравший в каждой паре (ничья невозможна) выбывает из турнира, а победители и игрок без пары, если он есть, выходят в следующий тур, который проводится по таким же правилам. Так продолжается до тех пор, пока не останутся двое, которые играют между собой финальный тур, то есть последнюю партию, которая выявляет победителя турнира. Всего в турнире участвует 25 игроков, все они играют одинаково хорошо, поэтому в каждой встрече вероятность выигрыша и поражения у каждого игрока равна 0,5. Среди игроков два друга – Иван и Алексей. Какова вероятность того, что этим двоим в каком-то туре придется сыграть друг с другом?

- №14. Первый член последовательности целых чисел равен 0. Каждый следующий член последовательности с вероятностью $p = \frac{10}{13}$ на единицу больше предыдущего и с вероятностью $1 - p$ на единицу меньше предыдущего. Какова вероятность того, что какой-то член этой последовательности окажется равен -1?

- №15. Монету подбрасывают 6 раз. Найдите математическое ожидание количества выпавших орлов.

■ Ответы (тест) 4. Разные задачи

№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11	№12	№13	№14	№15
0,5	0,98	0,2	0,16	85,2	- 0,1	3	0,288	0,2	0,75	0,8	0,0625	0,04	0,3	3

Решение (тест) 4. Разные задачи

№1. Агрофирма закупает куриные яйца в двух домашних хозяйствах. 60% яиц из первого хозяйства - яйца высшей категории, а из второго хозяйства - 30% яиц высшей категории. Всего высшую категорию получает 45% яиц. Найдите вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства.

Пусть первое домашнее хозяйство поставляет в агрофирму всего x яиц, из них $0,6x$ — яйца высшей категории, а второе хозяйство поставляет y яиц, из них $0,3y$ — яйца высшей категории.

Всего высшую категорию получают 45% яиц: $0,6x + 0,3y = 0,45(x + y)$, $x = y$.

Вероятность того, что купленное у этой агрофирмы яйцо окажется из первого хозяйства равна

$$\frac{x}{x + y} = \frac{x}{2x} = 0,5.$$

Ответ: 0,5.

№2. На фабрике керамической посуды 20% произведенных пиал имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 90% дефектных пиал. Остальные пиалы поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная при покупке пиала не имеет дефектов. Ответ округлите до сотых.

Пусть всего производится на фабрике x пиал. Из них имеют дефект 20% или $0,2x$, тогда в продажу поступают 80% пиал без дефекта или $0,8x$. При контроле качества продукции выявляется только 90% дефектных пиал, значит, 10% дефектных пиал уйдет в продажу, а именно, $0,1 \cdot 0,2x = 0,02x$. Таким образом, в продажу поступает $0,8x$ тарелок без дефекта и $0,02x$ с дефектом. Всего поступило в продажу

$0,82x$ тарелок. Вероятность купить тарелку без дефекта $\frac{0,8x}{0,82x} = \frac{40}{41} \approx 0,975... \approx 0,98$. Ответ: 0,98.

№3. В городе 44% взрослого населения - мужчины. Пенсионеры составляют 14,4% взрослого населения, причем доля пенсионеров среди женщин равна 10%. Для социологического опроса выбран случайным образом мужчина, проживающий в этом городе. Найдите вероятность события "выбранный мужчина является пенсионером".

Пусть в городе всего x жителей, тогда мужчин - $0,44x$, а женщин - $0,56x$. Пенсионеров $0,144x$, а женщин среди пенсионеров - $0,1 \cdot 0,56x = 0,056x$. Пенсионеров среди мужчин $0,144x - 0,056x = 0,088x$. Тогда

вероятность события "выбранный мужчина является пенсионером" равна $\frac{0,088x}{0,44x} = 0,2$.

Ответ: 0,2.

№4. В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,7. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,56. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

Поскольку $0,7 \cdot 0,7 \neq 0,56$, то события "кофе закончится в 1-ом автомате" и "кофе закончится во 2-м автомате" зависимые. Составим таблицу вероятностей возможных результатов в конце дня.

		2-й автомат	
		Кофе закончился	Кофе остался
1-ый автомат	Кофе закончился	0,56	$0,7 - 0,56 = 0,14$
	Кофе остался	$0,7 - 0,56 = 0,14$	$1 - (0,56 + 0,14 + 0,14) = 0,16$

Ответ: 0,16.

- №5. В таблице показано количество билетов и возможные выигрыши беспроигрышной денежной лотереи. Цена билета лотереи равна 200 рублей. Всего билетов выпущено 1000 штук. Участник покупает один случайный билет. На сколько рублей цена билета выше, чем математическое ожидание выигрыша?

Выигрыш	20	1000	10 000	50 000
Вероятности	990	5	4	1

$$\frac{990}{1000} \cdot 20 + \frac{5}{1000} \cdot 1000 + \frac{4}{1000} \cdot 10\,000 + \frac{1}{1000} \cdot 50\,000 = 19,8 + 5 + 40 + 50 = 114,8$$

$$200 - 114,8 = 85,2$$

Ответ: 85,2.

- №6. В таблице показано распределение случайной величины X . Найдите EX – математическое ожидание этой случайной величины.

Значения X	-5	1	2	3
Вероятности	0,3	0,2	0,3	0,2

Математическое ожидание случайной величины $EX = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4$

$$EX = -5 \cdot 0,3 + 1 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,2 = -0,1.$$

Ответ: - 0,1.

- №7. Стрелок в тире стреляет по пяти одинаковым мишеням. На каждую мишень дается не более двух выстрелов, и известно, что вероятность поразить мишень каждым отдельным выстрелом равна 0,5. Во сколько раз вероятность события "стрелок поразит ровно три мишени" больше вероятности события "стрелок поразит ровно две мишени"?

Вероятность не поразить каждую отдельную мишень одним выстрелом равна 0,5, поэтому вероятность не поразить ее двумя независимыми выстрелами равна $0,5^2 = 0,25$. Значит, получается серия из 5 испытаний Бернулли с вероятностью успеха $p = 0,75$ и вероятностью неудачи $q = 0,25$.

Вероятность k успехов в серии из n испытаний Бернулли с вероятностью успеха p : $P = C_n^k p^k q^{n-k}$.

$$\text{Найдем искомое отношение: } \frac{P(\text{поражены ровно 3 мишени})}{P(\text{поражены ровно 2 мишени})} = \frac{C_5^3 \cdot p^3 \cdot q^2}{C_5^2 \cdot p^2 \cdot q^3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot \frac{2! \cdot 3!}{5!} \cdot \frac{p}{q} = \frac{0,75}{0,25} = 3$$

Ответ: 3.

- №8. Маша коллекционирует принцесс из Киндер-сюрпризов. Всего в коллекции 10 разных принцесс, и они равномерно распределены, то есть в каждом очередном Киндер-сюрпризе может с равными вероятностями оказаться любая из 10 принцесс. У Маши уже есть восемь разных принцесс из коллекции. Какова вероятность того, что для получения следующей принцессы Маше придется купить еще 2 или 3 шоколадных яйца.

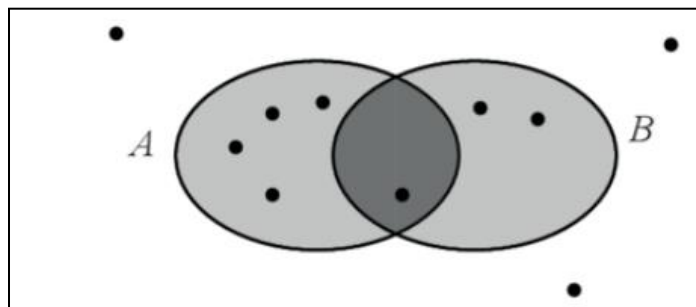
В Машинной коллекции не хватает 2 различных принцесс. Значит, вероятность того, что при следующей покупке Маше попадет одна из отсутствующих принцесс, равна 0,2. Получается серия независимых испытаний до первого успеха с вероятностью успеха $p = 0,2$ и неудачи $q = 0,8$. Вероятность того, что успех случится со второй или с третьей попытки, равна

$$\overbrace{q \cdot p}^{\text{покупка двух яиц}} + \overbrace{q \cdot q \cdot p}^{\text{покупка трех яиц}} = pq + pq^2 = 0,8 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,8^2 = 0,288.$$

первая попытка
неудача
вторая попытка
успех
первая попытка
неудача
вторая попытка
неудача
третья попытка
успех

Ответ: 0,288.

- №9. На диаграмме Эйлера показаны события A и B в некотором случайном эксперименте, в котором 10 равновозможных элементарных событий. Элементарные события показаны точками. Найдите $P(B|A)$ – условную вероятность события B при условии A .



$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} - \text{вероятность события } B, \text{ при условии, что произошло событие } A.$$

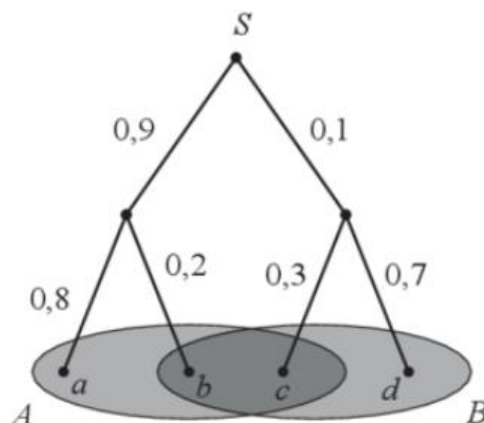
$$P(A) = \frac{5}{10} - \text{всего 10 событий, из них 5 событий } A.$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{10} - \text{всего 10 событий, из них 1 событие является пересечением событий } A \text{ и } B.$$

$$P(B|A) = \frac{1}{10} : \frac{5}{10} = \frac{1}{5} = 0,2$$

Ответ: 0,2.

- №10. На рисунке показано дерево некоторого случайного эксперимента. Событию A благоприятствуют элементарные события a, b, c , а событию B благоприятствуют элементарные события b, c, d . Найдите $P(A|B)$ – условную вероятность события A при условии B .



$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} - \text{вероятность события } A, \text{ при условии, что произошло событие } B.$$

$$P(B) = 0,9 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,3 + 0,1 \cdot 0,7 = 0,28 - \text{вероятность события } B.$$

$$P(A \cap B) = 0,9 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,3 = 0,21 - \text{вероятность пересечения двух событий } A \text{ и } B.$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,21}{0,28} = 0,75$$

Ответ: 0,75.

- №11. В викторине участвуют 6 команд. Все команды разной силы, и в каждой встрече выигрывает та команда, которая сильнее. В первом раунде встречаются две случайно выбранные команды. Ничья невозможна. Проигравшая команда выбывает из викторины, а победившая играет со следующим случайно выбранным соперником. Известно, что в первых трех играх победила команда А. Какова вероятность того, что эта команда выиграет четвертый раунд.

I способ

Ранжируем 6 команд по силе игры. Это можно сделать $6! = 720$ способами. Пусть каждый из таких способов - это элементарное событие. Тогда число исходов, ведущих к событию X "команда А выиграла в первых трех играх", равно $C_6^4 \cdot 3! \cdot 2!$ (4 способами выбираем 4 команды, включая А, затем умножаем на количество способов переставить местами трех соперников команды А, затем умножаем на число способов переставить местами две оставшиеся команды). Аналогично, число исходов, ведущих к событию Y "команда А выиграла в первых четырех играх", равно $C_6^5 \cdot 4! \cdot 1!$.

Вероятность второго события при условии первого;

$$\frac{C_6^5 \cdot 4! \cdot 1!}{C_6^4 \cdot 3! \cdot 2!} = \left(\frac{6!}{5!(6-5)!} \cdot 4! \right) : \left(\frac{6!}{4!(6-4)!} \cdot 3! \cdot 2! \right) = \frac{6! \cdot 4! \cdot 4! \cdot 2!}{5 \cdot 4! \cdot 6! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 3!}{5 \cdot 3!} = \frac{4}{5} = 0,8$$

II способ

6 команд, в 3-х играх команда А выиграла. Вероятность победить в 4-ом раунде

Количество раундов (игр)	Количество команд, принявших участие	Вероятность того, что команда А проиграет	Вероятность того, что команда А выиграет
3	4 (среди них есть А)		
4	4(среди них есть А) +1 (более сильная)=5	$\frac{1}{5}$	$1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} = 0,8$

Ответ: 0,8.

- №12. Турнир по настольному теннису проводится по олимпийской системе: игроки случайным образом разбиваются на игровые пары; проигравший в каждой паре выбывает из турнира, а победитель выходит в следующий тур, где встречается со следующим противником, который определен жребием. Всего в турнире участвует 32 игрока, все они играют одинаково хорошо, поэтому в каждой встрече вероятность выигрыша и поражения у каждого игроков равна 0,5. Среди игроков два друга - Иван и Алексей. Какова вероятность того, что этим двоим в каком-то туре придется сыграть друг с другом?

$$\frac{2}{n} = \frac{2}{32} = \frac{1}{16} = 0,0625$$

Ответ: 0,0625.

- №13. Турнир по настольному теннису проводится по олимпийской системе в несколько туров: если в туре участвует четное число игроков, то они разбиваются на случайные игровые пары. Если игроков нечетно, то с помощью жребия выбираются игровые пары, а один игрок остается без пары и не участвует в туре. Проигравший в каждой паре (ничья невозможна) выбывает из турнира, а победители и игрок без пары, если он есть, выходят в следующий тур, который проводится по таким же правилам. Так продолжается до тех пор, пока не останутся двое, которые играют между собой финальный тур, то есть последнюю партию, которая выявляет победителя турнира. Всего в турнире участвует 25 игроков, все они играют одинаково хорошо, поэтому в каждой встрече вероятность выигрыша и поражения у каждого игроков равна 0,5. Среди игроков два друга - Иван и Алексей. Какова вероятность того, что этим двоим в каком-то туре придется сыграть друг с другом?

$$\frac{2}{n} = \frac{2}{25} = \frac{4}{100} = 0,04$$

Ответ: 0,04.

№14. Первый член последовательности целых чисел равен 0. Каждый следующий член последовательности с вероятностью $p = \frac{10}{13}$ на единицу больше предыдущего и с вероятностью $1 - p$ на единицу меньше предыдущего. Какова вероятность того, что какой-то член этой последовательности окажется равен -1 ?

Пусть X — вероятность того, что при выходе из какого-либо числа мы придем к числу, которое на 1 меньше исходного. В частности, при выходе из 0 придем к (-1) , т.е. X — искомая вероятность.

$$p = \frac{10}{13} \quad q = 1 - p = 1 - \frac{10}{13} = \frac{3}{13}$$

$$X = q + p \cdot X^2$$

$$\frac{10}{13} \cdot X^2 - X + \frac{3}{13} = 0$$

$$10X^2 - 13X + 3 \quad D = 169 - 4 \cdot 10 \cdot 3 = 49$$

$$X = \frac{13 \pm 7}{20}, \quad X_1 = 1 \quad X_2 = 0,3$$

Учитывая, что $X < 1$, получим $X = 0,3$.

Ответ: 0,3.

№15. Монету подбрасывают 6 раз. Найдите математическое ожидание количества выпавших орлов.

Рассмотрим один любой бросок монеты. С вероятностью $\frac{1}{2}$ выпадет 1 орел, с вероятностью $\frac{1}{2}$ выпадет 0

орлов. Математическое ожидание количества орлов при одном броске равно: $\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{2}$.

Следовательно, при 6 бросках математическое ожидание количества орлов равно $6 \cdot \frac{1}{2} = 3$. Так как

математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий этих величин, то для получения ответа достаточно 6 раз просуммировать математическое ожидание орлов при однократном броске).

Ответ: 3.

- ✓ **Случайным** называют событие, которое может произойти или не произойти (заранее предсказать невозможно) во время наблюдения или испытания.
- ✓ Вероятностью события A называется отношение числа благоприятных для этого события исходов к общему числу равновозможных исходов.

$$P(A) = \frac{N(A)}{N}$$
, где N – общее число равновозможных исходов, $N(A)$ – число благоприятных для этого события исходов.
 Вероятность любого события A : $0 \leq P(A) \leq 1$.
- ✓ События A и $\bar{A}$ называются противоположными друг другу, если любой исход благоприятен ровно для одного из них.

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$
, значит, $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
- ✓ Если монету бросают n раз, то имеется 2^n равновозможных исходов.
 Если бросают n игральных костей (кубиков), то имеется 6^n равновозможных исходов.
 Столько же исходов получается, если один и тот же кубик бросают n раз.
- ✓ Два события A и B называют **несовместными**, если отсутствуют исходы, благоприятствующие одновременно как событию A , так и событию B .
 Пусть событие C означает, что произошло хотя бы одно из событий A или B .
 Тогда C называют **объединением событий** A и B : $C = A \cup B$.
 Если события A и B несовместны, то вероятность их объединения равна сумме вероятностей событий A и B : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- ✓ Два события A и B называют **независимыми**, если вероятность каждого из них не зависит от появления или не появления другого события.
 Пусть событие C означает, что произошло как событие A , так и B .
 Тогда C называют **пересечением событий** A и B : $C = A \cap B$.
 Если события A и B независимы, то вероятность из пересечения равна произведению вероятностей событий A и B : $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.
- ✓ Вероятность $P(B|A)$ называется **условной вероятностью** события B , если произошло событие A с вероятностью $P(A)$:
$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$
- ✓ Вероятность $P(A|B)$ называется **условной вероятностью** события A , если произошло событие B с вероятностью $P(B)$:
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$
- ✓ Частотой события A называют отношение $\frac{m}{n}$, где n – общее число испытаний, m – число появлений события A .
- ✓ Число сочетаний $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
- ✓ Вероятность k успехов в серии из n испытаний Бернулли с вероятностью успеха p

$$P(S = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$