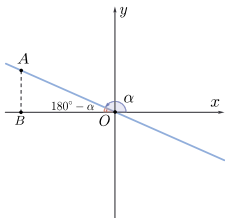


$$f'(x_0) = k = \operatorname{tg} \alpha$$

Рассмотрим случай, когда $k < 0$. Тогда k равен тангенсу угла α . Строим прямоугольный треугольник, но для угла $180^\circ - \alpha$.



$$k = \operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\frac{|AB|}{|OB|}.$$

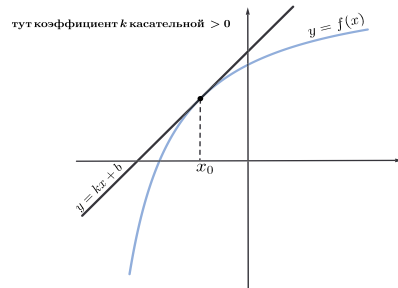
$y = kx + b$ — уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ с абсциссой в точке x_0 .

α — угол между касательной и положительным направлением оси x .

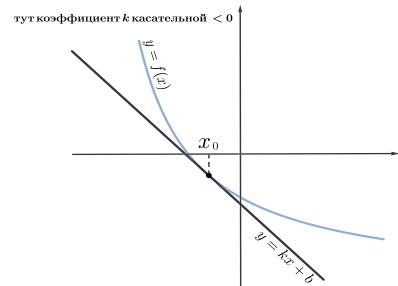


Угол между касательной и положительным направлением оси абсцисс всегда — правильный верхний угол. Если этот угол острый — коэффициент k положительный, если угол тупой — коэффициент k отрицательный.

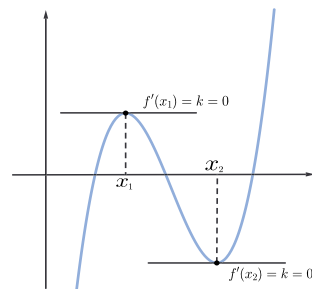
Если в окрестности точки x_0 функция $f(x)$ возрастает, то $f'(x_0) \geq 0$, а значит, у касательной коэффициент $k \geq 0$.



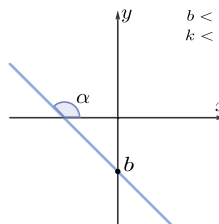
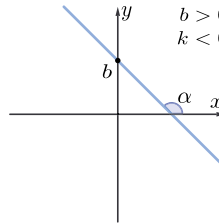
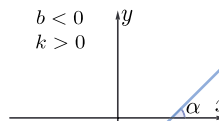
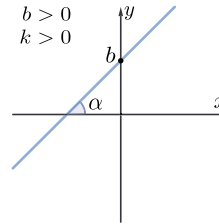
Если в окрестности точки x_0 функция $f(x)$ убывает, то $f'(x_0) \leq 0$, а значит, у касательной коэффициент $k \leq 0$.



Если в точке x_0 функция $f(x)$ достигает локального минимума или локального максимума, то касательная к графику функции в точке x_0 горизонтальна.



Как коэффициенты k и b влияют на расположение прямых.



Прямая $y = kx + b$ является касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с координатами $(x_0; f(x_0))$, если выполнены 2 условия:

1. В точке x_0 прямая $y = kx + b$ и график функции $y = f(x)$ пересекаются, то есть при $x = x_0$ получаем, что

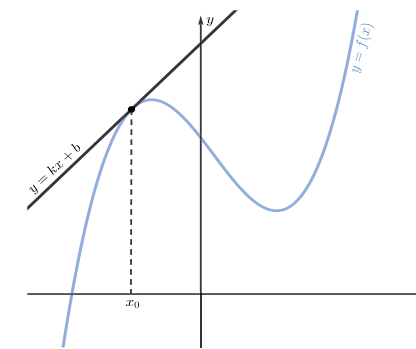
$$f(x_0) = kx_0 + b.$$

2. Значение производной функция $y = f(x)$ в точке x_0 должно совпадать с коэффициентом k прямой $y = kx + b$, то есть:

$$f'(x_0) = k.$$

В итоге получаем систему:

$$\begin{cases} f(x_0) = kx_0 + b, \\ f'(x_0) = k. \end{cases}$$



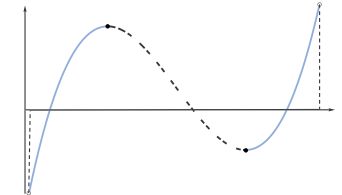
Достаточное условие монотонности функции.

Если $f'(x) > 0$ в каждой точке интервала (a, b) , то функция $f(x)$ возрастает на этом интервале.

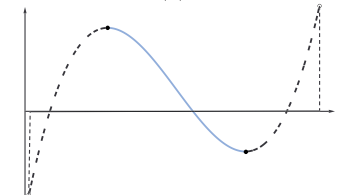
Если $f'(x) < 0$ в каждой точке интервала (a, b) , то функция $f(x)$ убывает на этом интервале.

Дан график функции $y = f(x)$

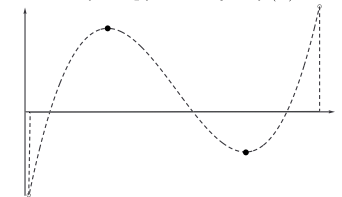
Если нужно определить промежутки, где $f'(x) > 0$, то мы ищем промежутки, где функция $y = f(x)$ возрастает



Если нужно определить промежутки, где $f'(x) < 0$, то мы ищем промежутки, где функция $y = f(x)$ убывает

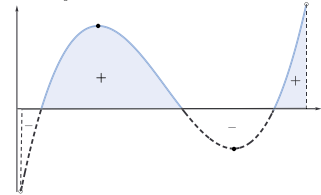


Если нужно определить точки, где $f'(x) = 0$, то мы ищем точки минимума или максимума функции $y = f(x)$

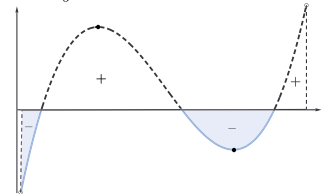


Дан график производной функции $y = f'(x)$

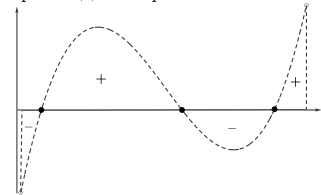
Если нужно определить промежутки, где $f'(x) > 0$, то мы ищем промежутки, на которых график производной находится выше оси Ox или, иначе говоря, точки графика с положительной координатой по оси Oy



Если нужно определить промежутки, где $f'(x) < 0$, то мы ищем промежутки, на которых график производной находится ниже оси Ox или, иначе говоря, точки графика с отрицательной координатой по оси Oy



Если нужно определить точки, где $f'(x) = 0$, то мы ищем точки, в которых график производной пересекает ось Ox

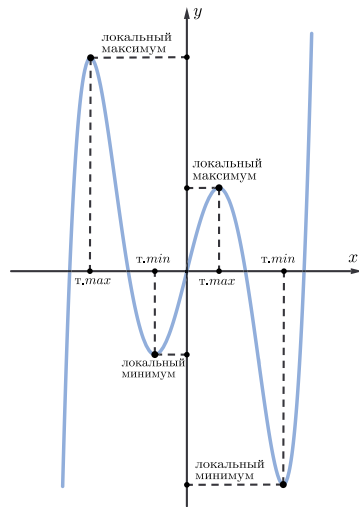


Определения:

Точки, в которых производная $f'(x)$ равна 0 или не существует, называются критическими точками функции $f(x)$.

Экстремум функции — минимум или максимум этой функции.

Точка экстремума x_0 — точка, в которой функция достигает минимума или максимума.



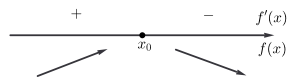
Необходимое условие экстремума:

Если x_0 — точка экстремума функции $f(x) \Rightarrow f'(x_0) = 0$

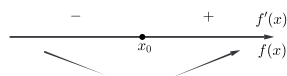
То есть, во всех точках, где $f(x)$ достигает локального $\min/\max$, производная равна 0.

Достаточное условие экстремума:

Пусть x_0 — точка в которой $f'(x) = 0$. Если производная при переходе через точку x_0 меняет свой знак с плюса на минус, то x_0 — точка максимума.



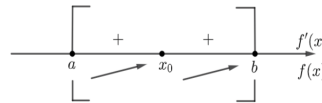
Если производная при переходе через точку x_0 меняет свой знак с минуса на плюс, то x_0 — точка минимума.



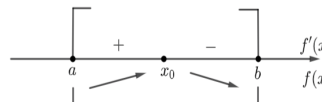
Алгоритм поиска

наибольшего/наименьшего значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$

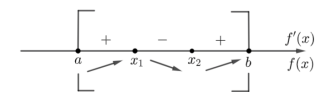
1. Находим область определения функции $f(x)$.
2. Считаем производную $f'(x)$ функции $f(x)$.
3. Решаем уравнение $f'(x) = 0$. Корни уравнения — критические точки.
4. Наносим критические точки, попавшие в отрезок $[a; b]$, на числовую прямую и расставляем знаки $f'(x)$ производной функции $f(x)$ в полученных промежутках.
5. Проанализируем ситуации, которые мы могли получить:



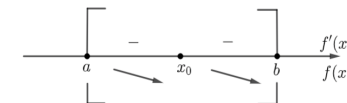
$\Rightarrow$ в т. a функция принимает наименьшее значение,
в т. b функция принимает наибольшее значение.



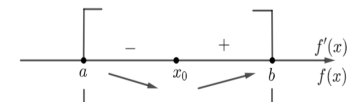
$\Rightarrow$ в т. x_0 функция принимает наибольшее значение,
в т. a или т. b принимает наименьшее значение.



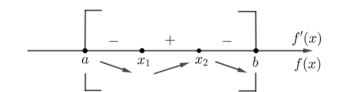
$\Rightarrow$ в т. x_1 или т. b функция достигает наибольшего значения,
в т. x_2 или т. a функция достигает наименьшего значения.



$\Rightarrow$ в т. a функция принимает наибольшее значение,
в т. b функция принимает наименьшее значение.



$\Rightarrow$ в т. x_0 функция принимает наименьшее значение,
в т. a или т. b принимает наибольшее значение.



$\Rightarrow$ в т. x_1 или т. b функция достигает наименьшего значения,
в т. x_2 или т. a функция достигает наибольшего значения.

6. Подставляем точку x_0 в которой достигается наибольшее/наименьшее значение в функцию $f(x)$. Полученное значение и есть наш ответ.

Если точек в которых может достигаться наибольшее/наименьшее значение функции несколько, то считаем значение функции $f(x)$ в каждой из них, а затем, сравнивая найденные значения, выбираем из них наибольшее/наименьшее.

Основные формулы производных

1. $c' = 0$, где c - константа
2. $(\pi)' = 0$
3. $(e)' = 0$
4. $(e^2)' = 0$
5. $(\sqrt{e})' = 0$
6. $(\ln 7)' = 0$
7. $(\sin \frac{\pi}{6})' = 0$
8. $(10^{10})' = 0$

Производная от постоянной величины всегда равна 0

1. $(\sin x)' = \cos x$
2. $(\cos x)' = -\sin x$
3. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
4. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

1. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
2. $(x^2)' = 2x^{2-1} = 2x$
3. $(x^1)' = x^{1-1} = x^0 = 1$
4. $(\frac{1}{x})' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$
5. $(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
6. $(\sqrt[3]{x})' = (x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
7. $(x \cdot \sqrt{x})' = (x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}})' = (x^{1+\frac{1}{2}})' = (x^{\frac{3}{2}})' = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

1. $(e^x)' = e^x$
2. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
3. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$
4. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$
5. $(e^{ax+b})' = e^{ax+b} \cdot a$
6. $(\ln(ax+b))' = \frac{1}{ax+b} \cdot a$