

Решаем задачи по геометрии: пропорциональные отрезки

Теорема 1 (*теорема Фалеса*). Параллельные прямые отсекают на пересекающих их прямых пропорциональные отрезки (рис. 1).

$$\frac{OA}{OD} = \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}.$$

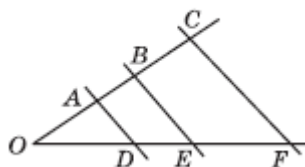


Рис. 1

Определение 1. Два треугольника (рис. 2) называются подобными, если соответствующие стороны у них пропорциональны.

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}.$$

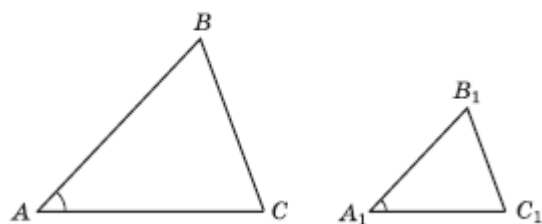


Рис. 2

Теорема 2 (*первый признак подобия*). Если угол первого треугольника равен углу второго треугольника, а прилежащие к этим углам стороны треугольников пропорциональны, то такие треугольники подобны (см. рис. 2).

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$

Теорема 3 (*второй признак подобия*). Если два угла одного треугольника равны соответственно двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны (рис. 3).

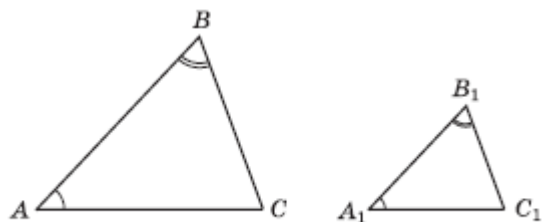


Рис. 3

Теорема 4 (*теорема Менелая*). Если некоторая прямая пересекает стороны AB и BC треугольника ABC в точках X и Y соответственно, а продолжение стороны AC — в точке Z (рис. 4), то

$$\frac{AX}{XB} \cdot \frac{BY}{YC} \cdot \frac{CZ}{ZA} = 1.$$

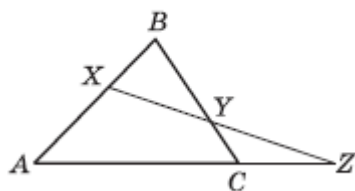


Рис. 4

Теорема 5. Пусть в остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1 (рис. 5). Тогда треугольники A_1BC_1 и ABC подобны, причем коэффициент подобия равен $\cos \angle B$.

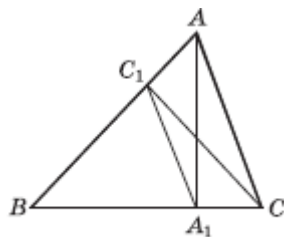


Рис. 5

Лемма 1. Если стороны AC и DF треугольников ABC и DEF лежат на одной прямой или на параллельных прямых (рис. 6), то

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle DEF}} = \frac{AC}{DF}.$$

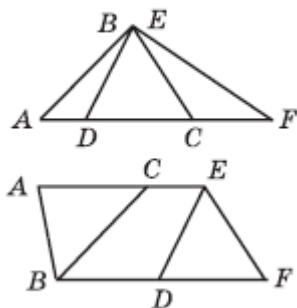


Рис. 6

Лемма 2. Если два треугольника имеют общую сторону AC (рис. 7), то

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AB_1C}} = \frac{BD}{B_1D}.$$

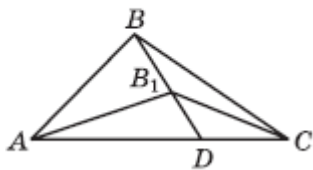


Рис. 7

Лемма 3. Если треугольники ABC и AB_1C_1 имеют общий угол A , то

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AB_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{AB_1 \cdot AC_1}.$$

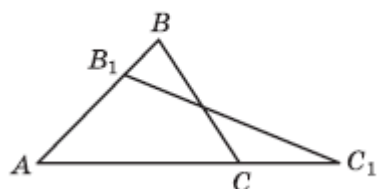


Рис. 8

Лемма 4. Площади подобных треугольников относятся как квадрат коэффициента подобия.

Доказательства некоторых теорем

Доказательство теоремы 4. Проведем через точку С прямую, параллельную прямой АВ, до пересечения с прямой ХЗ в точке К (рис. 9). Надо доказать, что

$$\frac{AX}{XB} \cdot \frac{BY}{YC} \cdot \frac{CZ}{ZA} = 1.$$

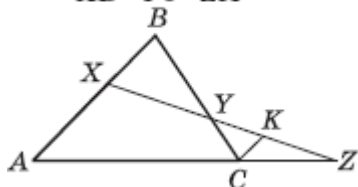


Рис. 9

Рассмотрим две пары подобных треугольников:

$$\triangle CKZ \sim \triangle AXZ \Rightarrow \frac{CZ}{ZA} = \frac{CK}{AX};$$

$$\triangle XBY \sim \triangle CKY \Rightarrow \frac{BY}{YC} = \frac{XB}{CK}.$$

Перемножив почленно эти равенства, получим:

$$\frac{CZ}{ZA} \cdot \frac{BY}{YC} = \frac{XB}{AX} \Leftrightarrow \frac{AX}{XB} \cdot \frac{BY}{YC} \cdot \frac{CZ}{ZA} = 1,$$

что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 5. Докажем подобие треугольников A_1BC_1 и ABC при помощи первого признака подобия. Так как эти два треугольника имеют общий угол B , достаточно доказать, что

$$\frac{BA_1}{BA} = \frac{BC_1}{BC}.$$

Но это следует из того, что $\frac{BA_1}{BA} = \cos \angle B$ из прямоугольного треугольника ABA_1 , а $\frac{BC_1}{BC} = \cos \angle B$ из прямоугольного треугольника CBC_1 . Попутно доказана и вторая часть теоремы.

Задача 1. Дана трапеция ABCD, причем известно, что $BC = a$ и $AD = b$. Параллельно ее основаниям BC и AD проведена прямая, пересекающая сторону AB в точке P, диагональ AC в точке L, диагональ BD в точке R и сторону CD в точке Q (рис. 10). Известно, что $PL = LR$. Найти PQ.

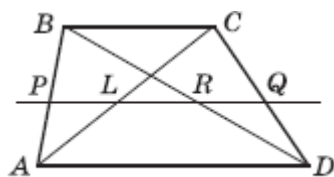


Рис. 10

Решение. Докажем сначала, что $PL = RQ$. Рассмотрим две пары подобных треугольников:

$$\triangle APL \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{PL}{BC} = \frac{AP}{AB};$$

$$\triangle DQR \sim \triangle DCB \Rightarrow \frac{RQ}{BC} = \frac{DQ}{DC}.$$

Согласно теореме Фалеса имеем:

$$\frac{AP}{AB} = \frac{DQ}{DC} \Rightarrow \frac{PL}{BC} = \frac{RQ}{BC} \Leftrightarrow PL = RQ.$$

Обозначим теперь $PL = LR = RQ = x$ и рассмотрим снова две пары подобных треугольников:

$$\triangle APL \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{PL}{BC} = \frac{AP}{AB} \Leftrightarrow \frac{x}{a} = \frac{AP}{AB};$$

$$\triangle PBR \sim \triangle ABD \Rightarrow \frac{PR}{AD} = \frac{PB}{AB} \Leftrightarrow \frac{2x}{b} = \frac{PB}{AB}.$$

Имеем далее:

$$\frac{AP}{AB} + \frac{PB}{AB} = 1 \Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{2x}{b} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{ab}{2a+b}.$$

$$\text{Значит, } PQ = \frac{3ab}{2a+b}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{3ab}{2a+b}.$$

Задача 2. В треугольнике ABC угол A равен 45° , а угол C — острый. Из середины N стороны BC опущен перпендикуляр NM на сторону AC (рис. 11). Площади треугольников NMC и ABC относятся соответственно как 1 : 8. Найти углы треугольника ABC.

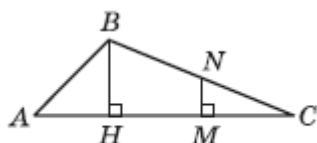


Рис. 11

Решение. Пусть BH — высота, опущенная из вершины B на сторону AC.

Так как NM — средняя линия треугольника BHC, то $S_{\triangle BHC} = 4S_{\triangle NMC}$.

Но, согласно условию задачи, $S_{\triangle ABC} = 8S_{\triangle NMC}$.

Следовательно, $S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle BHC}$, поэтому $S_{\triangle ABH} = S_{\triangle BHC}$. Значит, $AH = HC$,

откуда $\angle CAB = \angle ACB = 45^\circ$, $\angle ABC = 90^\circ$.

Ответ: $\angle CAB = \angle ACB = 45^\circ$, $\angle ABC = 90^\circ$.

Задача 3. Дан треугольник ABC, в котором угол B равен 30° , $AB = 4$ и $BC = 6$. Биссектриса угла B пересекает сторону AC в точке D (рис. 12). Определить площадь треугольника ABD.



Рис. 12

Решение. Применим к треугольнику ABC теорему о биссектрисе внутреннего угла:

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{2}{5}.$$

$$\text{Значит, } S_{\triangle ABD} = \frac{2}{5} \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin \angle ABC = \frac{12}{5}.$$

Ответ: $\frac{12}{5}$.

Статья опубликована при поддержке компании "Мир цветов". Оптово-розничный склад свадебных и ритуальных товаров, искусственных цветов в Краснодаре. Свадебные аксессуары - свечи, плакаты, бокалы, ленты, приглашения и многое другое. Ритуальные товары - ткани, одежда, фурнитура. Узнать подробнее о компании, посмотреть каталог товаров, цены и контакты Вы сможете на сайте, который располагается по адресу: flowersworld.ru.

Задача 4. Через середину M стороны BC параллелограмма ABCD, площадь которого равна 1, и вершину A проведена прямая, пересекающая диагональ BD в точке O (рис. 13). Найти площадь четырехугольника OMCD.

Решение. Площадь четырехугольника OMCD будем искать как разность площадей треугольников BCD и BOM. Площадь треугольника BCD равна половине площади параллелограмма ABCD и равна $\frac{1}{2}$. Найдем площадь треугольника BOM. Имеем:

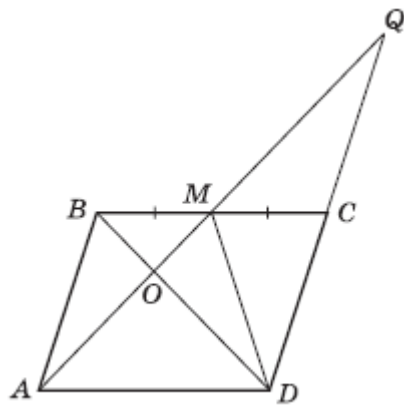


Рис. 13

$$\triangle BOM \sim \triangle AOD \Rightarrow \frac{BO}{OD} = \frac{BM}{AD} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{BO}{BD} = \frac{1}{3}.$$

Далее:

$$\frac{S_{\Delta BOM}}{S_{\Delta BCD}} = \frac{BM}{BC} \cdot \frac{BO}{BD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \Rightarrow S_{\Delta BOM} = \frac{1}{12}.$$

$$\text{Значит, } S_{OMCD} = S_{\Delta BCD} - S_{\Delta BOM} = \frac{5}{12}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{5}{12}.$$

Задача 5. В прямоугольный равнобедренный треугольник ABC с прямым углом при вершине B вписан прямоугольный треугольник MNC так, что угол MNC прямой, точка N лежит на AC, а точка M на стороне AB (рис. 14). В каком отношении точка N должна делить гипотенузу AC, чтобы площадь треугольника MNC составляла $\frac{3}{8}$ от площади треугольника ABC?

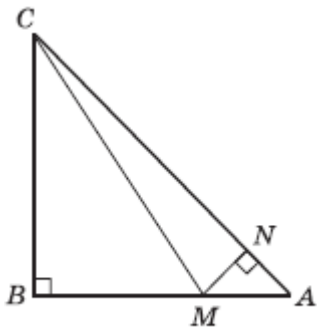


Рис. 14

Решение. Можно считать, что $AB = 1$. Обозначим $AM = x$, $0 < x < 1$, тогда $BM = 1 - x$,

$$MN = AN = \frac{x}{\sqrt{2}}, \quad CN = \sqrt{2} - \frac{x}{\sqrt{2}}.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} S_{\Delta MNC} &= \frac{3}{8} \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{3}{16} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot MN \cdot NC = \frac{3}{16} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{3}{8} &= x - \frac{x^2}{2} \quad \text{так как } x \in (0; 1) \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow AN = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow NC = \frac{3}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{AN}{NC} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \frac{AN}{NC} = \frac{1}{3}.$$

Задача 6. В трапеции ABCD диагональ AC перпендикулярна боковой стороне CD, а диагональ DB перпендикулярна боковой стороне AB. Продолжения боковых сторон AB и DC пересекаются в точке K, образуя треугольник AKD с углом 45° при вершине K (рис. 15). Площадь трапеции ABCD равна S. Найти площадь треугольника AKD.

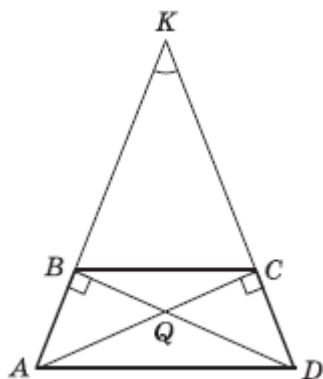


Рис. 15

Решение. Согласно теореме 5, треугольник ВКС подобен треугольнику АКД с коэффициентом подобия $k = \cos \angle K = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Следовательно, площади этих треугольников относятся как 1 : 2, а это значит, что площадь трапеции ABCD равна площади треугольника ВКС. Поэтому площадь треугольника АКД равна 2S.

Ответ: 2S.

Задача 7. В треугольнике ABC на стороне AB взята точка K так, что $AK : KB = 1 : 2$, а на стороне BC взята точка L так, что $CL : LB = 2 : 1$. Пусть Q — точка пересечения прямых AL и CK (рис. 16). Найти площадь треугольника ABC, зная, что площадь треугольника BQC равна 1.

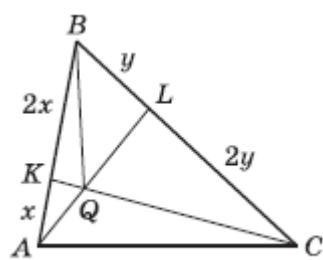


Рис. 16

Решение. Пусть $AK = x$, $BL = y$. Тогда $KB = 2x$,

$LC = 2y$, значит, $AB = 3x$ и $BC = 3y$. Применим к треугольнику ABL и секущей KQ теорему Менелая:

$$\frac{BK}{KA} \cdot \frac{AQ}{QL} \cdot \frac{LC}{CB} = 1 \Leftrightarrow \frac{AQ}{QL} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{AL}{QL} = \frac{7}{4}.$$

Далее применим к треугольникам ABC и QBC лемму о площадях, получим:

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle QBC}} = \frac{AL}{QL} = \frac{7}{4} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{7}{4}.$$

Ответ: $\frac{7}{4}$.

Задача 8. Из точки M, которая расположена внутри остроугольного треугольника ABC, опущены перпендикуляры на стороны (рис. 17). Длины сторон и опущенных на них перпендикуляров соответственно равны a и k, b и m, c и n. Вычислить отношение площади треугольника ABC к площади треугольника, вершинами которого служат основания перпендикуляров.

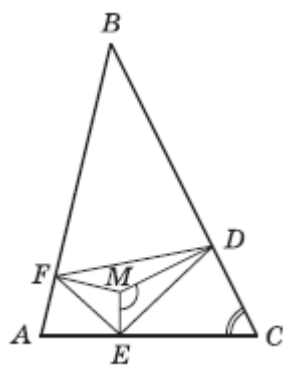


Рис. 17

Решение. Введем стандартные обозначения, то есть обозначим длины сторон треугольника ABC: $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$; величины углов: $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$. Основания перпендикуляров, опущенных из точки M на стороны BC, CA и AB, обозначим соответственно через D, E и F. Тогда, согласно условию задачи, $MD = k$, $ME = m$, $MF = n$. Очевидно, что угол EMF равен $\pi - \alpha$, угол DMF равен $\pi - \beta$, угол DME равен $\pi - \gamma$ и точка M расположена внутри треугольника DEF. Площадь треугольника DEF равна:

$$\begin{aligned} S_{\triangle DEF} &= S_{\triangle EFM} + S_{\triangle DFM} + S_{\triangle DEM} = \\ &= \frac{1}{2} mn \sin(\pi - \alpha) + \frac{1}{2} nk \sin(\pi - \beta) + \frac{1}{2} km \sin(\pi - \gamma) = \\ &= \frac{1}{2} mn \sin \alpha + \frac{1}{2} nk \sin \beta + \frac{1}{2} km \sin \gamma. \end{aligned}$$

Площадь треугольника ABC равна:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \sin \alpha = \frac{1}{2} ac \sin \beta = \frac{1}{2} ab \sin \gamma.$$

Найдем отношение площадей треугольников DEF и ABC:

$$\begin{aligned} \frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABC}} &= \frac{\frac{1}{2} mn \sin \alpha}{S_{\triangle ABC}} + \frac{\frac{1}{2} nk \sin \beta}{S_{\triangle ABC}} + \frac{\frac{1}{2} km \sin \gamma}{S_{\triangle ABC}} = \\ &= \frac{\frac{1}{2} mn \sin \alpha}{\frac{1}{2} bc \sin \alpha} + \frac{\frac{1}{2} nk \sin \beta}{\frac{1}{2} ac \sin \beta} + \frac{\frac{1}{2} km \sin \gamma}{\frac{1}{2} ab \sin \gamma} = \frac{mna + nkb + mkc}{abc}. \end{aligned}$$

Следовательно, $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle DEF}} = \frac{abc}{mna + nkb + mkc}$.

Ответ: $\frac{abc}{mna + nkb + mkc}$.

Задача 9. Точки P и Q расположены на стороне BC треугольника ABC так, что $BP : PQ : QC = 1 : 2 : 3$.

Точка R делит сторону AC этого треугольника таким образом, что $AR : RC = 1 : 2$ (рис. 18). Чему равно отношение площади четырехугольника PQST к площади треугольника ABC, где S и T — точки пересечения прямой BR с прямыми AQ и AP соответственно?

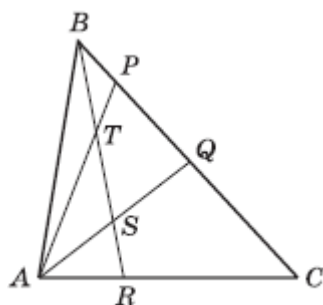


Рис. 18

Решение. Обозначим $BP = x$, $AR = y$; тогда

$PQ = 2x$, $QC = 3x$, $RC = 2y$. Вычислим, какую часть площадь четырехугольника PQST составляет от площади треугольника APQ, а значит, и от площади треугольника ABC. Для этого нам понадобятся отношения, в которых точки S и T делят прямые AQ и AP соответственно. Применим к треугольнику ACQ и секущей SR теорему Менелая:

$$\frac{CR}{RA} \cdot \frac{AS}{SQ} \cdot \frac{QB}{BC} = 1 \Leftrightarrow \frac{AS}{SQ} = 1 \Leftrightarrow \frac{AS}{AQ} = \frac{1}{2}.$$

Аналогично, применив теорему Менелая к треугольнику ACP и секущей TR, получим:

$$\frac{CR}{RA} \cdot \frac{AT}{TP} \cdot \frac{PB}{BC} = 1 \Leftrightarrow \frac{AT}{TP} = 3 \Leftrightarrow \frac{AT}{AP} = \frac{3}{4}.$$

Далее:

$$\frac{S_{\Delta AST}}{S_{\Delta APQ}} = \frac{AS}{AQ} \cdot \frac{AT}{AP} = \frac{3}{8} \Leftrightarrow \frac{S_{PQST}}{S_{\Delta APQ}} = \frac{5}{8}.$$

С другой стороны, применив лемму о площадях к треугольникам APQ и ABC, получим, что

$$\frac{S_{\Delta APQ}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{PQ}{BC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{S_{PQST}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{S_{PQST}}{S_{\Delta APQ}} \cdot \frac{S_{\Delta APQ}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{24}.$$

Ответ: $\frac{5}{24}$.

Задача 10. В треугольнике ABC длина высоты BD равна 6, длина медианы CE равна 5, расстояние от точки пересечения BD с CE до стороны AC равно 1 (рис. 19). Найти длину стороны AB.

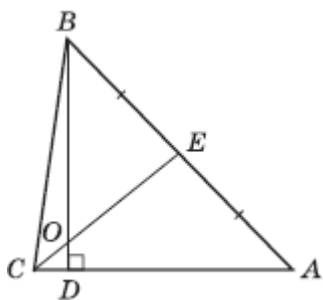


Рис. 19

Решение. Пусть точка O — точка пересечения прямых BD и CE. Расстояние от точки O до стороны AC (равное по условию единице) есть длина отрезка OD. Итак, $OD = 1$ и $OB = 5$.

Применим к треугольнику ABD и секущей OE теорему Менелая:

$$\frac{AE}{EB} \cdot \frac{BO}{OD} \cdot \frac{DC}{CA} = 1 \Leftrightarrow \frac{DC}{CA} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{AD}{DC} = 4.$$

Применив теперь теорему Менелая к треугольнику ACE и секущей OD, получим, что

$$\frac{AD}{DC} \cdot \frac{CO}{OE} \cdot \frac{EB}{BA} = 1 \Leftrightarrow \frac{CO}{OE} = \frac{1}{2},$$

откуда $OE = 2CO$, и с учетом $OE + CO = CE = 5$

получаем, что $CO = \frac{5}{3}$. К прямоугольному треугольнику CDO применим теорему

Пифагора:

$$CD = \sqrt{OC^2 - OD^2} = \sqrt{\frac{25}{9} - 1} = \frac{4}{3}.$$

Значит, $AD = 4CD = \frac{16}{3}$. Наконец, рассмотрим прямоугольный треугольник ABD, в нем также воспользуемся теоремой Пифагора: $AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = \sqrt{\frac{256}{9} + 36} = \frac{2\sqrt{145}}{3}$.

Ответ: $\frac{2\sqrt{145}}{3}$.

Задача 11. На отрезке AB лежат точки C и D, причем точка C находится между точками A и D. Точка M взята так, что прямые AM и MD перпендикулярны, и прямые CM и MB тоже перпендикулярны (рис. 20). Найти площадь треугольника AMB, если известно, что величина угла CMD равна α , а площади треугольников AMD и CMB равны S_1 и S_2 соответственно.

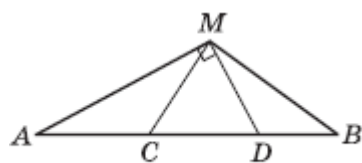


Рис. 20

Решение. Обозначим площади треугольников AMB и CMD соответственно через x и y ($x > y$). Заметим, что $x + y = S_1 + S_2$. Покажем теперь, что $xy = S_1 S_2 \sin^2 \alpha$. Действительно, $y = S_{\triangle CMD} = \frac{1}{2} CM \cdot MD \sin \alpha$.

Аналогично, $x = \frac{1}{2} AM \cdot MB \sin \alpha$,

так как $\angle AMB = \angle AMC + \angle CMD + \angle DMB = 90^\circ - \alpha + \alpha + 90^\circ - \alpha = 180^\circ - \alpha$, и $\sin \angle AMB = \sin \alpha$. Значит:

$$\begin{aligned} xy &= \frac{1}{4} (AM \cdot MB \sin \alpha)(CM \cdot MD \sin \alpha) = \\ &= \frac{1}{4} (AM \cdot MD)(CM \cdot MB) \sin^2 \alpha = S_1 S_2 \sin^2 \alpha. \end{aligned}$$

Таким образом, числа x и y являются корнями квадратного уравнения $t^2 - (S_1 + S_2)t + S_1 S_2 \sin^2 \alpha = 0$.

Больший корень этого уравнения:

$$\begin{aligned} x &= \frac{S_1 + S_2 + \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + 2S_1 S_2 - 4S_1 S_2 \sin^2 \alpha}}{2} = \\ &= \frac{S_1 + S_2 + \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + 2S_1 S_2 \cos 2\alpha}}{2}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{S_1 + S_2 + \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + 2S_1 S_2 \cos 2\alpha}}{2}$.

С-1. В треугольнике ABC, площадь которого равна S , проведена биссектриса CE и медиана BD, пересекающиеся в точке O. Найдите площадь четырехугольника ADOE, зная, что $BC = a$, $AC = b$.

С-2. В равнобедренный треугольник ABC вписан квадрат так, что две его вершины лежат на основании BC, а две другие — на боковых сторонах треугольника. Сторона квадрата относится к радиусу круга, вписанного в треугольник, как

8 : 5. Найдите углы треугольника.

С-3. В параллелограмме ABCD со сторонами $AD = 5$ и $AB = 4$ проведен отрезок EF, соединяющий точку E стороны BC с точкой F стороны CD. Точки E и F выбраны так, что $BE : EC = 1 : 2$, $CF : FE = 1 : 5$. Известно, что точка M пересечения диагонали AC с отрезком FE удовлетворяет условию $MF : ME = 1 : 4$. Найдите диагонали параллелограмма.

С-4. Площадь трапеции ABCD равна 6. Пусть E — точка пересечения продолжений боковых сторон этой трапеции. Через точку E и точку пересечения диагоналей трапеции проведена прямая, которая пересекает меньшее основание BC в точке P, большее основание AD — в точке Q. Точка F лежит на отрезке EC, причем $EF : FC = EP : EQ = 1 : 3$. Найдите площадь треугольника EPF.

С-5. В остроугольном треугольнике ABC (где $AB > BC$) проведены высоты AM и CN, точка O — центр описанной около треугольника ABC окружности. Известно, что величина угла ABC равна β , а площадь четырехугольника NOMB равна S . Найдите длину стороны AC.

С-6. В треугольнике ABC точка K на стороне AB и точка M на стороне AC расположены так, что выполняются соотношения $AK : KB = 3 : 2$ и $AM : MC = 4 : 5$. В каком отношении точка пересечения прямых KC и BM делит отрезок BM?

С-7. Внутри прямоугольного треугольника ABC (угол B прямой) взята точка D так, что площади треугольников ABD и BDC соответственно в три и четыре раза меньше площади треугольника ABC. Длины отрезков AD и DC равны соответственно a и c . Найдите длину отрезка BD.

С-8. В выпуклом четырехугольнике ABCD на стороне CD взята точка E так, что отрезок AE делит четырехугольник ABCD на ромб и равнобедренный треугольник, отношение площадей которых равно $\frac{13}{3}$. Найдите величину угла BAD.

С-9. Высота трапеции ABCD равна 7, а длины оснований AD и BC равны соответственно 8 и 6. Через точку E, лежащую на стороне CD, проведена прямая BE, которая делит диагональ AC в точке O в отношении $AO : OC = 3 : 2$. Найдите площадь треугольника OEC.

С-10. Точки K, L, M делят стороны выпуклого четырехугольника ABCD в отношении $AK : BK = CL : BL = CM : DM = 1 : 2$. Известно, что радиус описанной около треугольника KLM окружности равен $KL = 4$, $LM = 3$ и $KM < KL$. Найдите площадь четырехугольника ABCD.

С-11. Продолжения сторон AD и BC выпуклого четырехугольника ABCD пересекаются в точке M, а продолжения сторон AB и CD — в точке O. Отрезок MO перпендикулярен биссектрисе угла AOD. Найдите отношение площадей треугольников AOD и BOC, если $OA = 6$, $OD = 4$, $CD = 1$.

С-12. В треугольнике ABC угол при вершине A равен 30° , а высоты BD и CE пересекаются в точке O. Найдите отношение радиусов окружностей, описанных около треугольников DEO и ABC.

С-13. Отрезки, соединяющие основания высот остроугольного треугольника, равны 5, 12 и 13. Найдите радиус описанной около треугольника окружности.

С-14. В остроугольном треугольнике ABC на высоте AD взята точка M, а на высоте BP — точка N так, что углы BMC и ANC — прямые. Расстояние между точками M и N равно $4 + 2\sqrt{3}$, а $\angle MCN = 30^\circ$.

Найдите биссектрису CL треугольника CMN .

С-15. На сторонах AB , BC и AC треугольника ABC взяты точки D , E и F соответственно. Отрезки AE и DF проходят через центр вписанной в треугольник ABC окружности, а прямые DF и BC параллельны. Найдите длину отрезка BE и периметр треугольника ABC , если $BC = 15$, $BD = 6$, $CF = 4$.

С-16. В треугольнике ABC биссектриса BB' пересекает медиану AA' в точке O .

Найдите отношение площади треугольника BOA' к площади треугольника AOB' , если $AB : AC = 1 : 4$.

С-17. В треугольнике ABC точка D лежит на AC , причем $AD = 2DC$. Точка E лежит на BC . Площадь треугольника ABD равна 3, площадь треугольника AED равна 1. Отрезки AE и BD пересекаются в точке O . Найдите отношение площадей треугольников ABO и OED .

С-18. В параллелограмме $ABCD$ точки E и F лежат соответственно на сторонах AB и BC , M — точка пересечения прямых AF и DE , причем $AE = 2BE$, а $BF = 3CF$. Найдите отношение $AM : MF$.

С-19. В прямоугольнике $ABCD$ на сторонах

AB и AD выбраны соответственно точки E и F так, что $AE : EB = 3 : 1$, $AF : FD = 1 : 2$. Найдите $EO : OD$, где O — точка пересечения отрезков DE и CF .

С-20. На стороне PQ треугольника PQR взята точка N , а на стороне PR — точка L , причем $NQ = LR$. Точка пересечения отрезков QL и NR делит отрезок QL в отношении $m : n$, считая от точки Q . Найдите отношение $PN : PR$.

С-21. На сторонах острого угла с вершиной O взяты точки A и B . На луче OB взята точка M на расстоянии $3OA$ от прямой OA , а на луче OA — точка N на расстоянии $3OB$ от прямой OB . Радиус окружности, описанной около треугольника AOB , равен 3. Найдите MN .

С-22. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ диагонали BE и CE являются биссектрисами углов при вершинах B и C соответственно, $\angle A = 35^\circ$, $\angle D = 145^\circ$, $S_{\triangle BCE} = 11$. Найдите площадь пятиугольника $ABCDE$.

С-23. На основаниях AD и BC трапеции $ABCD$ построены квадраты $ADEF$ и $BCGH$, расположенные вне трапеции. Диагонали трапеции пересекаются в точке O . Найдите длину отрезка AD , если $BC = 2$, $GO = 7$, а $GF = 18$.

С-24. В треугольнике ABC известно, что $AB = BC$, а угол BAC равен 45° . Прямая MN пересекает сторону AC в точке M , а сторону BC — в точке N , причем $AM = 2MC$, а $\angle NMC = 60^\circ$. Найдите отношение площади треугольника MNC к площади четырехугольника $ABNM$.

С-25. В треугольнике ABC взяты точка N на стороне AB , а точка M — на стороне AC . Отрезки CN и BM пересекаются в точке O , $AN : NB = 2 : 3$, $BO : OM = 5 : 2$. Найдите $CO : ON$.

Ответы:

$$\text{C-1. } \frac{Sb(3a+b)}{2(a+b)(2a+b)}. \text{ C-2. } \angle A = \arcsin \frac{24}{25}, \angle B = \angle C = \arcsin \frac{4}{5}.$$

$$\text{C-3. } AC = \sqrt{45}, \quad BD = \sqrt{37}.$$

$$\text{C-4. } \frac{3}{32}. \quad \text{C-5. } 2\sqrt{\text{Stg } \beta}. \quad \text{C-6. } \frac{6}{5}. \quad \text{C-7. } \sqrt{\frac{3a^2+8c^2}{35}}.$$

$$\text{C-8. } \pi - \arccos \frac{3}{13}. \quad \text{C-9. } \frac{48}{5}. \quad \text{C-10. } \frac{189}{25}.$$

$$\text{C-11. } 2. \quad \text{C-12. } \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad \text{C-13. } 13. \quad \text{C-14. } 7 + 4\sqrt{3}.$$

$$\text{C-15. } BE = 9, \quad P = 45. \quad \text{C-16. } 6 < \lambda < 15.$$

$$\text{C-17. } 9. \quad \text{C-18. } \frac{4}{5}. \quad \text{C-19. } \frac{5}{4}. \quad \text{C-20. } \frac{n}{m}.$$

$$\text{C-21. } 18. \quad \text{C-22. } 22. \quad \text{C-23. } \frac{22}{7}. \quad \text{C-24. } \frac{7-3\sqrt{3}}{11}.$$

$$\text{C-25. } \frac{5}{2}.$$

Садовничий Ю.