

Теория. Развёрнутый стиль

Урок 3. Планиметрия

Этот урок посвящён решению задач по планиметрии. В профильном ЕГЭ по математике такие задания встречаются дважды: это задание 1 из первой части и задание 17 из второй.

Задание 1 профильного ЕГЭ по математике представляет собой относительно несложную задачу по планиметрии. Большинство задач, которые встречаются на этой позиции, решаются в один-два шага, однако применяемые факты и методы весьма разнообразны. Разнообразны и многочисленны и сами задачи. Поэтому важно повторить эти факты, ведь неизвестно, какое именно задание попадётся на экзамене.

В задании 17 требуется решить более сложную задачу по планиметрии и записать её полное решение. В пункте «а» этого задания нужно изучить представленную в задаче геометрическую конфигурацию и доказать некоторое утверждение про неё. В пункте «б» требуется вычислить некоторую геометрическую величину для этой конфигурации.

В этом уроке мы повторим основные факты из планиметрии на примере решения заданий 1, а затем научимся комбинировать эти факты, решая задания 17.

Задания на нахождение углов

Решение простейших задач на нахождение величин углов основано в первую очередь на следующем *основном свойстве* измерения углов: если луч проходит внутри угла и разбивает его на два угла, то сумма их градусных мер равна градусной мере (величине) исходного угла.

Величина *развёрнутого* угла принимается равной 180° . Луч с началом в вершине развёрнутого угла разбивает его на два *смежных* угла, сумма градусных мер которых равна 180° . Равные смежные углы имеют величину 90° и называются *прямыми*. Два разных угла, смежные с одним и тем же углом, называются *вертикальными*. Вертикальные углы равны друг другу.

Три угла треугольника можно расположить так, чтобы они в сумме составляли развёрнутый угол. Отсюда следует, что *сумма углов треугольника* равна 180° . Это позволяет найти угол треугольника, зная два остальных.

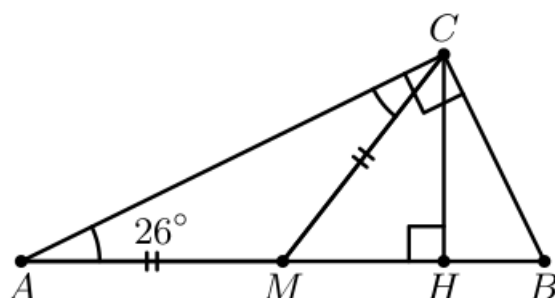
Внешний угол треугольника, смежный с одним из его внутренних углов, равен, таким образом, сумме двух остальных внутренних углов.

В прямоугольном треугольнике один из углов прямой, а в равнобедренном треугольнике углы при основании равны. Эти сведения позволяют найти все углы прямоугольного или же равнобедренного треугольника, зная только один его угол (при этом для равнобедренного треугольника и острого угла нужно дополнительно знать, это угол при вершине или же при основании).

Пример. Один из углов прямоугольного треугольника равен 26° . Найдите угол между медианой и высотой этого треугольника, проведёнными к гипотенузе. Ответ дайте в градусах.

Решение. Пусть ABC — данный треугольник (AB — гипотенуза) и $\angle BAC = 26^\circ$. Пусть также CM — его медиана, а CH — высота. Тогда по свойству прямоугольного треугольника $CM = MA = MB$, поэтому треугольник AMC равнобедренный и $\angle MAC = \angle MCA = 26^\circ$. Так как треугольник AHC прямоугольный, $\angle HCA = 90^\circ - 26^\circ = 64^\circ$, а

$$\angle HCM = \angle HCA - \angle MCA = 64^\circ - 26^\circ = 38^\circ.$$



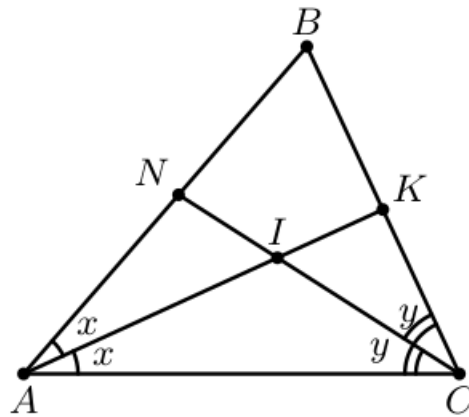
Ответ: 38.

В следующем примере в отличие от предыдущего нельзя найти все углы треугольника. Однако это не мешает найти искомый угол.

Пример. В треугольнике ABC известно, что $\angle ABC = 74^\circ$. Биссектрисы AK и CN этого треугольника пересекаются в точке I . Найдите $\angle AIC$. Ответ дайте в градусах.

Решение. Пусть $\angle CAB = 2x$, а $\angle ACB = 2y$. Тогда $2x + 2y + 74^\circ = 180^\circ$, откуда $x + y = 53^\circ$. Далее из треугольника AIC находим

$$\angle AIC = 180^\circ - (\angle IAC + \angle ICA) = 180^\circ - (x + y) = 127^\circ.$$



Ответ: 127.

Задания на нахождение длин

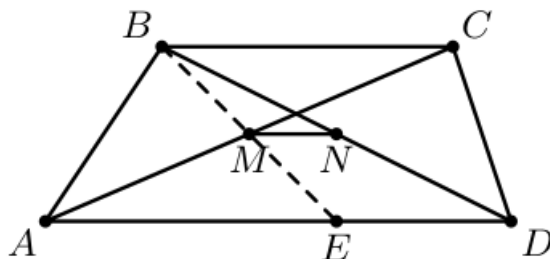
Напомним свойство *средней линии* треугольника и трапеции.

Средняя линия треугольника параллельна его основанию и равна его половине.

Средняя линия трапеции параллельна её основаниям и равна их полусумме.

Пример. В трапеции $ABCD$ известны основания $AD = 9$ и $BC = 5$. Найдите расстояние между серединами диагоналей трапеции.

Решение. Продлим BM до пересечения с основанием AD в точке E .



Треугольники AME и CMB равны по второму признаку равенства треугольников, поэтому $MB = ME$ и $EA = BC = 5$. Значит, $ED = 9 - 5 = 4$. Тогда MN — средняя линия в треугольнике EBD и $MN = \frac{1}{2}ED = 2$.

Ответ: 2.

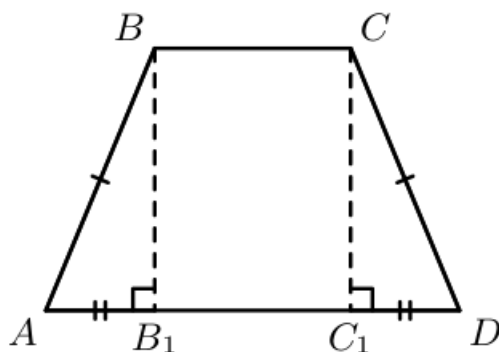
Теорема Пифагора играет ключевую роль в вычислениях в планиметрии и стереометрии. Эта теорема утверждает, что *во всяком прямоугольном треугольнике квадрат длины гипотенузы равен сумме квадратов длин катетов*.

Справедливо и обратное: если в каком-то треугольнике квадрат одной стороны равен сумме квадратов двух других, то этот треугольник прямоугольный (а наибольшая сторона — гипотенуза).

Бывает, что все стороны прямоугольного треугольника имеют целые длины — такие наборы целых чисел называются *пифагоровыми тройками*. Простейшая такая тройка — 3, 4, 5 (поскольку $3^2 + 4^2 = 5^2$). Эти числа очень часто встречаются в задачах. Треугольник с такими сторонами иногда называют «египетским». Полезно «знать в лицо» не только этот треугольник, но и подобные ему (со сторонами 6, 8, 10 или 9, 12, 15 и так далее). Существуют и другие пифагоровы тройки, например 5, 12, 13 или 8, 15, 17. Различных (не пропорциональных друг другу) пифагоровых троек бесконечно много.

Пример. Основания равнобедренной трапеции равны 9 и 19, боковая сторона 13. Найдите высоту трапеции.

Решение. Прямых углов в условии задачи нет, но их несложно построить. Пусть $ABCD$ — данная трапеция, $AD = 19$, $BC = 9$ и $AB = CD = 13$. Опустим из вершин B и C высоты BB_1 и CC_1 .



Прямоугольные треугольники ABB_1 и DCC_1 равны по катету и гипотенузе. Значит,

$$AB_1 = DC_1 = \frac{AD - B_1C_1}{2} = \frac{AD - BC}{2} = 5.$$

Теперь находим $BB_1 = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$.

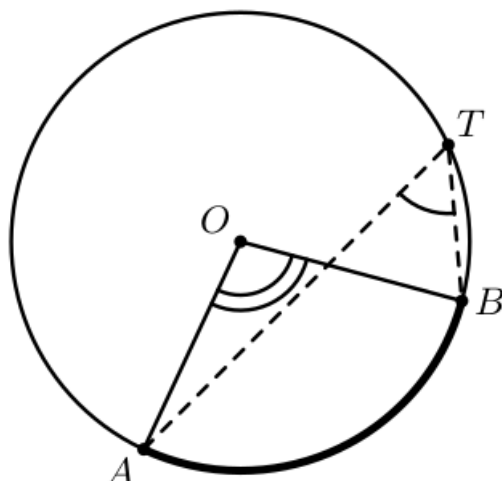
Ответ: 12.

Углы, вписанные в окружность

Теорема о вписанном угле и следствия из неё играют значительную роль в геометрии окружности.

Пусть на окружности с центром O выбраны точки A и B . Они делят окружность на части, каждая из которых называется *дугой* окружности. Дуга напрямую связана со своим *центральный углом* AOB , который может быть не только меньше развёрнутого, но также больше, либо равен ему. *Величина дуги* равна величине её центрального угла. *Длина дуги* пропорциональна её величине и равна αR , где R — радиус окружности, а α — величина дуги, выраженная в радианах.

Если на окружности выбрать ещё точку T , то про угол ATB говорят, что это *вписанный угол, опирающийся на дугу AB* (на ту из двух дуг AB , которая лежит внутри угла). Основное свойство вписанных углов описывается следующей теоремой.

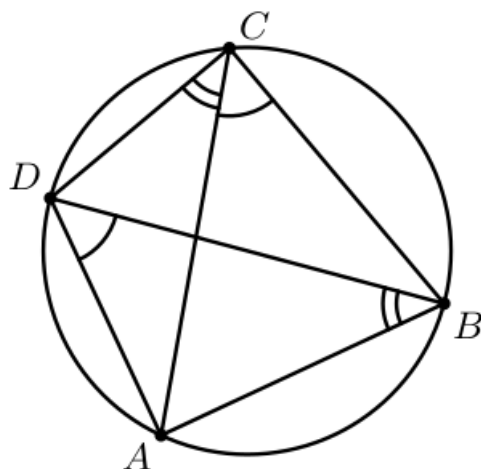


Теорема. Величина вписанного угла равна половине величины дуги, на которую этот угол опирается: $\angle ATB = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB} = \frac{1}{2}\angle AOB$.

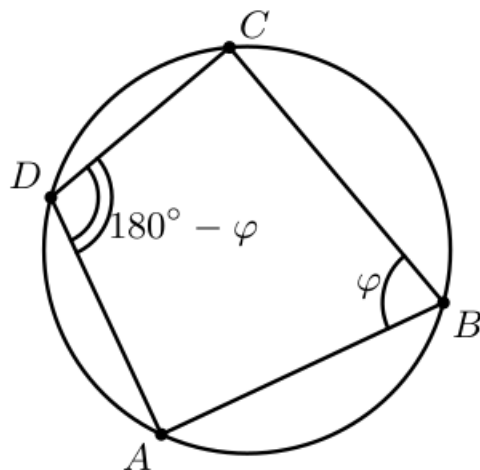
Про хорду AB говорят, что она *стягивает* дугу AB . Ясно, что если дуги равны, то равны и стягивающие их хорды. А обратное, вообще говоря, неверно, поскольку одна и та же хорда стягивает две различные дуги. Поэтому, чтобы избежать неоднозначности, о вписанном угле принято говорить именно «опирается на дугу» AB (указывая, на какую из двух), а не «опирается на хорду» AB .

Важно знать и основные следствия из теоремы о вписанном угле.

Все углы, вписанные в данную окружность и опирающиеся на одну дугу, равны. Так, для вписанного четырёхугольника $ABCD$ справедливы равенства $\angle ADB = \angle ACB$, $\angle DCA = \angle DBA$ и так далее. Можно показать, что если в выпуклом четырёхугольнике выполняется любое из таких равенств, то этот четырёхугольник можно вписать в окружность.

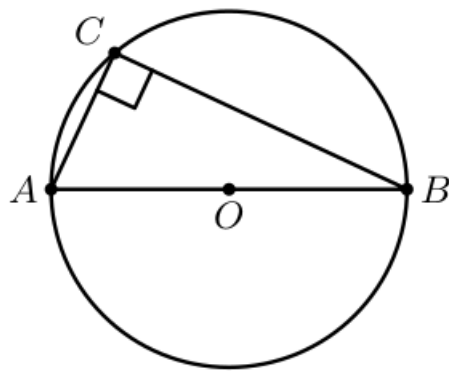


Сумма противоположных углов вписанного четырёхугольника равна 180° . И наоборот, если для выпуклого четырёхугольника выполняется это свойство, то этот четырёхугольник можно вписать в окружность.

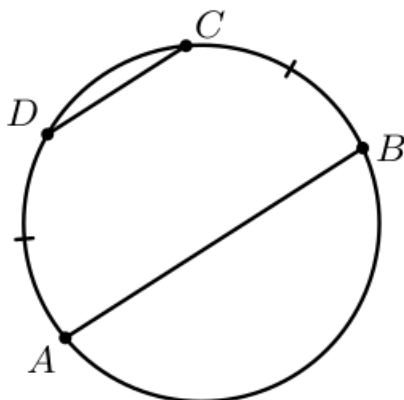


Следовательно, среди параллелограммов вписанными в окружность являются только прямоугольники, а среди трапеций — равнобедренные трапеции.

Угол, опирающийся на диаметр, прямой.

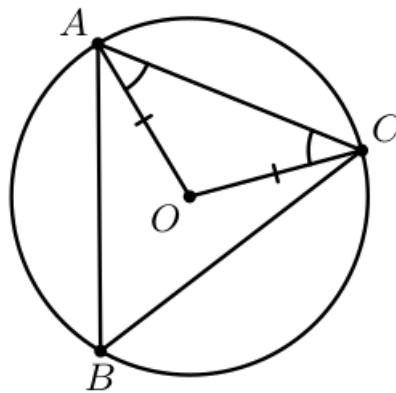


Дуги, заключённые между параллельными хордами, равны.



Пример. Точка O — центр окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC . Найдите $\angle ABC$, если $\angle OCA = 37^\circ$. Ответ дайте в градусах.

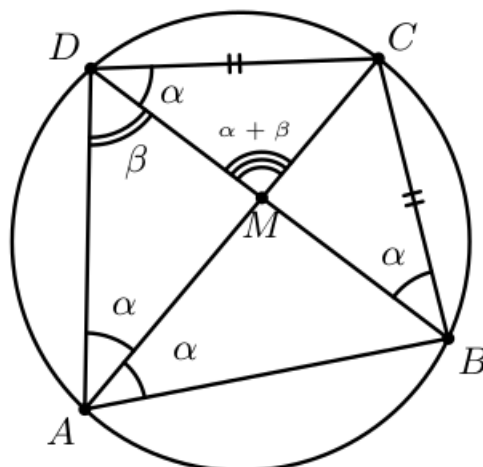
Решение. Если провести радиус OA , то образуется равнобедренный треугольник AOC , углы при основании которого равны по 37° , а тогда $\angle AOC = 180^\circ - 2 \cdot 37^\circ = 106^\circ$. Это центральный угол для дуги CA , то есть сама дуга также равна 106° , а опирающийся на неё вписанный угол $\angle ABC = \frac{1}{2} \cdot 106^\circ = 53^\circ$.



Ответ: 53.

Пример. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, причём $BC = CD$. Известно, что $\angle ADC = 93^\circ$. Найдите, под каким острым углом пересекаются диагонали этого четырёхугольника. Ответ дайте в градусах.

Решение. Обозначим точку пересечения диагоналей через M . Из равенства сторон следует равенство дуг BC и CD , а тогда равны и опирающиеся на них углы, поэтому мы можем обозначить $\angle CBD = \angle CAD = \angle BAC = \angle BDC = \alpha$. Пусть также $\angle ADB = \beta$, тогда по условию $\alpha + \beta = 93^\circ$. Нас интересует, например, угол CMD , он по теореме о внешнем угле, применённой к треугольнику ADM , равен $\angle MAD + \angle ADM = \alpha + \beta = 93^\circ$. Но это тупой угол, а в задаче требуется найти острый, то есть ответом будет смежный с ним угол $\angle DMA = 180^\circ - 93^\circ = 87^\circ$.

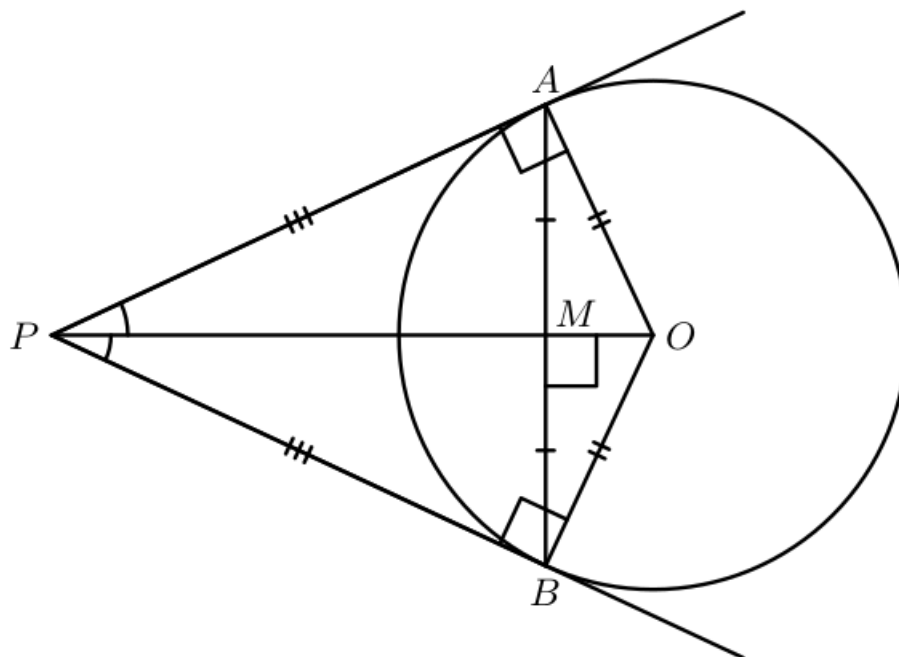


Ответ: 87.

Касательная к окружности

Прямая называется *касательной к окружности*, если она имеет с ней ровно одну общую точку (точку касания). Радиус окружности, проведённый в эту точку, перпендикулярен касательной. Если прямая пересекает окружность в двух точках, она называется *секущей*.

Из точки P , лежащей вне окружности с центром O , можно провести к ней две касательные: PA и PB (A и B — точки касания). При этом образуется характерная конструкция, изображённая на рисунке (говорят, что окружность с центром O *вписана в угол* APB).



Полезно помнить свойства этой конфигурации:

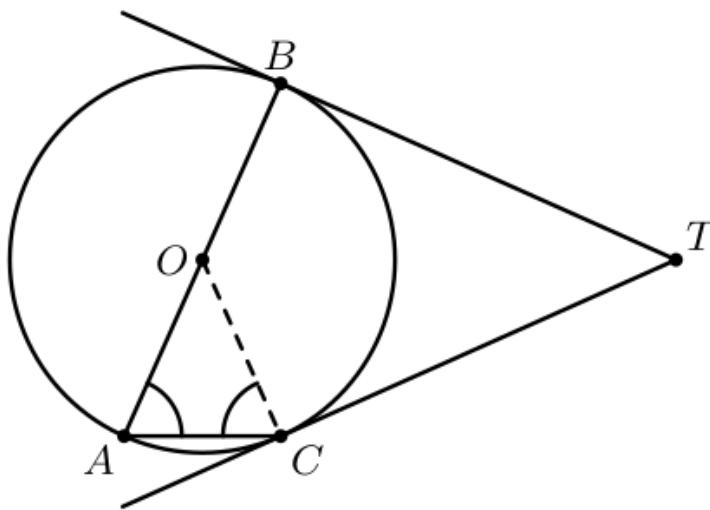
- $OA = OB$ (радиусы окружности равны);
- $PA = PB$ (отрезки касательных равны);
- $\angle PAO = \angle PBO = 90^\circ$ (касательная перпендикулярна радиусу);
- PO — биссектриса угла APB и ось симметрии всего чертежа;
- $\angle APB + \angle AOB = 180^\circ$;
- прямая PO перпендикулярна хорде AB и делит её пополам.

Пример. В окружности провели диаметр AB , а TB и TC — касательные к этой окружности. Найдите $\angle CTB$, если $\angle CAB = 66^\circ$. Ответ дайте в градусах.

Решение. Угол COB — центральный и опирается на ту же дугу, что и вписанный угол CAB . Следовательно,

$$\angle COB = 2 \cdot \angle CAB = 132^\circ.$$

Тогда $\angle CTB = 180^\circ - 132^\circ = 48^\circ$.



Ответ: 48.

Говорят, что *окружность вписана в многоугольник*, если она касается всех его сторон. Такая окружность единственна, но существует не всегда, а только тогда, когда многоугольник выпуклый и биссектрисы всех его углов пересекаются в одной точке.

В любой треугольник можно вписать окружность. Окружность можно вписать также в любой правильный многоугольник. В четырёхугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда он выпуклый и *суммы пар его противоположных сторон равны*. Так, например, из всех параллелограммов окружность можно вписать только в ромб.

Для любого многоугольника, в который вписана окружность, справедлива простая формула, связывающая её радиус с площадью: $S = pr$ (напомним, что p — полупериметр). С её помощью можно найти радиус вписанной окружности. Есть специальная удобная формула для прямоугольного треугольника: $r = \frac{a + b - c}{2}$ (a и b — катеты, c — гипотенуза).

Пример. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник со сторонами 5, 5 и 6.

Решение. Высота треугольника равна $\sqrt{5^2 - 3^2} = 4$, поэтому его площадь равна $S = \frac{4 \cdot 6}{2} = 12$. Теперь находим $p = \frac{5 + 5 + 6}{2} = 8$ и, наконец, $r = \frac{S}{p} = \frac{12}{8} = 1,5$.

Ответ: 1,5.

Задания на нахождение площадей

Площадь — важная числовая характеристика геометрической фигуры, ключевым свойством которой является аддитивность — площадь фигуры равна сумме площадей частей, на которые фигура разделена. Площадь измеряется в квадратных единицах длины, площади подобных фигур относятся как квадрат коэффициента подобия. Фигуры, имеющие равные площади, называют *равновеликими*.

Задачи на нахождение площадей многоугольников, равно как и задачи с использованием площадей, встречаются довольно часто. В простейших случаях для решения достаточно применения формул. Напомним их.

- *Площадь прямоугольника* равна произведению его смежных сторон: $S = ab$.
- *Площадь параллелограмма* равна произведению стороны на высоту, опущенную на эту сторону: $S = ah_a$.
- *Площадь ромба* может быть найдена как площадь любого параллелограмма, но также равна половине произведения его диагоналей: $S = \frac{1}{2}d_1d_2$.
- *Площадь треугольника* обычно вычисляется как половина произведения стороны на соответствующую высоту:

$$S = \frac{1}{2}ah_a.$$

Могут оказаться полезными и другие формулы.

$$S = \frac{1}{2}ab \sin C, \quad S = \frac{abc}{4R}$$

(R — радиус описанной окружности),

$$S = pr$$

(p — полупериметр, r — радиус вписанной окружности),

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Последняя формула называется *формулой Герона*.

- *Площадь трапеции* равна произведению её высоты на полусумму оснований: $S = \frac{a+b}{2}h$.

Этих сведений вполне достаточно для решения несложных задач.

Пример. На стороны AD и CD параллелограмма $ABCD$ опущены перпендикуляры BP и BQ соответственно. Найдите BQ , если $BP = 6$, $CD = 12$ и $BC = 10$.

Решение. Площадь параллелограмма $ABCD$, с одной стороны, равна $BP \cdot AD = 60$, с другой стороны, $BQ \cdot DC = BQ \cdot 12$. Отсюда $BQ = 5$.

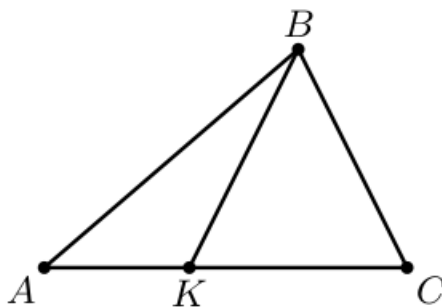
Ответ: 5.

Рассуждения такого рода, когда результат достигается сравнением площади одной и той же фигуры, вычисленной двумя способами, иногда называют *методом площадей*.

Многие на первый взгляд сложные задачи очень просто решаются с помощью соображений, связанных с отношением площадей. Укажем два важных факта.

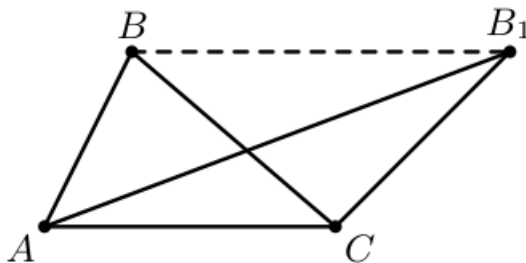
Площади двух треугольников **с одинаковой высотой** относятся как их основания. В частности, если на стороне AC треугольника ABC взять любую точку K , то

$$\frac{S_{\triangle AKB}}{S_{\triangle CKB}} = \frac{AK}{KC}.$$



Из этого следует, например, что медиана делит треугольник на две равновеликие части.

Площади двух треугольников с **одинаковым основанием** относятся как их **высоты**. В частности, если вершину B треугольника ABC передвинуть параллельно AC в точку B_1 , то площадь треугольника не изменится: $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AB_1C}$.



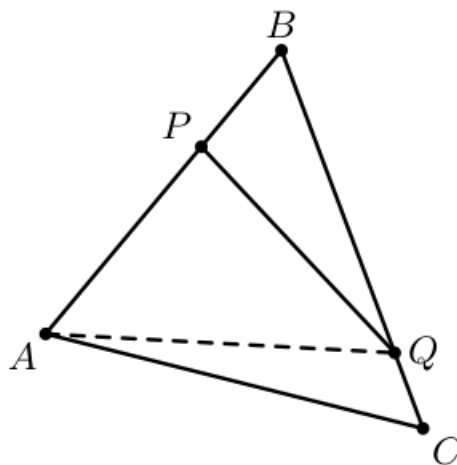
Пример. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны соответственно точки P и Q так, что $BP : PA = 1 : 2$ и $BQ : QC = 4 : 1$. Найдите отношение площади четырёхугольника $ACQP$ к площади треугольника PBQ .

Решение. Проведём отрезок AQ . Так как $BQ : QC = 4 : 1$, получаем, что $\frac{S_{\triangle ABQ}}{S_{\triangle ACQ}} = \frac{4}{1}$, то есть $S_{\triangle ABQ} = \frac{4}{5}S$, где S — площадь треугольника ABC . Аналогично

$$S_{\triangle BQP} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABQ} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5}S = \frac{4}{15}S.$$

Значит,

$$S_{\triangle APQC} = \frac{11}{15}S.$$



Ответ: $\frac{11}{4} = 2,75$.

Замечание. Заметим, что в этой задаче нам не пришлось находить сами площади, достаточно было только найти их отношение.

Примеры решения заданий 17

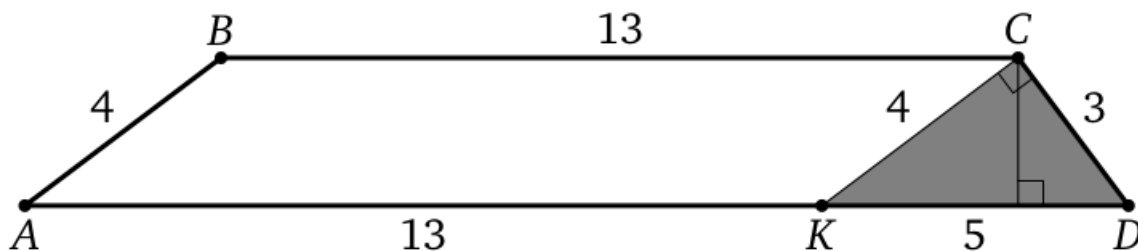
Перейдём к подготовке к заданию 17 профильного ЕГЭ по математике.

Для начала разберём несколько несложных задач, в решениях которых используются полезные методы.

Пример. Найдите площадь трапеции с основаниями 18 и 13 и боковыми сторонами 3 и 4.

Решение. Через вершину C меньшего основания BC трапеции $ABCD$ ($BC = 13$, $AD = 18$, $AB = 4$, $CD = 3$) проведём прямую, параллельную боковой стороне AB , до пересечения с основанием AD в точке K . Тогда

$$CK = AB = 4, \quad DK = AD - AK = AD - BC = 18 - 13 = 5, \quad CD = 3.$$



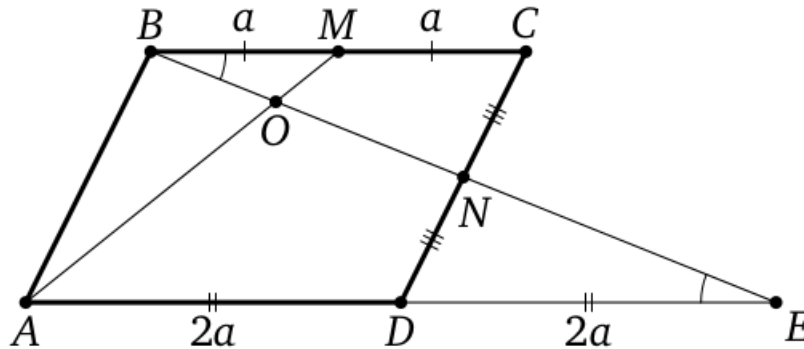
Поскольку $KD^2 = CD^2 + CK^2$, треугольник KCD — прямоугольный. Его высота, опущенная на гипотенузу, равна $\frac{3 \cdot 4}{5} = \frac{12}{5}$. Следовательно,

$$S_{ABCD} = \frac{18 + 13}{2} \cdot \frac{12}{5} = 37,2.$$

Ответ: 37,2.

Пример. Точки M и N — середины сторон BC и CD соответственно параллелограмма $ABCD$. Отрезки AM и BN пересекаются в точке O . Найдите отношение $\frac{MO}{OA}$.

Решение. Пусть продолжения отрезков BN и AD пересекаются в точке E . Обозначим $BM = CM = a$. Тогда $AD = BC = 2a$.



Треугольники DNE и CNB равны, поэтому $DE = BC = 2a$. Значит, $AE = AD + DE = 2a + 2a = 4a$.

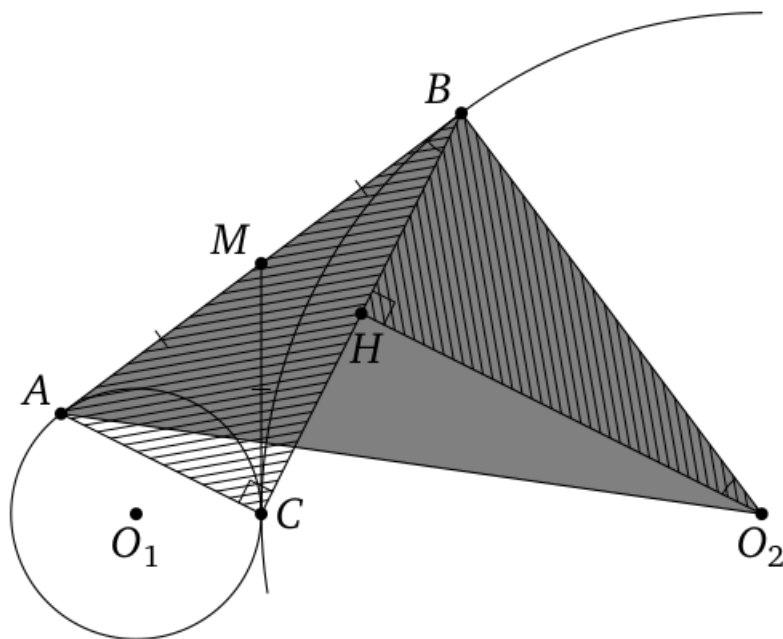
Треугольник BOM подобен треугольнику EOA , следовательно,

$$\frac{MO}{OA} = \frac{BM}{AE} = \frac{a}{4a} = \frac{1}{4}.$$

Ответ: $\frac{1}{4}$.

Пример. Окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке C . Прямая касается этих окружностей в различных точках A и B соответственно. Найдите угол AO_2B , если известно, что $\operatorname{tg} \angle ABC = \frac{1}{2}$. Ответ дайте в градусах.

Решение. Пусть M — точка пересечения отрезка AB с общей касательной к данным окружностям, проведённой через их точку касания C . Тогда $MA = MC = MB$, значит, $\angle ACB = 90^\circ$.



Опустим перпендикуляр O_2H из центра O_2 второй окружности на её хорду BC . Тогда H — середина BC . Из условия задачи следует, что $AC = \frac{1}{2}BC = BH$, а так как $\angle BO_2H = 90^\circ - \angle O_2BH = \angle ABC$, прямоугольные треугольники BO_2H и ABC равны по катету и противолежащему острому углу. Значит, $O_2B = AB$. Следовательно, $\angle AO_2B = \angle BAO_2 = 45^\circ$.

Ответ: 45.

Теперь перейдём к решению более сложных задач.

Пример. В трапеции $ABCD$ точка E — середина основания AD , точка M — середина боковой стороны AB . Отрезки CE и DM пересекаются в точке O .

а) Докажите, что площади четырёхугольника $AMOE$ и треугольника COD равны.

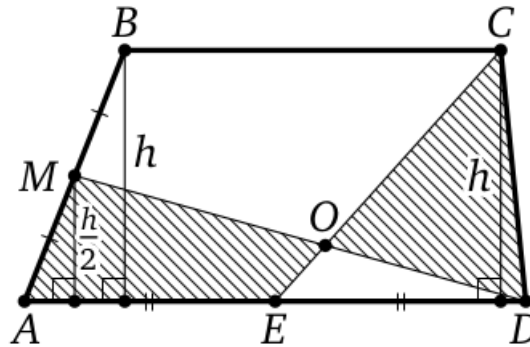
б) Найдите, какую часть от площади трапеции составляет площадь четырёхугольника $AMOE$, если $BC = 3$, $AD = 4$.

Решение.

а) Пусть высота трапеции равна h . Тогда высота треугольника AMD равна $\frac{h}{2}$. Значит,

$$S_{\triangle CED} = \frac{1}{2}DE \cdot h = \frac{1}{4}AD \cdot h,$$

$$S_{\triangle AMD} = \frac{1}{2}AD \cdot \frac{h}{2} = \frac{1}{4}AD \cdot h.$$

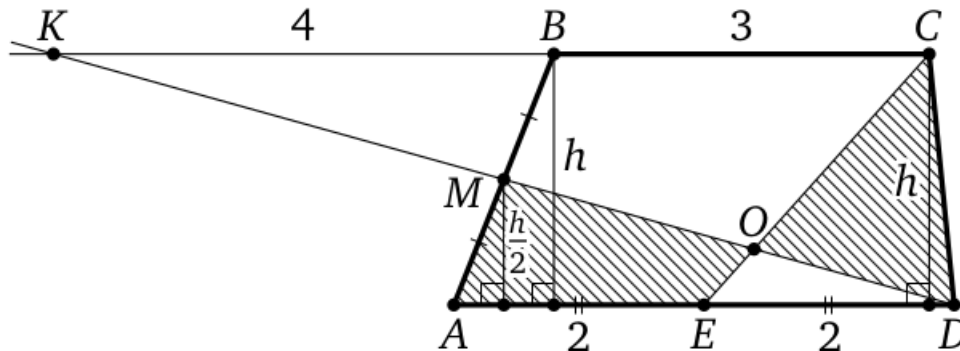


Следовательно, треугольники CED и AMD равновелики, а так как треугольник DOE — их общая часть, четырёхугольник $AMOE$ и треугольник COD также равновелики.

б) Пусть прямые DM и BC пересекаются в точке K . Треугольники BMK и AMD равны по стороне и двум прилежащим к ней углам, поэтому

$$BK = AD = 4, \quad CK = BC + BK = 3 + 4 = 7.$$

Треугольник COK подобен треугольнику EOD , поэтому $\frac{CO}{OE} = \frac{CK}{DE} = \frac{7}{2}$.



Пусть площадь трапеции равна S . Тогда

$$S = \frac{AD + BC}{2} \cdot h = \frac{7}{2}h, \quad S_{\triangle CED} = \frac{1}{2}DE \cdot h = h,$$

значит, $S_{\triangle CED} = \frac{2}{7}S$, а так как $\frac{CO}{OE} = \frac{7}{2}$, получаем $CO = \frac{7}{9}CE$. Следовательно,

$$S_{AMOE} = S_{\triangle COD} = \frac{7}{9}S_{\triangle CED} = \frac{7}{9} \cdot \frac{2}{7}S = \frac{2}{9}S.$$

Ответ: $\frac{2}{9}$.

Пример. В остроугольном треугольнике ABC провели высоты AK и CM , а из точек M и K опустили перпендикуляры ME и KH на прямые AK и CM соответственно.

- а) Докажите, что прямые EH и AC параллельны.
 б) Найдите отношение $EH : AC$, если $\angle ABC = 30^\circ$.

Решение.

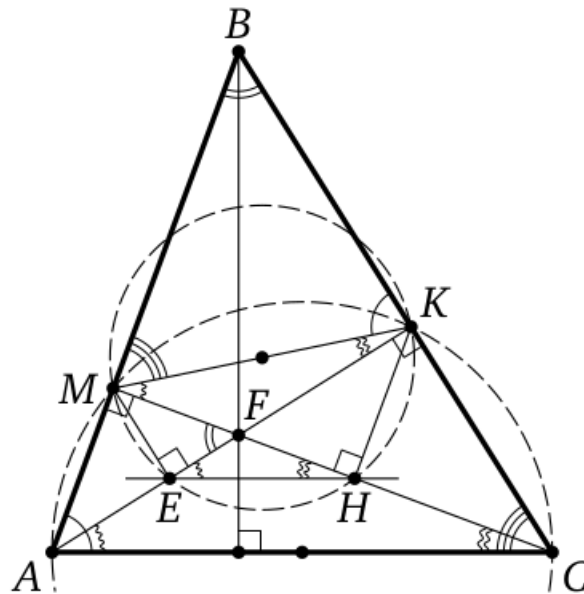
а) Из точек M и K отрезок AC виден под прямым углом, значит, эти точки лежат на окружности с диаметром AC . Вписанные в эту окружность углы ACM и AKM опираются на одну и ту же дугу, поэтому

$$\angle ACM = \angle AKM.$$

Из точек E и H отрезок MK виден под прямым углом, значит, эти точки лежат на окружности с диаметром MK . Вписанные в эту окружность углы MHE и MKE опираются на одну и ту же дугу, поэтому

$$\angle EHM = \angle EKM = \angle AKM.$$

Значит, $\angle EHM = \angle ACM$. Следовательно, прямые EH и AC параллельны.



- б) Треугольник BKM подобен треугольнику BAC по двум углам, причём коэффициент подобия равен

$$\frac{BK}{AB} = \cos \angle ABC = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Значит,

$$MK = AC \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AC\sqrt{3}}{2}.$$

Пусть F — точка пересечения высот треугольника ABC . Тогда

$$\angle EFM = \angle AFM = 90^\circ - \angle BAK = \angle ABC = 30^\circ.$$

Треугольник EFH подобен треугольнику MFK по двум углам, причём коэффициент подобия равен

$$\frac{EF}{MF} = \cos \angle EFM = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Значит,

$$EH = \frac{MK\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4}AC.$$

Следовательно, $\frac{EH}{AC} = \frac{3}{4}$.

Ответ: 3 : 4.