

Логарифмы.**1. Карточки для повторения.**

Формулы ниже верны при $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ и $a \neq 1$. В остальных случаях нужен анализ ОДЗ.

№	Про что формула	Формула
	Определение логарифма	$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$
	Ограничения в логарифме	$\log_a b \Rightarrow a > 0, b > 0, a \neq 1$
1	Логарифм от единицы	$\log_a 1 = 0$
2	Логарифм с аргументом, равным основанию	$\log_a a = 1$
3	Логарифм как степень	$a^{\log_a b} = b$
4	Логарифм произведения	$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$
5	Логарифм частного	$\log_a \left(\frac{b}{c} \right) = \log_a b - \log_a c$
6	Логарифм степени	$\log_a (b^c) = c \cdot \log_a b$
7	Логарифм по основанию степени	$\log_{a^c} b = \frac{1}{c} \cdot \log_a b$
8	Произведение "подходящих" логарифмов	$\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$
9	Формула перехода к новому основанию логарифма	$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$
10	Инверсия основания и аргумента логарифма	$\log_b c = \frac{1}{\log_c b}$
11	Инверсия основания степени и аргумента логарифма	$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

2. Определение.

Логарифм числа b по основанию числа a — это число x , являющееся решением уравнения

$$a^x = b.$$

Это число x обозначается так: $\log_a b$.

Пример 1. Вычислим $\log_4 16 = x$. По определению логарифма

$$4^x = 16 = 4^2,$$

$$x = 2.$$

То есть $\log_4 16 = 2$.

Пример 2. Вычислим $\log_9 27 = x$. По определению логарифма

$$9^x = 27,$$

$$(3^2)^x = 3^3,$$

$$3^{2x} = 3^3,$$

$$2x = 3,$$

$$x = \frac{3}{2}.$$

То есть $\log_9 27 = \frac{3}{2}$.

Пример 3. Вычислим $\log_{0,2} \sqrt{5} = x$. По определению логарифма

$$0,2^x = \sqrt{5},$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^x = 5^{\frac{1}{2}},$$

$$(5^{-1})^x = 5^{\frac{1}{2}},$$

$$5^{-x} = 5^{\frac{1}{2}},$$

$$-x = \frac{1}{2},$$

$$x = -\frac{1}{2}.$$

То есть $\log_{0,2} \sqrt{5} = -\frac{1}{2}$.

Сделаем вывод: чтобы вычислить $\log_a b$, нужно ответить на вопрос:

"В какую степень нужно возвести число a , чтобы получилось число b ?"

Можно также представлять себе следующую схему:

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b.$$

3. Ограничения в логарифме.

Попробуем вычислить $\log_{-2} 2 = x$. По определению логарифма

$$(-2)^x = 2.$$

Это уравнение не имеет решений в действительных числах. То есть мы не можем вычислить $x = \log_{-2} 2$ по определению логарифма. Чтобы решить эту проблему, введем ограничение на основание логарифма: $a > 0$.

Попробуем вычислить $\log_2 (-2) = x$. По определению логарифма

$$2^x = -2.$$

Это уравнение также не имеет решений в действительных числах. Введем ограничение на аргумент логарифма: $b > 0$.

Наконец попробуем вычислить $\log_1 2$. По определению логарифма

$$1^x = 2.$$

Снова получили уравнение, не имеющее решений. Следовательно, нужно ввести еще одно ограничение на основание логарифма: $a \neq 1$.

4. Доказательство свойств логарифма.

Свойство №1. Логарифм от единицы.

Обозначим

$$\log_a 1 = x.$$

По определению логарифма

$$a^x = 1.$$

Решением этого уравнения является $x = 0$. Подставим вместо x выражение из первой строчки, получим

$$\boxed{\log_a 1 = 0}. \quad (1)$$

Свойство №2. Логарифм с аргументом, равным основанию.

Обозначим

$$\log_a a = x.$$

По определению логарифма

$$a^x = a.$$

Решением этого уравнения является $x = 1$. Подставим вместо x выражение из первой строчки, получим

$$\boxed{\log_a a = 1}. \quad (2)$$

Свойство №3. Логарифм как степень.

Обозначим

$$x = \log_a b.$$

По определению логарифма

$$a^x = b.$$

Подставим вместо x выражение из первой строчки, получим

$$\boxed{a^{\log_a b} = b}. \quad (3)$$

Свойство №4. Логарифм произведения.

Обозначим

$$x = \log_a (b \cdot c).$$

По определению логарифма

$$a^x = b \cdot c.$$

По формуле (3)

$$a^x = a^{\log_a b} \cdot a^{\log_a c}.$$

По свойству степеней

$$a^x = a^{\log_a b + \log_a c}.$$

Приравняем показатели степеней:

$$x = \log_a b + \log_a c.$$

Подставим вместо x выражение из первой строчки, получим

$$\boxed{\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c}. \quad (4)$$

Свойство №5. Логарифм частного.

Обозначим

$$x = \log_a \frac{b}{c}.$$

По определению логарифма

$$a^x = \frac{b}{c}.$$

По формуле (3)

$$a^x = \frac{a^{\log_a b}}{a^{\log_a c}}.$$

По свойству степеней

$$a^x = a^{\log_a b - \log_a c}.$$

Приравняем показатели степеней:

$$x = \log_a b - \log_a c.$$

Подставим вместо x выражение из первой строчки, получим

$$\boxed{\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c}. \quad (5)$$

Свойство №6. Логарифм степени.

Обозначим

$$x = \log_a (b^c).$$

По определению логарифма

$$a^x = b^c.$$

По формуле (3)

$$a^x = (a^{\log_a b})^c.$$

По свойству степеней

$$a^x = a^{c \cdot \log_a b}.$$

Приравняем показатели степеней:

$$x = c \cdot \log_a b.$$

Подставим вместо x выражение из первой строчки, получим

$$\boxed{\log_a (b^c) = c \cdot \log_a b}. \quad (6)$$

Свойство №7. Логарифм по основанию степени.

Обозначим

$$x = \log_{a^c} b.$$

По определению логарифма

$$(a^c)^x = b.$$

По свойству степеней

$$a^{c \cdot x} = b.$$

По формуле (3)

$$a^{c \cdot x} = a^{\log_a b}.$$

Приравняем показатели степеней:

$$c \cdot x = \log_a b.$$

Решим уравнение относительно x :

$$x = \frac{1}{c} \cdot \log_a b.$$

Подставим вместо x выражение из первой строчки, получим

$$\boxed{\log_{a^c} b = \frac{1}{c} \cdot \log_a b}. \quad (7)$$

Свойство №8. Произведение "подходящих" логарифмов.

Обозначим

$$x = \log_a b \cdot \log_b c.$$

Возведём a в степень x :

$$a^x = a^{\log_a b \cdot \log_b c}.$$

По свойству степеней

$$a^x = (a^{\log_a b})^{\log_b c}.$$

По формуле (3)

$$a^x = b^{\log_b c}.$$

Снова по формуле (3)

$$a^x = c.$$

По определению логарифма

$$x = \log_a c.$$

Подставим вместо x выражение из первой строчки, получим

$$\boxed{\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c.} \quad (8)$$

Свойство №9. Формула перехода к новому основанию логарифма.

Выразим из формулы (8) $\log_b c$, получим

$$\boxed{\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}.} \quad (9)$$

Это формула перехода к новому основанию a , которое мы можем выбрать сами.

Свойство №10. Инверсия основания и аргумента логарифма.

Примем в формуле (9) новое основание $a = c$:

$$\log_b c = \frac{\log_c c}{\log_c b}.$$

По формуле (2) имеем $\log_c c = 1$. Следовательно,

$$\boxed{\log_b c = \frac{1}{\log_c b}.} \quad (10)$$

Свойство №11. Инверсия основания степени и аргумента логарифма.

Обозначим

$$x = a^{\log_b c}.$$

По формуле (3)

$$x = (c^{\log_c a})^{\log_b c}.$$

По свойству степеней

$$x = c^{\log_b c \cdot \log_c a}.$$

По формуле (8)

$$x = c^{\log_b a}.$$

Подставим вместо x выражение из первой строчки, получим

$$\boxed{a^{\log_b c} = c^{\log_b a}.} \quad (11)$$

5. Примеры вычисления выражений.

Пример 4. $\log_{121} 11 = \log_{11^2} 11 \stackrel{(7)}{=} \frac{1}{2} \log_{11} 11 \stackrel{(2)}{=} \frac{1}{2}.$

Пример 5. $\log_8 32 = \log_{2^3} (2^5) \stackrel{(6, 7)}{=} \frac{5}{3} \log_2 2 \stackrel{(2)}{=} \frac{5}{3}.$

Пример 6. $\log_{0,8} \frac{16}{25} = \log_{\frac{4}{5}} \left(\frac{4}{5}\right)^2 \stackrel{(6)}{=} 2 \log_{\frac{4}{5}} \frac{4}{5} \stackrel{(2)}{=} 2.$

Пример 7. $\log_{16} \sqrt[3]{4} = \log_{2^4} \left(2^{\frac{2}{3}}\right) \stackrel{(6, 7)}{=} \frac{2}{4} \log_2 2 \stackrel{(2)}{=} \frac{2}{4} = \frac{1}{6}.$

Пример 8. $\log_{10} 4 + 2 \log_{10} 5 \stackrel{(6)}{=} \log_{10} 4 + \log_{10} 25 \stackrel{(4)}{=} \log_{10} 100 \stackrel{(6)}{=} 2 \log_{10} 10 \stackrel{(2)}{=} 2.$

Пример 9. $25^{\log_{125} 8} = (5^2)^{\log_{5^3} 2^3} \stackrel{(6, 7)}{=} (5^2)^{\frac{3}{3} \log_5 2} = 5^{2 \log_5 2} \stackrel{(6)}{=} 5^{\log_5 4} \stackrel{(3)}{=} 4.$

Пример 10.

$$(1 + \log_{12} 0,5)(1 + \log_6 2) \stackrel{(2)}{=} (\log_{12} 12 + \log_{12} 0,5)(\log_6 6 + \log_6 2) \stackrel{(4)}{=} \log_{12} 6 \cdot \log_6 12 \stackrel{(8)}{=} \log_{12} 12 \stackrel{(2)}{=} 1.$$

6. Вычисление выражений.**№1. Вычислите значение выражения**

а) $\log_{15} 225;$

б) $\log_{971} 971;$

в) $\log_2 1;$

г) $\log_2 64;$

д) $\log_3 81;$

е) $\log_6 216.$

Ответ**№2. Вычислите значение выражения**

а) $\log_8 16;$

б) $\log_9 27;$

в) $\log_{125} 25;$

г) $\log_{343} 7;$

д) $\log_{1024} 4;$

е) $\log_{64} 32.$

Ответ**№3. Вычислите значение выражения**

а) $\log_{\frac{1}{2}} 8;$

б) $\log_{\frac{3}{4}} \frac{16}{9};$

в) $\log_{100} \frac{1}{1000};$

г) $\log_{1024} \frac{1}{8};$

д) $\log_{\frac{1}{243}} \frac{1}{81};$

е) $\log_{\frac{5}{20}} \frac{1}{64}.$

Ответ

№4. Вычислите значение выражения

а) $\log_{0,5} 128$;

б) $\log_{1,25} \frac{4}{5}$;

в) $\log_{6,2} \frac{25}{961}$;

г) $\log_{0,25} \frac{1}{64}$;

д) $\log_{0,15} \frac{27}{8000}$;

е) $\log_{1,4} \left(3 \frac{526}{625} \right)$.

Ответ**№5. Вычислите значение выражения**

а) $\log_7 \sqrt{343}$;

б) $\log_{0,2} (\sqrt[3]{5})$;

в) $\log_{\frac{1}{9}} \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right)$;

г) $\log_{\sqrt{125}} \left(\frac{\sqrt[4]{25}}{\sqrt[7]{625}} \right)$;

д) $\log_{\sqrt[3]{4}} (\sqrt[3]{2})$;

е) $\log_{1,1} \left(\frac{\sqrt[3]{10}}{\sqrt[6]{121}} \right)$.

Ответ**№6. Вычислите значение выражения**

а) $2 \log_{20} 2 + \log_{20} 5$;

б) $\log_{0,4} 5 - \log_{0,4} 2$;

в) $\log_{0,2} 80 - \log_{0,04} 256$;

г) $\log_3 \frac{2}{3} + \log_9 2,25$;

д) $\log_{36} \sqrt[3]{2} + \log_{216} \sqrt{3}$;

е) $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[8]{2} - \log_9 \sqrt{2}$.

Ответ**№7. Вычислите значение выражения**

а) $3^{\log_3 5 \cdot \log_5 8}$;

б) $2^{\log_4 25} \cdot 3^{\log_9 4}$;

в) $36^{\log_6 2}$;

г) $8^{\log_{16} 81}$;

д) $\left(\frac{4}{9} \right)^{\log_{1,5} \sqrt{5}}$;

е) $\left(2 \frac{10}{27} \right)^{\log_{0,75} \sqrt[3]{2}}$.

Ответ**№8. Вычислите значение выражения**

а) $(1 - \log_3 18)(1 - \log_6 18)$;

б) $\log_5 3 \cdot (2 - \log_3 45)$;

в) $\frac{\log_3 36 - 2}{\log_3 64}$;

г) $\frac{4 + \log_2 25}{1 + \log_2 10}$;

д) $\log_{12} 4 \cdot (1 + 3 \log_8 6)$;

е) $(\log_{0,4} \sqrt{5} + 1) \cdot \log_{0,8} 0,4$.

Ответ

№9. Вычислите значение выражения

а) $\log_2 \left(\sin \frac{\pi}{12} \right) + \log_2 \left(\cos \frac{\pi}{12} \right);$

в) $\frac{\log_{\sqrt[3]{2}} (\sin 20^\circ)}{\log_2 (\cos 70^\circ)};$

д) $3^{(1-\cos 20^\circ) \cdot \log_3 7} \cdot 49^{\cos^2 10^\circ};$

б) $\log_3 \left(\cos \frac{\pi}{3} \right) \cdot \log_{\left(\sin \frac{\pi}{4} \right)} 3;$

г) $\log_8 \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{8} \right);$

е) $(\sin 15^\circ)^{\log_2 9} \cdot 81^{\log_4 (\cos 15^\circ)}.$

Ответ**№10. Вычислите значение выражения**

а) $\frac{3}{2 + \log_2 3} + \log_{12} 18;$

в) $\frac{\log_3 6}{\log_{18} 3} - \frac{\log_3 54}{\log_2 3}$

д) $(1 + \log_2 9 + \log_2^2 3) \cdot \log_6^2 4;$

б) $\log_{40} 10 + \frac{2}{\log_2 5 + 3};$

г) $\frac{\log_2 50}{\log_{2.5} 2} + \frac{\log_2 5}{\log_{0.08} 2};$

е) $\frac{\log_5^2 2 + \log_5 8 + 2}{1 + \log_5 2} \cdot \log_{50} 0,2.$

Ответ

Ответы.**№1**

а) 2; б) 1; в) 0; г) 6; д) 4; е) 3.

№2а) $\frac{4}{3}$; б) $\frac{3}{2}$; в) $\frac{2}{3}$; г) $\frac{1}{3}$; д) $\frac{1}{5}$; е) $\frac{5}{6}$.**№3**а) -3 ; б) -2 ; в) $-\frac{3}{2}$; г) $-\frac{3}{10}$; д) $\frac{4}{5}$; е) 3.**№4**а) -7 ; б) -1 ; в) -2 ; г) 3; д) 3; е) 4.**№5**а) $-\frac{3}{2}$; б) $-\frac{1}{3}$; в) $\frac{1}{4}$; г) $-\frac{1}{21}$; д) $\frac{3}{2}$; е) $-\frac{1}{3}$.**№6**а) 1; б) -1 ; в) -1 ; г) 0; д) $\frac{1}{6}$; е) 0.**№7**а) 8; б) 10; в) 4; г) 27; д) $\frac{1}{5}$; е) $\frac{1}{2}$.**№8**а) 1; б) -1 ; в) $\frac{1}{3}$; г) 2; д) 2; е) $\frac{1}{2}$.**№9**а) -2 ; б) 2; в) 3; г) $-\frac{1}{6}$; д) 49; е) $\frac{1}{81}$.**№10**а) 2; б) 1; в) 2; г) -1 ; д) 4; е) -1 .