

**Министерство образования и науки Российской Федерации
Московский физико-технический институт
(государственный университет)
Заочная физико-техническая школа**

МАТЕМАТИКА

**Задачи с параметрами
11 класс**

(2015 – 2016 учебный год)



г. Долгопрудный, 2015

Составитель: С.Е. Городецкий, доцент кафедры высшей математики МФТИ.

Математика: Решение задач с параметрами 2015, 40 с.

Внимание! Данное задание является факультативным, т. е. присылать его в ЗФТШ на проверку не обязательно, но мы настоятельно рекомендуем Вам внимательно проработать его, т. к. задачи с параметрами включены в различные олимпиады и ЕГЭ.

Составитель:

Городецкий Сергей Евгеньевич

Подписано 30.10.15. Формат 60×90 1/16.

Бумага типографская. Печать офсетная. Усл. печ. л. 2,5.

Уч.-изд. л. 2,22. Тираж 100. Заказ №20-з.

Заочная физико-техническая школа
Московского физико-технического института
(государственного университета)

ООО «Печатный салон ШАНС»

Институтский пер., 9, г. Долгопрудный, Московская обл., 141700.

ЗФТШ, тел./факс (495) 408-51-45 – **заочное отделение**,

тел./факс (498) 744-63-51 – **очно-заочное отделение**,

тел. (499) 755-55-80 – **очное отделение**.

e-mail: zftsh@mail.mipt.ru

Наш сайт: www.school.mipt.ru

© МФТИ, ЗФТШ, 2015

Все права защищены. Воспроизведение учебно-методических материалов и материалов сайта ЗФТШ в любом виде, полностью или частично, допускается только с письменного разрешения правообладателей.

§1. Простейшие задачи с параметром

Наиболее часто встречаются следующие формулировки задач с параметром:

а) для каждого значения параметра (параметров) решить уравнение (неравенство, систему);

б) найти все значения параметра (параметров), при каждом из которых решения удовлетворяют некоторым заданным условиям (ровно одно решение, нет решений, множества решений двух уравнений совпадают, все решения неравенства принадлежат промежутку $(a; +\infty)$ и т. п.).

Пример 1. Для каждого значения параметра a решите уравнение $(x^2 - 4)\sqrt{x+a} = 0$.

Решение. Произведение двух множителей равно нулю в том и только том случае, когда один из множителей равен нулю, а второй имеет смысл. Поэтому возможны два случая:

$$\begin{cases} x^2 - 4 = 0, \\ x + a \geq 0, \end{cases} \quad (1)$$

$$x + a = 0. \quad (2)$$

Из (1) следует, что числа $x = \pm 2$ являются корнями исходного уравнения только в том случае, когда они удовлетворяют неравенству $x \geq -a$. Таким образом, при $a < -2$ система (1) не имеет решений, при $-2 \leq a < 2$ получаем $x = 2$, а при $a \geq 2$ подходят оба корня и мы получаем, что $x = \pm 2$.

В (2) $x = -a$ является решением при любых a .

Ответ: при $a < -2$: $x = -a$;

при $-2 \leq a < 2$: $x = -a, x = 2$;

при $a \geq 2$: $x = -a, x = 2, x = -2$.

Замечания. 1. Если задача сформулирована таким образом (для каждого a решите уравнение), то в ответе для *каждого* значения параметра должно быть указано множество решений, в том числе и для тех значений, при которых решений нет.

2. В ответе знаки тире заменены на двоеточия, чтобы их не перепутать с минусами.

Пример 2. Для каждого значения a решите неравенство $(a^2 + a - 2)x \geq a^2 - 1$.

Решение. 1) Если коэффициент при x отличен от нуля, то неравенство является линейным и чтобы его решить, надо разделить обе его части на $a^2 + a - 2$. Но *при делении обеих частей неравенства на число необходимо знать знак этого числа*. Рассматриваем два варианта.

1а) Если $a^2 + a - 2 > 0$ (т. е. $a \in (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$), то $x \geq \frac{a^2 - 1}{a^2 + a - 2}$.

Сокращая дробь в правой части, получаем $x \geq \frac{a+1}{a+2}$.

1б) Если $a^2 + a - 2 < 0$ (т. е. $a \in (-2; 1)$), то $x \leq \frac{a^2 - 1}{a^2 + a - 2}$, т. е.
 $x \leq \frac{a+1}{a+2}$.

2) Если $a^2 + a - 2 = 0$ (при $a = -2$ или $a = 1$), у нас остаётся числовое неравенство, и этот случай надо рассматривать отдельно.

2а) Если $a = -2$, то исходное неравенство принимает вид $0x \geq 3$, т. е. решений нет.

2б) Если $a = 1$, то получаем $0x \geq 0$, что верно при всех x , поэтому x – любое число.

Ответ: при $a = 1$: $x \in R$,

при $a = -2$: $x \in \emptyset$,

при $a \in (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$: $x \in \left[\frac{a+1}{a+2}; +\infty \right)$,

при $a \in (-2; 1)$: $x \in \left(-\infty; \frac{a+1}{a+2} \right]$.

Пример 3. При каком наименьшем положительном значении b функция $y = \sin\left(20x + \frac{b\pi}{150}\right)$ имеет минимум в точке $x = \frac{\pi}{2}$?

Решение. Минимальное значение синуса равно (-1) , и оно достигается, когда аргумент равен $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$. Значит, функция принимает минимальное значение при $x = \frac{\pi}{2}$, если

$$20 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{b\pi}{150} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z,$$

откуда находим, что $b = -1575 + 300k, k \in Z$. Наименьшим положительным числом в этой серии является $b = 225$ (при $k = 6$).

Ответ: $b = 225$.

Пример 4. При каких значениях параметра a неравенство $\frac{x-3a-1}{x+2a-2} \leq 0$ выполняется при каждом значении x таком, что $2 \leq x \leq 3$?

Решение. Для решения подобных неравенств обычно используется метод интервалов. Находим точки, в которых числитель и знаменатель дроби обращаются в ноль ($x_1 = 3a + 1$ и $x_2 = 2 - 2a$). Далее отмечаем эти точки на числовой прямой и определяем знаки левой части на получившихся промежутках. Возможны три способа расположения точек: $x_1 = x_2$, $x_1 < x_2$, $x_1 > x_2$. Если $x_1 = x_2$, то числитель дроби равен знаменателю, левая часть неравенства обращается в единицу, поэтому решений нет. В двух оставшихся случаях решением является *промежуток между числами x_1 и x_2* (при этом граничная точка x_1 включается, а x_2 – нет). Для того, чтобы отрезок $2 \leq x \leq 3$ включался в множество решений, необходимо и достаточно, чтобы границы этого отрезка принадлежали множеству решений, т. е. являлись решениями неравенства. Та-

ким образом, получаем систему:
$$\begin{cases} \frac{2-3a-1}{2+2a-2} \leq 0, \\ \frac{3-3a-1}{3+2a-2} \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \in (-\infty; 0) \cup \left[\frac{1}{3}; +\infty\right), \\ a \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{2}{3}; +\infty\right) \end{cases} \Leftrightarrow a \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{2}{3}; +\infty\right).$$

Ответ: $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{2}{3}; +\infty\right).$

Пример 5. Для каждого значения параметра a решите систему уравнений
$$\begin{cases} (a+2)x - ay = 1 - a, \\ 2x - (3a+1)y = a + 5. \end{cases}$$

Решение. Выразим из второго уравнения x :

$$x = \frac{a+5}{2} + \frac{3a+1}{2}y \quad (3)$$

и подставим в первое уравнение¹:

¹ Выгоднее делать именно так, поскольку во втором уравнении коэффициент при x не зависит от параметра и, следовательно, не обращается в ноль. Если бы мы стали выражать y из второго уравнения, то пришлось бы отдельно рассматривать случай, когда $3a+1=0$.

$$(a+2)\left(\frac{a+5}{2} + \frac{3a+1}{2}y\right) - ay = 1-a.$$

После упрощения получаем уравнение:

$$\begin{aligned}(3a^2 + 5a + 2)y &= -a^2 - 9a - 8 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (a+1)(3a+2)y &= -(a+8)(a+1).\end{aligned}\quad (4)$$

Рассматриваем два случая.

1) $(a+1)(3a+2) = 0$. Это возможно при двух значениях a .

1а) Если $a = -1$, то уравнение (4) принимает вид $0 = 0$, откуда $y \in \mathbb{R}$. Тогда из (3) находим, что $x = 2 - y$. Если обозначить $y = t$, то $x = 2 - t$. Таким образом, решениями системы являются пары чисел вида $(2 - t; t)$, $t \in \mathbb{R}$.

1б) Если $a = -\frac{2}{3}$, то (4) принимает вид $0 = -\frac{4}{9} + 6 - 8$. Значит, в этом случае решений нет.

2) $(a+1)(3a+2) \neq 0$. Тогда делим обе части уравнения (4) на $(a+1)(3a+2)$ и получаем, что $y = -\frac{a+8}{3a+2}$. Подставляя в (3), находим

$$x = \frac{a+5}{2} - \frac{3a+1}{2} \cdot \frac{a+8}{3a+2} = \frac{1-4a}{3a+2}.$$

Ответ: при $a = -1$: $(2 - t; t)$, $t \in \mathbb{R}$;

при $a = -\frac{2}{3}$: нет решений;

при всех остальных значениях a : $\left(\frac{1-4a}{3a+2}; -\frac{a+8}{3a+2}\right)$.

Замечание. Линейное уравнение $ax + by = c$ при $a^2 + b^2 \neq 0$ задаёт прямую на плоскости. Поэтому в системе двух линейных уравнений возможны следующие варианты: прямые пересекаются (1 решение), прямые параллельны (нет решений), прямые совпадают (бесконечно много решений).

Пример 6. При каких значениях параметра a уравнение $\sin x + a \cos x = 2a$ имеет хотя бы одно решение?

Решение. Левая часть уравнения может принимать значения в пределах $x^2 \in [-\sqrt{1+a^2}; \sqrt{1+a^2}]$. Поэтому данное уравнение имеет решения, если $2a \in [-\sqrt{1+a^2}; \sqrt{1+a^2}]$. Это условие равносильно неравенству $|2a| \leq \sqrt{1+a^2}$. Так как обе части неравенства неотрицательны, возведение в квадрат является равносильным преобразованием. Получаем

$$4a^2 \leq 1+a^2 \Leftrightarrow a^2 \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{3}} \leq a \leq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ответ: $-\frac{1}{\sqrt{3}} \leq a \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$.

§2. Квадратные уравнения и неравенства с параметром

Многие задачи с параметром сводятся к исследованию квадратного трёхчлена, поэтому рассмотрим эти задачи подробнее.

1. При решении простейших задач бывает достаточно формулы для корней квадратного уравнения и теоремы Виета.

Пример 7. При каких значениях параметра a множество решений неравенства $x^2 + ax - 1 < 0$ является интервалом длины 5?

Решение. Поскольку коэффициент при x^2 положителен, решением неравенства является интервал между корнями в случае $D > 0$ и пустое множество, если $D \leq 0$.

Находим дискриминант: $D = a^2 + 4$ ($D > 0$ при всех a). Тогда множество решений есть промежуток

$x \in \left(\frac{-a - \sqrt{a^2 + 4}}{2}; \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4}}{2} \right)$. Требуется, чтобы длина этого промежутка была равна 5, т. е.

$$\frac{-a + \sqrt{a^2 + 4}}{2} - \frac{-a - \sqrt{a^2 + 4}}{2} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + 4} = 5 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{21}.$$

Ответ: $a = \pm\sqrt{21}$.

² С помощью введения дополнительного угла выражение $A \cos x + B \sin x$ может быть преобразовано к виду $\sqrt{A^2 + B^2} \cdot \cos(x - \alpha)$. Поскольку косинус принимает всевозможные значения из отрезка $[-1; 1]$, откуда следует, что множеством значений выражения $A \cos x + B \sin x$ является отрезок $[-\sqrt{A^2 + B^2}; \sqrt{A^2 + B^2}]$.

Пример 8. При каких значениях параметра p уравнение $x^2 + \sqrt{p^2 + 4p} \cdot x + p - 1 = 0$ имеет корни, а сумма квадратов корней минимальна?

Решение. Сумму квадратов корней уравнения удобно выразить с помощью теоремы Виета:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(-\sqrt{p^2 + 4p}\right)^2 - 2(p-1) = p^2 + 2p + 2.$$

Но прежде, чем применять теорему Виета, обязательно нужно проверить, что уравнение имеет корни! Для этого вычисляем дискриминант: $D = p^2 + 4p - 4(p-1) = p^2 + 4$. Видим, что дискриминант положителен при любых допустимых значениях p , т. е. при

$$p \in (-\infty; -4] \cup [0; +\infty). \quad (5)$$

Остаётся найти, при каких значениях p выражение $p^2 + 2p + 2$ принимает наименьшее значение. График функции $f(p) = p^2 + 2p + 2$ – парабола с ветвями вверх, поэтому наименьшее значение принимается в вершине (если она принадлежит множеству (5)) или в точке множества (5), ближайшей к вершине.

Так как абсциссой вершины является $p = -1$, что не принадлежит (5), получаем, что наименьшее значение $f(p)$ при условии (5) принимается при $p = 0$.

Ответ: $p = 0$.

II. Если в задаче требуется определить знаки корней квадратного уравнения, то, как правило, удобнее использовать теорему Виета. При условии, что уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$, имеет два корня ($D > 0$) справедливы следующие утверждения³:

1°. корни положительны $\Leftrightarrow \frac{c}{a} > 0$ и $-\frac{b}{a} > 0 \Leftrightarrow ac > 0$ и $ab < 0$;

2°. корни отрицательны $\Leftrightarrow \frac{c}{a} > 0$ и $-\frac{b}{a} < 0 \Leftrightarrow ac > 0$ и $ab > 0$;

3°. корни разных знаков $\Leftrightarrow \frac{c}{a} < 0 \Leftrightarrow ac < 0$.

Пример 9. При каких значениях b уравнение

$$(b-1) \cdot 4^x - (2b-1) \cdot 2^x - 1 = 0$$

имеет два различных корня?

³ В третьем случае условие $D > 0$ можно опустить, так как оно следует из неравенства $ac < 0$.

Решение. Сделаем замену $2^x = t$, где t может принимать любые положительные значения. Тогда уравнение принимает вид

$$(b-1)t^2 - (2b-1)t - 1 = 0. \quad (6)$$

Чтобы у исходного уравнения было два корня необходимо и достаточно, чтобы у уравнения (6) было два положительных корня⁴.

Если $b=1$, то (3) принимает вид $-t-1=0$, что нам не подходит (нет положительных корней)⁵.

Если $b \neq 1$, то для существования двух положительных корней мы должны потребовать (см. выше):

$$\begin{cases} D > 0, \\ x_1 + x_2 > 0, \\ x_1 x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2b-1)^2 + 4(b-1) > 0, \\ (2b-1)(b-1) > 0, \\ -1 \cdot (b-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \in (-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{2}) \cup (\frac{\sqrt{3}}{2}; +\infty), \\ b \in (-\infty; \frac{1}{2}) \cup (1; +\infty), \\ b < 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b \in (-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{2}).$$

$$\text{Ответ: } b \in (-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{2}).$$

III. Нередко встречаются задачи на расположение корней квадратного трёхчлена⁶. Начнём этот раздел с примера.

Пример 10. При каких значениях параметра a уравнение $5x^2 + (4a-6)x + 1 = 0$ имеет два корня, причём один из корней больше (-1) , а второй – меньше (-1) ?

Решение. Обозначим левую часть уравнения через $f(x)$ и рассмотрим график функции $y = f(x)$. Это парабола с ветвями вверх. Для того, чтобы выполнялось условие задачи, график дол-

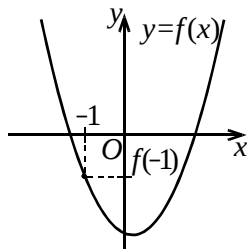


Рис. 1

⁴ После того, как мы сформулировали задачу для уравнения относительно t , об исходной задаче можно забыть: действительно, каждому положительному t соответствует ровно одно значение x .

⁵ Если коэффициент при t^2 зависит от параметра, то обязательно надо рассмотреть случай, когда он обращается в ноль, т.к. тогда получается не квадратное уравнение, а линейное.

⁶ В предыдущем пункте был рассмотрен частный случай такой задачи, а именно, расположение корней относительно точки $x=0$.

жен быть расположен так, чтобы точка $x = -1$ оказалась между корня-ми (см. рис. 1). Следовательно, $f(-1) < 0$.

Заметим, что из выполнения этого неравенства следует, что уравнение имеет два корня, расположенные по разные стороны от точки $x = -1$. Действительно, если некоторая точка с абсциссой x_0 параболы с ветвями вверх лежит ниже оси абсцисс, то эта парабола пересекает ось в двух точках: один раз слева от x_0 и один раз справа от x_0 .

Записываем и решаем неравенство $f(-1) < 0$:

$$5 - (4a - 6) + 1 < 0 \Leftrightarrow a > 3.$$

Ответ: $a > 3$.

Теперь рассмотрим различные варианты расположения корней квадратичной функции. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, $x_B = -\frac{b}{2a}$ – абсцисса вершины параболы; $D = b^2 - 4ac$ – дискриминант, x_1 и x_2 – корни соответствующего квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

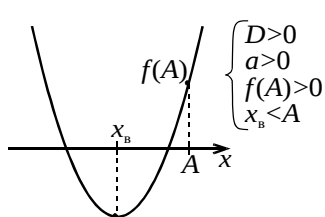


Рис. 2а

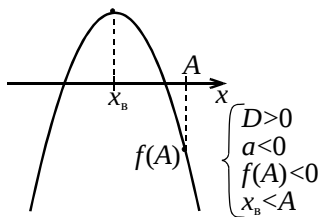


Рис. 2б

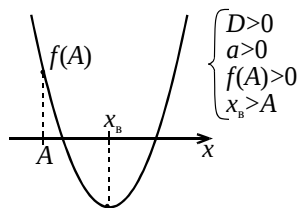


Рис. 3а

1°. Уравнение имеет два корня, и оба они меньше некоторого числа A (рис. 2а, 2б).

2°. Уравнение имеет два корня, и оба они больше некоторого числа A (рис. 3а, 3б).

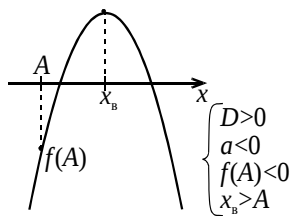


Рис. 3б

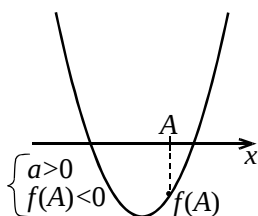


Рис. 4а

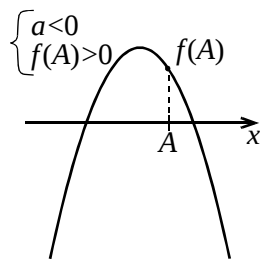


Рис. 4б

3°. Уравнение имеет два корня, лежащие по разные стороны от числа A (рис. 4). Обратите внимание, что в этом случае условие $D > 0$ является лишним (см. решение примера 10) и мы получаем одно неравенство $f(A) < 0$ (или $f(A) > 0$).

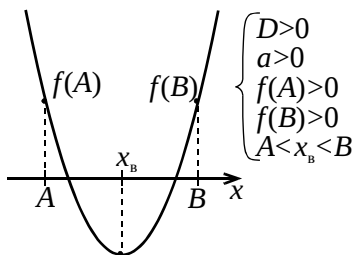


Рис. 5а

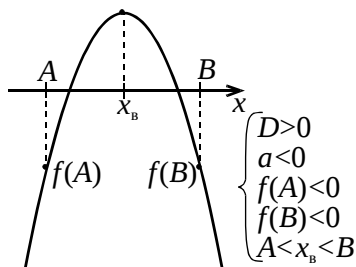


Рис. 5б

4°. Уравнение имеет два корня, лежащие в интервале $(A; B)$ (рис. 5).

Возможны также и другие случаи расположения корней (например, оба корня лежат вне некоторого отрезка $[A; B]$ и пр.), в которых надо самостоятельно нарисовать чертёж и сделать соответствующие выводы.

Замечания. 1. Для уравнений и неравенств вида $ax^2 + bx + c = 0$, $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$ **надо отдельно рассматривать случай** $a = 0$. Тогда получится *линейное* уравнение (неравенство).

2. В большинстве задач важно учесть *знак* числа a — от этого зависит направление ветвей параболы.

3. Заметим, что совокупность двух систем

$$\begin{cases} a > 0, \\ f(a) > 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} a < 0, \\ f(a) < 0 \end{cases}$$

равносильна неравенству $af(a) > 0$. Поэтому в условии 1° можно за-

писать одну систему
$$\begin{cases} D > 0, \\ af(A) > 0, \\ x_B < A. \end{cases}$$

Аналогично можно упростить и другие условия:

$$2^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} D > 0, \\ af(A) > 0, \\ x_B > A; \end{cases} \quad 3^\circ \Leftrightarrow af(A) < 0, \quad 4^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} D > 0, \\ af(A) > 0, \\ af(B) > 0, \\ A < x_B < B. \end{cases}$$

Перейдём к примерам.

Пример 11. При каких a уравнение $(2a-2)x^2 + (a+1)x + 1 = 0$ имеет корни, и все они принадлежат интервалу $(-2; 0)$?

Решение. 1) Если $2a-2=0$ ($a=1$), то уравнение принимает вид $2x+1=0$. Это уравнение имеет единственный корень $x=-0,5$, который принадлежит интервалу $(-2; 0)$. Значит, $a=1$ удовлетворяет условию задачи.

2) Если $2a-2 \neq 0$, то уравнение квадратное. Находим дискриминант:

$$D = (a+1)^2 - 4(2a-2) = a^2 - 6a + 9 = (a-3)^2.$$

Поскольку дискриминант является полным квадратом, находим корни⁷:

$$x = \frac{-a-1 \pm (a-3)}{4a-4} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{1-a}, \\ x = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Для выполнения условий задачи требуется, чтобы выполнялось неравенство $-2 < \frac{1}{1-a} < 0$, решая которое, находим, что $a > \frac{3}{2}$.

Ответ: $a \in \{1\} \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

Пример 12. При каких значениях a неравенство

$$4^{\sin x} - 2 \cdot (a-3) \cdot 2^{\sin x} + a+3 > 0$$

выполняется для всех x ?

Решение. Обозначим $2^{\sin x} = y$. Поскольку $-1 \leq \sin x \leq 1$, получаем, что

$$\frac{1}{2} \leq 2^{\sin x} \leq 2. \quad \text{Исходное неравенство принимает вид}$$

$$y^2 - 2(a-3)y + (a+3) > 0.$$

⁷ Как правило, вышеописанные приёмы с расположением корней удобно использовать, если формулы для корней громоздки. Если дискриминант является полным квадратом и корни получаются “хорошими”, то проще решить задачу напрямую.

Данная задача эквивалентна следующей: “при каких a неравенство $y^2 - 2(a-3)y + (a+3) > 0$

выполнено для всех $y \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$? »

График левой части этого неравенства – парабола с ветвями вверх. Требования задачи будут выполнены в двух случаях. 1)

$D < 0$ (тогда парабола целиком лежит выше оси абсцисс и неравенство выполнено для всех y (рис. 6, случай б)). 2) Если корни есть ($D \geq 0$), то они не должны лежать на отрезке $y \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$. (рис. 6, случаи а) и в)).

Переходим к вычислениям.

а) Это расположение параболы (корни находятся слева от отрезка $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$) задаётся условиями (записываем и решаем систему):

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ x_B < \frac{1}{2}, \\ f\left(\frac{1}{2}\right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-3)^2 - (a+3) \geq 0, \\ a-3 < \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{4} - (a-3) + a+3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in (-\infty; 1] \cup [6; +\infty), \\ a < \frac{7}{2}, \\ \frac{25}{4} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \leq 1.$$

б) Этот случай задаётся условием $D < 0 \Leftrightarrow a \in (1; 6)$.

в) Аналогично случаю а) получаем систему:

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ x_B > 2, \\ f(2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-3)^2 - (a+3) \geq 0, \\ a-3 > 2, \\ 4 - 4(a-3) + a+3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in (-\infty; 1] \cup [6; +\infty), \\ a > 5, \\ a < \frac{19}{3} \end{cases} \Leftrightarrow 6 \leq a < \frac{19}{3}.$$

Объединяя результаты, полученные в трёх пунктах, получаем, что

$$a < \frac{19}{3}.$$

Ответ: $a < \frac{19}{3}$.

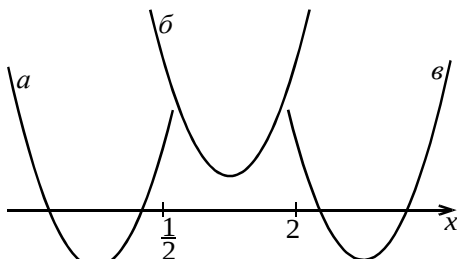


Рис. 6

Пример 13. При каких значениях a ровно один корень уравнения $ax^2 + (2a - 5)x + (a - 6) = 0$ лежит на отрезке $[0; 2]$?

Решение. 1) Рассматриваем случай $a = 0$ (тогда уравнение не квадратное). Уравнение принимает вид $-5x - 6 = 0$. Корней на отрезке $[0; 2]$ нет, поэтому $a = 0$ не подходит.

2) Уравнение квадратное. Обозначим левую часть уравнения через $f(x)$. Уравнение имеет на отрезке $[0; 2]$ ровно один корень в двух случаях.

А) Уравнение имеет единственный корень, и он принадлежит отрезку $[0; 2]$. Это возможно при $D = 0$. Вычисляем дискриминант:

$$D = (2a - 5)^2 - 4a(a - 6) = 4a + 25.$$

Дискриминант обращается в ноль при $a = -\frac{25}{4}$. При этом исходное уравнение принимает вид $-\frac{25}{4}x^2 - \frac{35}{2}x - \frac{49}{4} = 0$, откуда $x = -\frac{7}{5}$. Корней на отрезке $[0; 2]$ нет, значит, этот случай не реализуется ни при каких a .

Б) Уравнение имеет два корня $\left(D > 0 \Leftrightarrow a > -\frac{25}{4}\right)$, один из которых принадлежит отрезку $[0; 2]$, а другой – нет. Для выполнения этого условия необходимо и достаточно, чтобы либо (а) функция $f(x)$ принимала на концах отрезка $[0; 2]$ значения разных знаков – тогда корень лежит в интервале $(0; 2)$ (в качестве примера⁸ см. рис. 7), либо (б) в одном из концов отрезка обращалась в ноль – тогда корень лежит на одном из концов отрезка.

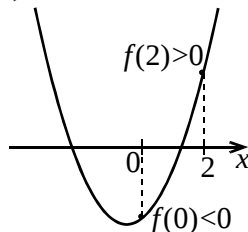


Рис. 7

(а) Условие “числа $f(0)$ и $f(2)$ имеют разные знаки” равносильно неравенству $f(0) \cdot f(2) < 0$, откуда

$$(a - 6)(4a + 2(2a - 5) + (a - 6)) < 0 \Leftrightarrow (a - 6)(9a - 16) < 0 \Leftrightarrow \frac{16}{9} < a < 6.$$

(б) Если $f(0) = 0$, то $a = 6$. Тогда уравнение принимает вид $6x^2 + 7x = 0$. Его корнями являются числа $x = 0$ и $x = -\frac{7}{6}$, т. е. на отрезке $[0; 2]$ оно имеет ровно один корень.

⁸ Можете самостоятельно рассмотреть и другие возможные расположения параболы.

Если $f(2)=0$, то $a=\frac{16}{9}$. Тогда получаем $\frac{16}{9}x^2 - \frac{13}{9}x - \frac{38}{9} = 0$, откуда $x=2$ или $x=-\frac{19}{16}$, т. е. опять из двух корней только один принадлежит отрезку $[0; 2]$.

Значит, оба значения $a=6$ и $a=\frac{16}{9}$ и удовлетворяют условию задачи⁹.

Объединяя результаты, получаем $a \in \left[\frac{16}{9}; 6\right]$.

Ответ: $\frac{16}{9} \leq a \leq 6$.

Пример 14. При каких значениях параметра a уравнение $|x^2 - 4|x| + 3| = a$ имеет ровно 8 решений?

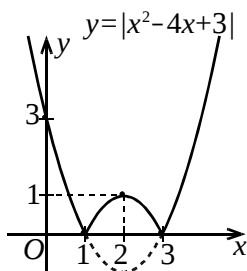


Рис. 8а

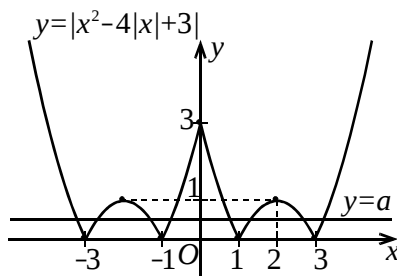


Рис. 8б

Решение. Изобразим графики левой и правой частей на плоскости xOy .

Чтобы построить график левой части, сначала изображаем параболу $y = x^2 - 4x + 3$. Затем отражаем все точки этой параболы, лежащие ниже оси абсцисс, относительно этой оси и получаем график функции $y = |x^2 - 4x + 3|$ (рис. 8а). Далее отбрасываем все точки, лежащие слева от оси абсцисс, а оставшиеся точки отражаем относительно этой оси — получаем график функции $y = |x^2 - 4|x| + 3|$.

⁹ при $f(2)=0$ или $f(0)=0$ обязательно надо найти второй корень и посмотреть, находится ли он на отрезке $[0; 2]$.

График правой части – это горизонтальная прямая $y = a$. Уравнение имеет 8 решений, когда эта прямая пересекает график $y = |x^2 - 4|x| + 3|$ в восьми точках. Несложно видеть, что это возможно при $0 < a < 1$.

Ответ: $a \in (0; 1)$.

Пример 15. Найдите все значения параметра p , при которых уравнение $4^x + 2^{x+2} + 7 = p - 4^{-x} - 2 \cdot 2^{1-x}$ имеет хотя бы одно решение.

Решение. Перепишем уравнение в виде $(4^x + 4^{-x}) + 4 \cdot (2^x + 2^{-x}) = p - 7$ и сделаем замену $2^x + 2^{-x} = t$. Возводя обе части последнего равенства в квадрат, получаем, что $t^2 = (2^x + 2^{-x})^2 = 4^x + 2 + 4^{-x}$, откуда $4^x + 4^{-x} = t^2 - 2$. Уравнение принимает вид $t^2 - 2 + 4t = p - 7 \Leftrightarrow (t + 2)^2 = p - 1$.

Найдём множество значений левой части уравнения. Поскольку $t \geq 2$, получаем, что левая часть уравнения принимает значения из промежутка $[16; +\infty)$.

Уравнение имеет хотя бы одно решение, если правая часть принадлежит этому же промежутку, т. е. при $p - 1 \geq 16$, откуда $p \geq 17$.

Ответ: $p \geq 17$.

Пример 16. Найдите все значения параметра a , при которых для любого положительного значения b уравнение

$$\log_2(1 - x - x^2) = a \cdot \log_{(1-x-x^2)} 2 + b$$

имеет хотя бы одно решение, принадлежащее интервалу $(0; \frac{1}{2})$.

¹⁰ Используем, что сумма двух взаимно обратных положительных чисел не меньше двух: $a + \frac{1}{a} \geq 2$ при $a > 0$ (равенство возможно только при $a = 1$). Это можно доказать, например, с помощью неравенства Коши: для положительных чисел среднее арифметическое не меньше среднего геометрического $(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{k} \geq \sqrt[k]{a_1 a_2 \dots a_k})$, причём равенство достигается только в случае $a_1 = a_2 = \dots = a_k$. Для двух положительных чисел это неравенство принимает вид $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Если сюда подставить $b = \frac{1}{a}$, то получится требуемое неравенство.

Решение. Определим множество значений функции $f(x) = \log_2(1 - x - x^2)$ при $x \in (0; \frac{1}{2})$. График функции $g(x) = 1 - x - x^2$ – парабола с ветвями вниз, вершина которой имеет абсциссу $x_{\text{в}} = -\frac{1}{2}$. Поскольку промежуток $x \in (0; \frac{1}{2})$ находится справа от вершины, функция на нём убывает, и своё наибольшее значение она принимает в точке 0, а наименьшее – в точке $\frac{1}{2}$.

Итак, если $x \in (0; \frac{1}{2})$, то функция $g(x)$ принимает все значения из промежутка $(g(\frac{1}{2}); g(0))$, т.е. из интервала $(\frac{1}{4}; 1)$. Значит, множеством значений $f(x) = \log_2 g(x)$ является интервал $(-2; 0)$.

Перепишем уравнение в виде $\log_2(1 - x - x^2) = a \cdot \frac{1}{\log_2(1 - x - x^2)} + b$

и сделаем замену $t = \log_2(1 - x - x^2)$. Получаем уравнение $t = \frac{a}{t} + b$.

Каждому значению $t \in (-2; 0)$ соответствует ровно одно значение $x \in (0; \frac{1}{2})$, а для всех остальных t значения переменной x , если они существуют, не будут принадлежать промежутку $(0; \frac{1}{2})$. Поэтому для нового уравнения задачу можно сформулировать задачу так: “ найти все значения параметра a , при которых для любого положительного значения b уравнение $t = \frac{a}{t} + b$ имеет хотя бы одно решение, принадлежащее интервалу $(-2; 0)$ ”.

Перепишем это уравнение¹¹ в виде $t^2 - bt - a = 0$. Графиком функции $h(t) = t^2 - bt - a$ является парабола с ветвями вверх, причём по условию абсцисса вершины этой параболы положительна $(x_{\text{в}} = \frac{b}{2} > 0)$. Таким образом, если это уравнение имеет корни, то по крайней мере один из них положителен. Для того чтобы второй корень лежал в интервале $(-2; 0)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись два условия: $h(0) < 0$, $h(-2) > 0$ (см. рис. 9).

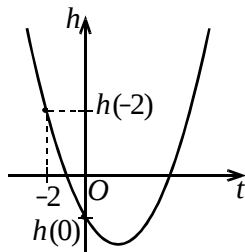


Рис. 9

¹¹ Условие $t \neq 0$ можно отбросить, так как нас интересуют только решения из промежутка $(-2; 0)$.

Получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} -a < 0, \\ 4 + 2b - a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, \\ a < 4 + 2b. \end{cases}$$

Необходимо, чтобы эти условия выполнялись при любых положительных значениях b , откуда следует, что $0 < a \leq 4$.

Ответ: $0 < a \leq 4$.

§3. Аналитические методы решения задач с параметрами

Пример 17. Найдите все значения параметра p , при каждом из которых уравнение $8\sin^3 x = p + 9\cos 2x$ не имеет решений.

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$8\sin^3 x = p + 9(1 - 2\sin^2 x), \quad 8\sin^3 x + 18\sin^2 x = p + 9$$

и найдём множество значений левой части получившегося уравнения. Для этого обозначим $\sin x = t$ и рассмотрим функцию $f(t) = 8t^3 + 18t^2$ при $t \in [-1; 1]$. Её производная равна $f'(t) = 24t^2 + 36t = 12t(2t + 3)$. На отрезке $[-1; 1]$ производная обращается в ноль при $t = 0$, положительна при $t > 0$ и отрицательна при $t < 0$. Значит, при $t \in [-1; 0]$ функция убывает, а при $t \in [0; 1]$ – возрастает. Наименьшее значение функции $f(t)$ на отрезке – это $f(0) = 0$. Чтобы определить наибольшее значение, найдём значения $f(t)$ на концах отрезка: $f(-1) = 10$, $f(1) = 26$. Значит, наибольшее значение равно 26, и функция $f(t)$ принимает все значения из отрезка $[0; 26]$.

Следовательно, данное уравнение имеет решения при $p + 9 \in [0; 26]$, т.е. при $p \in [-9; 17]$, а при всех остальных p решений нет.

Ответ: $p \in (-\infty; -9) \cup (17; +\infty)$.

Пример 18. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $\log_3(3^x + \log_3 a) = 2x$ имеет ровно одно решение.

Решение. Данное уравнение равносильно следующему¹²:

$$3^x + \log_3 a = 3^{2x}, \quad 3^{2x} - 3^x - \log_3 a = 0.$$

Делаем замену $3^x = t$. Получаем уравнение

$$t^2 - t - \log_3 a = 0. \quad (4)$$

¹² Условие положительности подлогарифмического выражения можно опустить, так как в новом уравнении выходит, что оно равно 3^{2x} , а $3^{2x} > 0$ при всех x .

Исходное уравнение имеет ровно одно решение тогда и только тогда, когда уравнение (4) имеет ровно одно *положительное* решение. Это возможно в двух случаях.

1) Уравнение (4) имеет ровно одно решение и это решение положительно.

Это может быть, если $D = 1 + 4\log_3 a = 0$, откуда $a = 3^{-\frac{1}{4}}$. Тогда получаем, что $t = \frac{1}{2}$, т. е. (4) имеет один положительный корень.

2) Уравнение (4) имеет два корня, один из которых положителен, а другой – нет. В этом случае удобно разобрать два варианта.

а) Одним из корней уравнения является $t = 0$. Подставляя это значение t в (4), находим, что $\log_3 a = 0$ ($a = 1$). Тогда (4) принимает вид $t^2 - t = 0$, т. е. действительно имеет ровно один положительный корень. Значит, $a = 1$ подходит.

б) Один из корней положителен, а второй – отрицателен. Для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $-\log_3 a < 0$ (см. стр. 8, свойство 3°), откуда $a > 1$.

Объединяя результаты, получаем $a \in \left\{ \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \right\} \cup [1; +\infty)$.

Ответ: $a \in \left\{ \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \right\} \cup [1; +\infty)$.

Пример 19. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} 3 \cdot 2^{|x|} + 5|x| + 4 = 3y + 5x^2 + 3a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

Решение. Заметим, что если пара чисел $(x_0; y_0)$ является решением этой системы, то пара чисел $(-x_0; y_0)$ также является решением¹³. Поэтому если решение единственно, то оно имеет вид $(0; y_0)$. Подставляя в систему $x = 0$, получаем

$$\begin{cases} 3 + 0 + 4 = 3y + 0 + 3a, \\ 0 + y^2 = 1, \end{cases}$$

¹³ Так как при замене $x \rightarrow -x$ оба уравнения системы не изменяются.

откуда находим, что $a = \frac{10}{3}$ или $a = \frac{4}{3}$. Все остальные значения a нам не подходят (так как при них система не имеет решений вида $(0; y_0)$, поэтому ровно одного решения быть не может).

Проверим¹⁴, подходят ли значения $a = \frac{10}{3}$ и $a = \frac{4}{3}$. Для этого подставляем найденные a в исходную систему.

$$1) \text{ При } a = \frac{10}{3} \text{ получаем систему } \begin{cases} 3 \cdot 2^{|x|} + 5|x| = 3y + 5x^2 + 6, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Заметим, что пара чисел $(1; 0)$ является решением этой системы. Но тогда $(-1; 0)$ также является решением. Значит, система имеет более одного решения, поэтому $a = \frac{10}{3}$ не подходит¹⁵.

$$2) \text{ При } a = \frac{4}{3} \text{ получаем } \begin{cases} 3 \cdot 2^{|x|} + 5|x| = 3y + 5x^2, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы следует, что каждая из переменных по модулю не превосходит единицы. Перепишем первое уравнение системы в виде

$$3 \cdot (2^{|x|} - y) = 5(x^2 - |x|). \quad (5)$$

Заметим, что при $x \in [-1; 1]$ и $y \in [-1; 1]$ левая часть уравнения (5) неотрицательна, а правая – не положительна. Действительно, $2^{|x|} \geq 2^0 = 1$, тогда как $y \leq 1$; кроме того, на промежутке $x \in [-1; 1]$ выполняется неравенство $x^2 \leq |x|$. Значит, равенство в (5) может достигаться, только если левая и правая части обращаются в ноль, что возможно при $x = 0$, $y = 1$. Заметим, что эта пара чисел также удовлетво-

¹⁴ Почему надо проверять? Давайте задумаемся, что происходит с системой при найденных значениях параметра. Мы нашли те значения a , при которых она имеет решения вида $(0; y_0)$. Но никто не гарантирует нам, что такое решение будет единственным. Могут также присутствовать какие-либо другие решения. Действительно, нет такой теоремы: “если система уравнений имеет решение вида $(0; y_0)$, то других решений быть не может”.

¹⁵ Находить все решения системы не требуется – достаточно выяснить, единственно ли решение.

ряет второму уравнению системы. Таким образом, при $a = \frac{4}{3}$ система имеет решение $(0; 1)$ и это решение единственно.

Ответ: $a = \frac{4}{3}$.

Пример 20. Найдите все значения параметра b , при каждом из которых уравнение $|bx^2 + 3| = |2bx| + 3|b|$ имеет хотя бы одно решение.

Решение. Если $b = 0$, то уравнение принимает вид $3 = 0$ и решений нет.

При $b \neq 0$ можно переписать уравнение в виде $|b| \cdot \left| x^2 + \frac{3}{b} \right| = |b| \cdot 2|x| + 3|b|$.

Разделив обе части на положительное число $|b|$, получаем уравнение $\left| x^2 + \frac{3}{b} \right| = 2|x| + 3$. Поскольку правая часть положительна при всех x , уравнение равносильно совокупности

$$\begin{cases} x^2 + \frac{3}{b} = 2|x| + 3, \\ x^2 + \frac{3}{b} = -2|x| - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2|x| + \frac{3}{b} - 3 = 0, \\ x^2 + 2|x| + \frac{3}{b} + 3 = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Сделаем замену $|x| = t$. Для того, чтобы совокупность (6) имела хотя бы одно решение необходимо и достаточно, чтобы следующая совокупность имела хотя бы одно *положительное* решение:

$$\begin{cases} t^2 - 2t + \frac{3}{b} - 3 = 0, \\ t^2 + 2t + \frac{3}{b} + 3 = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Для этого надо, чтобы хотя бы одно из уравнений в (7) имело положительный корень. Иногда задачи такого рода удобно решать “в лоб”.

Находим корни обоих уравнений: $t = 1 \pm \sqrt{4 - \frac{3}{b}}$ и $t = -1 \pm \sqrt{-2 - \frac{3}{b}}$.

Для того, чтобы хотя бы одно из этих чисел было положительным¹⁶,

¹⁶ При решении задач с параметром иногда удобно использовать следующие утверждения:

- хотя бы одно из чисел положительно $\Leftrightarrow$ наибольшее из чисел положительно;
- все числа положительны $\Leftrightarrow$ наименьшее из чисел положительно;
- хотя бы одно из чисел отрицательно $\Leftrightarrow$ наименьшее из чисел отрицательно;
- все числа отрицательны $\Leftrightarrow$ наибольшее из чисел отрицательно.

необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{cases} 1 + \sqrt{4 - \frac{3}{b}} > 0, \\ -1 + \sqrt{-2 - \frac{3}{b}} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \in (-\infty; 0) \cup \left[\frac{3}{4}; +\infty\right), \\ -1 < b < 0 \end{cases} \Leftrightarrow b \in (-\infty; 0) \cup \left[\frac{3}{4}; +\infty\right).$$

Ответ: $b \in (-\infty; 0) \cup \left[\frac{3}{4}; +\infty\right).$

Замечание. Не отрицательность дискриминантов в (7) была учтена при решении иррациональных неравенств (ОДЗ).

Пример 21. При каких значениях параметра a уравнение $\lg(x^2 - 6x + 8)^{\log_2 10} = \log_2(ax - 17)$ имеет ровно одно решение?

Решение. Данное уравнение равносильно следующему:

$$\begin{aligned} \log_2 10 \cdot \lg(x^2 - 6x + 8) &= \log_2(ax - 17) \Leftrightarrow \log_2(x^2 - 6x + 8) = \log_2(ax - 17) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x + 8 = ax - 17, \\ x^2 - 6x + 8 > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Перепишем систему в виде

$$\begin{cases} x^2 - (a + 6)x + 25 = 0, \\ x \in (-\infty; 2) \cup (4; +\infty). \end{cases} \quad (8)$$

Система (8) имеет ровно одно решение в двух случаях.

1) Уравнение имеет ровно один корень, и этот корень удовлетворяет условию

$$x \in (-\infty; 2) \cup (4; +\infty). \quad (9)$$

Это возможно, если дискриминант обращается в ноль.

$$D = (a + 6)^2 - 100 = (a + 6 + 10)(a + 6 - 10) = (a + 16)(a - 4).$$

Если речь идёт о корнях квадратного уравнения, то нередко можно понять, какой из корней больше, а какой меньше, поэтому если мы знаем, что $x_1 < x_2$, то от совокупности неравенств $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ можно перейти к одному неравенству $x_2 \geq 0$.

Иногда данными утверждениями удобно пользоваться в обратную сторону. Например, требуется определить, при каких x меньшее из чисел $f(x)$ и $g(x)$ больше единицы. Если неизвестно, какое из чисел $f(x)$ или $g(x)$ больше, то можно перейти к системе неравенств $f(x) > 1$, $g(x) > 1$.

Если $a=4$, то уравнение в (8) принимает вид $x^2 - 10x + 25 = 0$, откуда $x=5$, что удовлетворяет условию (9).

Если $a=-16$, то уравнение в (8) принимает вид $x^2 + 10x + 25 = 0$, откуда $x=-5$, что также удовлетворяет условию (9).

2) Уравнение в (8) имеет ровно 2 корня, из которых только один удовлетворяет условию.

Чтобы были 2 корня, дискриминант должен быть положителен, откуда $a \in (-\infty; -16) \cup (4; +\infty)$. Один из корней уравнения должен принадлежать отрезку $[2; 4]$, а другой – нет. Удобнее разбить этот случай ещё на два.

а) Одним из корней уравнения является $x=2$ или $x=4$. Подставляя в уравнение системы (8) $x=2$, находим, что $a = \frac{17}{2}$. При этом a уравнение принимает вид $x^2 - \frac{29}{2}x + 25 = 0$, откуда $x=2$ или $x = \frac{25}{2}$. Система (8) имеет одно решение, поэтому $a = \frac{17}{2}$ подходит.

Аналогично действуем в случае, когда одним из корней является $x=4$. Находим, что $a = \frac{17}{4}$ и подстановкой этого значения в (8) убеждаемся, что оно подходит.

б) Один из корней лежит на интервале $x \in (2; 4)$, а другой – на множестве $x \in (-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$. Чтобы понять, при каких условиях это выполняется, нарисуем график левой части уравнения

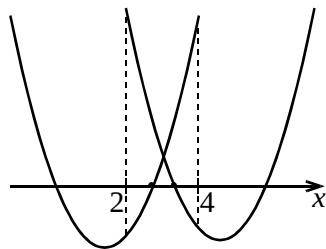


Рис. 10

($f(x) = x^2 - (a+6)x + 25$ – парабола с ветвями вверх – см. рис. 10.) Заметим, что в обоих случаях должно выполняться условие $f(2) \cdot f(4) < 0$.

Получаем неравенство $(4 - 2(a+6) + 25)(16 - 4(a+6) + 25) < 0$, решая которое, находим, что $a \in \left(\frac{17}{4}; \frac{17}{2}\right)$.

Объединяя все полученные результаты, получаем:

$$a \in \{-16; 4\} \cup \left[\frac{17}{4}; \frac{17}{2}\right].$$

Ответ: $a \in \{-16; 4\} \cup \left[\frac{17}{4}; \frac{17}{2}\right]$.

Замечание. В итоге нам подошли все значения a , при которых $f(2) \cdot f(4) \leq 0$. Почему же мы отдельно разбирали случай, когда $f(2)=0$ или $f(4)=0$? Всё, что можно сказать об уравнении системы (8) при $f(2)=0$ – это, что $x=2$ является его корнем; при этом неизвестно, будет ли второй корень уравнения удовлетворять условию (9).

Пример 22. Найдите все пары чисел $(a; b)$, при которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + a(x+y) = -x + y - a, \\ x^2 + y^2 + bxy = 1 \end{cases}$$

имеет не менее пяти решений $(x; y)$.

Решение. Разложим первое уравнение на множители:

$$\begin{aligned} (x-y)(x+y) + a(x+y) = -x + y - a &\Leftrightarrow (x-y+a)(x+y) = -x + y - a \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x-y+a)(x+y+1) = 0. \end{aligned}$$

Тогда система равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x - y + a = 0, \\ x^2 + y^2 + bxy = 1, \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = y - a, \\ (y - a)^2 + y^2 + b(y - a)y = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} x + y + 1 = 0, \\ x^2 + y^2 + bxy = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -y - 1, \\ (y + 1)^2 + y^2 - b(y + 1)y = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = y - a, \\ (2 + b)y^2 - a(b + 2)y + a^2 - 1 = 0, \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -y - 1, \\ (2 - b)y^2 + (2 - b)y = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Количество решений каждой из систем равно количеству решений её второго уравнения¹⁷. Если числа $(2 + b)$ и $(2 - b)$ отличны от нуля, то второе уравнение каждой из систем является квадратным, следовательно, имеет не более двух решений. Тогда вся совокупность имеет не более четырёх решений.

¹⁷ Действительно, из первого уравнения системы для каждого y находится единственное значение x .

Если $2 - b = 0$, то второе уравнение второй системы выполняется при любых y , т. е. вторая система, а вместе с ней и вся совокупность, имеют бесконечно много решений¹⁸. При этом параметр a может принимать любые значения.

Если $2 + b = 0$, то $b = -2$ и вторая система имеет два решения. Тогда в первой системе нам нужно получить по крайней мере 3 решения¹⁹.

При $b = -2$ первая система принимает вид
$$\begin{cases} x = y - a, \\ a^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет бесконечно много решений при $a = 1$ или $a = -1$ и не имеет решений при других a .

Ответ: $(1; -2), (-1; -2), (t; 2), t \in R$.

Пример 23. Найдите все значения параметров a и b , при которых уравнения $2x^2 - ax - 8 = 0$ и $x^3 + bx - 16 = 0$ имеют два общих корня.

Решение. Пусть x_0 – общий корень уравнений. Тогда при подстановке $x = x_0$ оба данных уравнения превращаются в верные равенства. Это означает, что общий корень x_0 является решением системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_0^2 - ax_0 - 8 = 0, \\ x_0^3 + bx_0 - 16 = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Так как общих корней должно быть два, то система (10) должна иметь два решения.

Из второго уравнения системы, умноженного на 2, вычтем первое уравнение системы, умноженное на x_0 . Получаем

$$2bx_0 - 32 + ax_0^2 + 8x_0 = 0. \quad (11)$$

Сложим уравнение (11) с первым уравнением системы (10), умноженным на $\left(-\frac{a}{2}\right)$:

$$\left(\frac{a^2}{2} + 2b + 8\right)x_0 + (4a - 32) = 0. \quad (12)$$

¹⁸ Количество решений первой системы нас тогда не интересует.

¹⁹ При этом они не должны совпадать с решениями второй системы!

Любое решение системы (10) удовлетворяет также уравнению (12), поэтому (12) должно иметь два решения, что возможно только при $\frac{a^2}{2} + 2b + 8 = 0$ и $4a - 32 = 0$.

Решая эти два уравнения, получаем $a = 8$, $b = -20$.

Подставим найденные значения параметров в систему (10) и убедимся, что она действительно имеет два решения²⁰:

$$\begin{cases} 2x_0^2 - 8x_0 - 8 = 0, \\ x_0^3 - 20x_0 - 16 = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим второе уравнение. Подбирая у него целочисленный корень $x_0 = -4$ и выполняя деление левой части на $(x_0 + 4)$, получаем $(x_0 + 4)(x_0^2 - 4x_0 - 4) = 0$. Значит, уравнения системы имеют два общих корня, и система имеет два решения.

Ответ. $a = 8$, $b = -20$.

Пример 24. При каких значениях a система

$$\begin{cases} 2^x(y+1)(1-y \cdot 2^x) = a^3, \\ (1+2^x)(1-y \cdot 2^x) = a \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

Решение. Если $a = 0$, то система имеет решения (любая пара чисел, удовлетворяющая условию $1 - y \cdot 2^x = 0$, является решением системы, например, $x = 0$, $y = 1$).

Если $a \neq 0$, то обе части уравнений отличны от нуля, поэтому имеем право разделить первое уравнение на второе. Получаем

$$\frac{2^x}{2^x + 1}(y + 1) = a^2, \text{ откуда}$$

$$y = a^2 + a^2 \cdot 2^{-x} - 1. \quad (13)$$

²⁰ Для чего надо подставлять? Дело в том, что уравнение (12) является следствием системы (10), т.е. каждое решение системы является также решением уравнения. Обратное, вообще говоря, неверно, т.е. решения уравнения (12) могут и не удовлетворять системе (10). При найденных значениях параметров уравнение (12) имеет бесконечно много решений. Далее надо проверить, имеет ли система (10) 2 решения.

Подставляем это во второе уравнение исходной системы и преобразуем:

$$(1+2^x)(1-2^x \cdot a^2 - a^2 + 2^x) = a \Leftrightarrow (1+2^x)^2(1-a^2) = a. \quad (14)$$

Для того, чтобы система имела хотя бы одно решение, необходимо и достаточно, чтобы уравнение (14) имело хотя бы одно решение (так как каждому значению x , найденному из (14), соответствует единственное значение y из (13)).

При $a = \pm 1$ уравнение (14) не имеет решений, а при всех остальных a оно равносильно следующему: $(1+2^x)^2 = \frac{a}{1-a^2}$. Множество значений функции в левой части уравнения – это промежуток $(1; +\infty)$.

Поэтому уравнение имеет хотя бы одно решение при $\frac{a}{1-a^2} \in (1; +\infty)$, откуда $a \in \left(-\frac{\sqrt{5}+1}{2}; -1\right) \cup \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}; 1\right)$.

Не забываем добавить в ответ также $a=0$, полученное нами в начале решения.

Ответ. $a \in \left(-\frac{\sqrt{5}+1}{2}; -1\right) \cup \{0\} \cup \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}; 1\right)$.

§4. Графические методы решения задач с параметрами

Пример 25. для каждого значения параметра a решите неравенство $|2x+a| \leq x+2$.

Решение. Сначала решим вспомогательную задачу. Рассмотрим данное неравенство как неравенство с двумя переменными x и a и изобразим на координатной плоскости xOa все точки, координаты которых удовлетворяют неравенству.

Если $2x+a \geq 0$ (т.е. на прямой $a = -2x$ и выше), то получаем $2x+a \leq x+2 \Leftrightarrow a \leq 2-x$.

Если $2x+a < 0$ (т.е. ниже прямой $a = -2x$), то получаем $-2x-a \leq x+2 \Leftrightarrow a \geq -2-3x$.

Множество изображено на рис. 11.

Теперь решим с помощью этого чертежа исходную задачу. Если мы фиксируем a , то

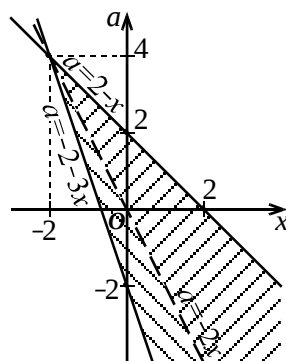


Рис. 11

получаем горизонтальную прямую $a = \text{const}$. Чтобы определить значения x , надо найти абсциссы точек пересечения этой прямой с множеством решения неравенства. Например, если $a = 8$, то неравенство не имеет решений (прямая не пересекает множество); если $a = 1$, то решениями являются все x из отрезка $[-1; 1]$ и т. д. Итак, возможны три варианта.

1) Если $a > 4$, то решений нет.

2) Если $a = 4$, то $x = -2$.

3) Если $a < 4$, то решением неравенства является отрезок, причём левый конец отрезка лежит на прямой $a = -3x - 2$, а правый – на прямой $a = 2 - x$, т.е. $x \in \left[-\frac{a+2}{3}; 2-a\right]$.

Ответ: при $a < 4$ – $x \in \left[-\frac{a+2}{3}; 2-a\right]$;

при $a = 4$ – $x = -2$;

при $a > 4$ – решений нет.

Пример 26. Найдите все значения параметра a , при которых неравенство $3 - |x - a| > x^2$ а) имеет хотя бы одно решение; б) имеет хотя бы одно положительное решение.

Решение. Перепишем неравенство в виде $3 - x^2 > |x - a|$. Построим графики левой и правой частей на плоскости xOy . График левой части – это парабола с ветвями вниз с вершиной в точке $(0; 3)$. График пересекает ось абсцисс в точках $(\pm\sqrt{3}; 0)$. График правой части – это угол с вершиной на оси абсцисс, стороны которого направлены вверх под углом 45° к осям координат. Абсцисса вершины – точка $x = a$.

а) Для того, чтобы неравенство имело хотя бы одно решение, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы в одной точке парабола оказалась выше графика $y = |x - a|$. Это будет выполнено, если вершина уголка лежит

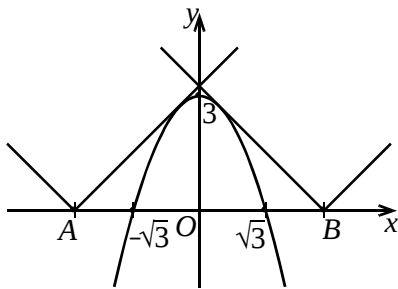


Рис. 12

между точками A и B оси абсцисс (см. рис. 12 – точки A и B не включаются). Таким образом, надо определить, при каком положении вершины одна из ветвей уголка касается параболы.

Рассмотрим случай, когда вершина уголка находится в точке A . Тогда правая ветвь уголка касается параболы. Её угловой коэффициент равен единице. Значит производная функции $y = 3 - x^2$ в точке касания равна 1, т. е. $-2x = 1$, откуда $x = -\frac{1}{2}$. Тогда ордината точки касания равна $y = 3 - (-\frac{1}{2})^2 = \frac{11}{4}$. Уравнение прямой, имеющей угловой коэффициент $k = 1$ и проходящей через точку с координатами $(-\frac{1}{2}; \frac{11}{4})$, следующее²¹: $y - \frac{11}{4} = 1 \cdot (x + \frac{1}{2})$, откуда $y = x + \frac{13}{4}$. Это уравнение правой ветви уголка. Абсцисса точки пересечения с осью x равна $-\frac{13}{4}$, т. е. точка A имеет координаты $A(-\frac{13}{4}; 0)$. Из соображений симметрии точки B , она имеет координаты: $B(\frac{13}{4}; 0)$.

Отсюда получаем, что $a \in (-\frac{13}{4}; \frac{13}{4})$.

б) Неравенство будет иметь положительные решения, если вершина уголка находится между точками F и B (см. рис. 13). Найти положение точки F несложно: если вершина уголка находится в точке F , то его правая ветвь (прямая, задаваемая уравнением $y = x - a$) проходит через точку $(0; 3)$. Отсюда находим, что $a = -3$ и $F(-3; 0)$. Следовательно, $a \in (-3; \frac{13}{4})$.

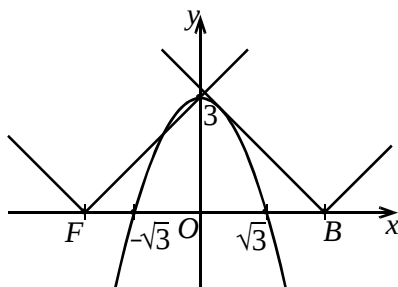


Рис. 13

Ответ: а) $a \in (-\frac{13}{4}; \frac{13}{4})$, б) $a \in (-3; \frac{13}{4})$.

²¹Полезные формулы:

– прямая, проходящая через точку $(x_0; y_0)$ и имеющая угловой коэффициент k , задаётся уравнением $y - y_0 = k(x - x_0)$; – угловой коэффициент прямой, проходящей через точки $(x_0; y_0)$ и $(x_1; y_1)$, где $x_0 \neq x_1$, вычисляется по фор-

муле $k = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$.

Замечание. Если надо найти значение параметра, при котором касаются прямая $y = kx + l$ и парабола $y = ax^2 + bx + c$, то можно записать условие, что уравнение $kx + l = ax^2 + bx + c$ имеет ровно одно решение.

Тогда другой способ найти значения параметра a , при котором вершина уголка находится в точке A , следующий: уравнение $x - a = 3 - x^2$ имеет ровно одно решение $\Leftrightarrow D = 1 + 4(a + 3) = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{13}{4}$.

Обратите внимание, что таким образом нельзя записать условие касания прямой с произвольным графиком. Например, прямая $y = 3x - 2$ касается кубической параболы $y = x^3$ в точке $(1; 1)$ и пересекает её в точке $(-2; -8)$, т. е. уравнение $x^3 = 3x - 2$ имеет два решения.

Пример 27. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $(a + 1 - |x + 2|)(x^2 + 4x + 1 - a) = 0$ имеет а) ровно два различных корня; б) ровно три различных корня.

Решение. Поступим так же, как и в примере 25. Изобразим множество решений этого уравнения на плоскости xOa . Оно равносильно совокупности двух уравнений:

1) $a = |x + 2| - 1$ — это угол с ветвями вверх и вершиной в точке $(-2; -1)$.

2) $a = x^2 + 4x + 1$ — это парабола с ветвями вверх и вершиной в точке $(-2; -3)$. См. рис. 14.

Находим точки пересечения двух графиков. Правая ветвь угла задаётся уравнением $y = x + 1$. Решая уравнение $x + 1 = x^2 + 4x + 1$, находим, что $x = 0$ или $x = -3$. Подходит только значение $x = 0$ (т.к. для правой ветви $x + 2 \geq 0$). Тогда $a = 1$. Аналогично находим координаты второй точки пересечения — $(-4; 1)$.

Возвращаемся к исходной задаче. Уравнение имеет ровно два решения при тех a , при которых горизонтальная прямая $a = \text{const}$ пересекает множество решений уравнения в двух точках. По графику видим, что это выполняется при $a \in (-3; -1) \cup \{1\}$. Ровно три решения будут в случае трёх точек пересечения, что возможно только при $a = -1$.

Ответ: а) $a \in (-3; -1) \cup \{1\}$; б) $a = -1$.

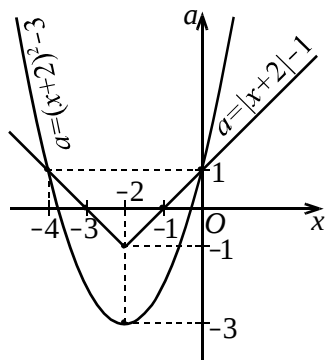


Рис. 14

Пример 28. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 - x + a \leq 0, \\ x^2 + 2x - 6a \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

Решение. Изобразим решения системы неравенств на плоскости xOa . Перепишем систему в виде

$$\begin{cases} a \leq -x^2 + x, \\ a \geq \frac{x^2 + 2x}{6}. \end{cases}$$

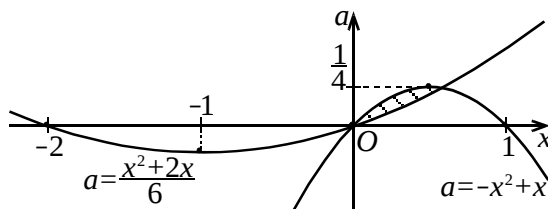


Рис. 15

Первому неравенству удовлетворяют точки, лежащие на параболе $a = -x^2 + x$ и ниже неё, а второму – точки, лежащие на параболе $a = \frac{x^2 + 2x}{6}$ и выше неё. Находим координаты вершин парабол и точек их пересечения, а затем строим график. Вершина первой параболы – $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$, второй параболы – $\left(-1; -\frac{1}{6}\right)$, точки пересечения – $(0; 0)$ и $\left(\frac{4}{7}; \frac{12}{49}\right)$. Множество точек, удовлетворяющих системе, изображено на рис. 15. Видно, что горизонтальная прямая $a = \text{const}$ имеет с этим множеством ровно одну общую точку (а значит, система имеет ровно одно решение) в случаях $a = 0$ и $a = \frac{1}{4}$.

Ответ: $a = 0$, $a = \frac{1}{4}$.

Пример 29. Найдите наименьшее значение параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 3a^2 = 2y + 2\sqrt{3}ax, \\ \sqrt{3}|x| - y = 4 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Преобразуем первое уравнение, выделяя полные квадраты:

$$(x^2 - 2\sqrt{3}ax + 3a^2) + (y^2 - 2y + 1) = 1 \Leftrightarrow (x - a\sqrt{3})^2 + (y - 1)^2 = 1. \quad (15)$$

В отличие от предыдущих задач здесь лучше изобразить чертёж²² на плоскости xOy . Уравнение (15) задаёт окружность с центром $(a\sqrt{3}; 1)$ радиуса 1. Центр этой окружности в зависимости от значения a может находиться в любой точке прямой $y = 1$.

Второе уравнение системы $y = \sqrt{3}|x| - 4$ задаёт угол со сторонами вверх под углом 60° к оси абсцисс²³ с вершиной в точке $(0; -4)$.

Данная система уравнений имеет ровно одно решение, если окружность касается одной из ветвей уголка. Это возможно в четырёх случаях (рис. 16): центр окружности может находиться в одной из точек A, B, C, D . Поскольку нам надо найти наименьшее значение параметра a , нас интересует абсцисса точки D . Рассмотрим прямоугольный треугольник DHM . Расстояние от точки D до прямой HM равно радиусу окружности, поэтому $DH = 1$. Значит,

$$DM = \frac{DH}{\sin 60^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}}. \quad \text{Координаты}$$

точки M находятся как координаты точки пересечения двух прямых $y = 1$ и $y = -\sqrt{3}x - 4$ (левая сторона угла). Получаем $M\left(-\frac{5}{\sqrt{3}}; 1\right)$. То-

гда абсцисса точки D равна $-\frac{5}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{7}{\sqrt{3}}$.

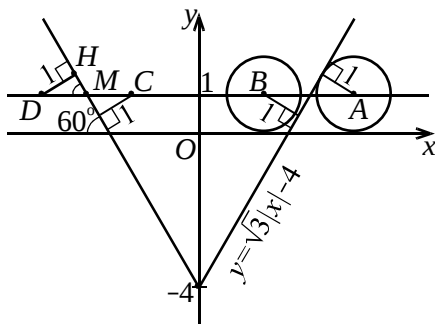


Рис. 16

²² Чертёж в плоскости “переменная – параметр” обычно используется для задач с одной переменной и одним параметром – в результате получается множество на плоскости. В данной задаче мы имеем дело с двумя переменными и параметром. Изобразить множество точек $(x; y; a)$ в трёхмерном пространстве – это трудная задача; к тому же, такой чертёж вряд ли получится наглядным.

²³ Угловым коэффициентом прямой – это тангенс угла наклона, а $\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$.

Поскольку абсцисса центра окружности равна $a\sqrt{3}$, откуда следует, что $a = -\frac{7}{3}$.

Ответ: $a = -\frac{7}{3}$.

Пример 28. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |4x + 3y| \leq 12a, \\ x^2 + y^2 \leq 14ax + 6ay - 57a^2 + 16a + 64 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

Решение. Изобразим множества решений каждого из неравенств на плоскости xOy .

Во втором неравенстве выделим полные квадраты:

$$x^2 - 14ax + 49a^2 + y^2 - 6ay + 9a^2 \leq a^2 + 16a + 64 \Leftrightarrow (x - 7a)^2 + (y - 3a)^2 \leq (a + 8)^2 \quad (16)$$

При $a + 8 = 0$ ($a = -8$) неравенство (16) задаёт точку с координатами $(7a; 3a)$, т. е. $(-56; -24)$. При всех остальных значениях a (16) задаёт круг с центром в точке $(7a; 3a)$ радиуса $|a + 8|$.

Рассмотрим первое неравенство.

1) Очевидно, что при отрицательных a оно не имеет решений. Значит, не имеет решений и система.

2) Если $a = 0$, то получаем прямую $4x + 3y = 0$. Из второго неравенства при этом получается круг с центром $(0; 0)$ радиуса 8. Очевидно, выходит более одного решения.

3) Если $a > 0$, то данное неравенство равносильно двойному неравенству $-12a \leq 4x + 3y \leq 12a$. Оно задаёт полосу между двумя

прямыми $y = \pm 4a - \frac{4x}{3}$, каждая из

которых параллельна прямой $4x + 3y = 0$ (рис. 17).

Поскольку мы рассматриваем $a > 0$, центр круга расположен в первой четверти на прямой $y = \frac{3x}{7}$. Действительно, координаты центра –

это $x = 7a$, $y = 3a$; выражая a и приравнявая, получаем $\frac{x}{7} = \frac{y}{3}$, откуда

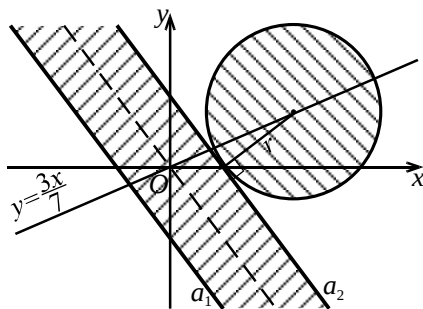


Рис. 17

$y = \frac{3x}{7}$. Для того, чтобы система имела ровно одно решение, необходимо и достаточно, чтобы круг касался прямой a_2 . Это происходит, когда радиус окружности равен расстоянию от центра окружности до прямой a_2 . По формуле расстояния от точки до прямой²⁴ получаем, что расстояние от точки $(7a; 3a)$ до прямой $4x + 3y - 12a = 0$ равно $\frac{|4 \cdot 7a + 3 \cdot 3a - 12a|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 5|a|$. Приравнявая к радиусу круга, получаем

$5|a| = |a + 8|$. Так как $a > 0$, опускаем модули и находим, что $a = 2$.

Ответ: $a = 2$.

Пример 29. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} |x| + |y| = 1, \\ |x + a| + |y + a| = 1 \end{cases} \text{ не имеет решений?}$$

Решение. Первое уравнение системы задаёт на плоскости xOy квадрат $ABCD$ ²⁵ (см. рис. 18). Второе уравнение задаёт квадрат $PQRS$, равный квадрату $ABCD$, но с центром в точке $(-a; -a)$. На рис. 18 для примера изображён этот квадрат для $a = -2$. Система не будет иметь решений, если эти два квадрата не пересекаются.

Несложно видеть, что если отрезки PQ и BC совпадают, то центр второго квадрата находится в точке $(1; 1)$. Нам подойдут те значения a , при которых центр расположен “выше” и “правее”, т. е. $a < -1$. Аналогично рас-

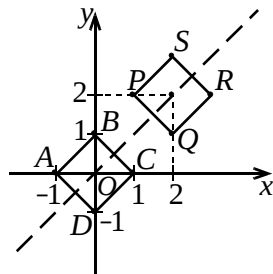


Рис. 18

²⁴ Пусть даны точка $M(x_0; y_0)$ и прямая l , заданная уравнением $ax + by + c = 0$. Тогда расстояние от точки M до прямой l определяется формулой $\rho = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

²⁵ Чтобы его построить, рассмотрим $x \geq 0$ и $y \geq 0$. Тогда уравнение принимает вид $x + y = 1$. Получаем отрезок – часть прямой $x + y = 1$, лежащую в первой четверти. Далее отражаем этот отрезок относительно оси Ox , а затем полученное множество отражаем относительно оси Oy .

смаатриваем случай, когда центр квадрата $PQRS$ находится в третьей четверти. Тогда подходят значения $a > 1$.

Ответ: $a \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

Пример 30. Найдите все значения параметра b , при которых система

$$\begin{cases} y = |b - x^2|, \\ y = a(x - b) \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение при любом значении a .

Решение. Рассмотрим несколько случаев.

1) Если $b < 0$, то выражение под модулем в первом уравнении отрицательно. Раскрывая модуль, получаем $y = x^2 - b$. Графиком является парабола с ветвями вверх и вершиной в точке $(0; -b)$, расположенной выше оси абсцисс (так как $b < 0$). Но во втором уравнении при $a = 0$ получается прямая $y = 0$, не имеющая с параболой никаких общих точек. Значит, система имеет решения не при любых a , и $b < 0$ не подходит.

2) Если $b = 0$, то система принимает вид $\begin{cases} y = x^2, \\ y = ax. \end{cases}$

При любом a пара чисел $(0; 0)$ является решением этой системы, следовательно, $b = 0$ подходит.

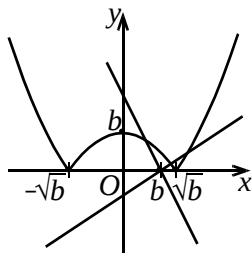


Рис. 19а

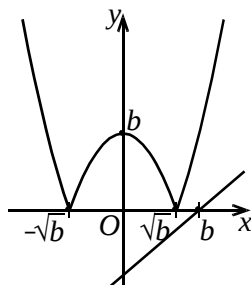


Рис. 19б

3) Зафиксируем некоторое $b > 0 \rightarrow$. Первому уравнению удовлетворяет множество точек, полученное из параболы $y = x^2 - b$ отражением части этой параболы относительно оси Ox (см. рис. 19а, б). Второе уравнение задаёт семейство прямых²⁶, проходящих через точку $(b; 0)$.

²⁶ Подставляя различные значения a , можно получить всевозможные прямые, проходящие через точку $(b; 0)$, кроме вертикальной.

Если точка $(b; 0)$ лежит на отрезке $[-\sqrt{b}; \sqrt{b}]$ оси абсцисс, то прямая пересечёт график первой функции при любом угловом коэффициенте (рис. 19а). Иначе (рис. 19б) в любом случае найдётся прямая, не пересекающая данный график. Решая неравенство $-\sqrt{b} \leq b \leq \sqrt{b}$ и учитывая, что $b > 0$, получаем, что $b \in (0; 1]$.

Объединяем результаты: $b \in [0; 1]$.

Ответ: $b \in [0; 1]$.

Пример 31. Найдите все значения a , при каждом из которых функция $f(x) = x^2 - |x - a^2| - 3x$ имеет хотя бы одну точку максимума.

Решение. Раскрывая модуль, получаем, что

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + a^2, & x \geq a^2, \\ x^2 - 2x - a^2, & x \leq a^2. \end{cases}$$

На каждом из двух промежутков графиком функции $y = f(x)$ является парабола с ветвями вверх. Поскольку параболы с ветвями вверх не могут иметь точек максимума, единственная возможность заключается в том, что точкой максимума является граничная точка этих промежутков – точка $x = a^2$. В этой точке будет максимум, если вершина параболы $y = x^2 - 4x + a^2$ попадёт

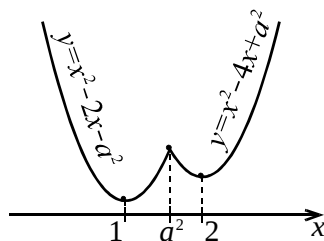


Рис. 20

на промежуток $x > a^2$, а вершина параболы $y = x^2 - 2x - a^2$ – на промежуток $x < a^2$ (см. рис. 20). Это условие задаётся неравенствами $2 > a^2$ и $1 < a^2$, решая которые, находим, что $a \in (-\sqrt{2}; -1) \cup (1; \sqrt{2})$.

Ответ: $a \in (-\sqrt{2}; -1) \cup (1; \sqrt{2})$.

Пример 32. Найдите все значения a , при каждом из которых общие решения неравенств

$$y + 2x \geq a \text{ и } y - x \geq 2a \quad (17)$$

являются решениями неравенства

$$2y - x > a + 3. \quad (18)$$

Решение. Чтобы сориентироваться в ситуации, иногда бывает полезным рассмотреть какое-нибудь одно значение параметра. Сделаем чертёж, например, для $a = 0$. Неравенствам (17)²⁷ удовлетворяют точки угла BAC (см. рис. 21) – точки, каждая из которых лежит выше обеих прямых $y = -2x$ и $y = x$ (или на этих прямых). Неравенству (18) удовлетворяют точки, лежащие выше прямой

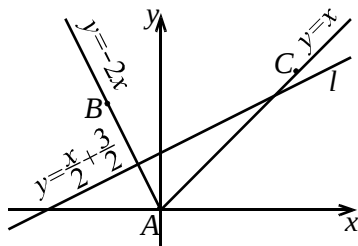


Рис. 21

$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$. Видно, что при $a = 0$ условие задачи не выполняется.

Что изменится, если мы возьмём другое значение параметра a ? Каждая из прямых переместится и перейдёт в *параллельную самой себе* прямую, так как угловые коэффициенты прямых не зависят от a . Чтобы выполнялось условие задачи, нужно, чтобы весь угол BAC лежал выше прямой l . Так как угловые коэффициенты прямых AB и AC по модулю больше углового коэффициента прямой l , необходимо и достаточно, чтобы вершина угла лежала выше прямой l .

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} y + 2x = a, \\ y - x = 2a, \end{cases}$$

находим координаты точки $A\left(-\frac{a}{3}; \frac{5a}{3}\right)$. Они должны удовлетворять

неравенству (18), поэтому $\frac{10a}{3} + \frac{a}{3} > a + 3$, откуда $a > \frac{9}{8}$.

Ответ: $a > \frac{9}{8}$.

Контрольные вопросы и задачи

1. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых среди корней уравнения $ax^2 + (a+4)x + a+1 = 0$ имеется ровно один отрицательный

²⁷ Фактически мы имеем дело с системой неравенств (12).

2. найдите все значения a , при которых уравнение $((a+2)x^2 - 5x)^2 + 4((a+2)x^2 - 5x) + 4 - a^2 = 0$ имеет ровно два решения.

3. Найдите все значения x , для каждого из которых неравенство $(2-a)x^3 + (1-2a)x^2 - 6x + (5+4a-a^2) < 0$ выполняется хотя бы при одном значении $a \in [-1; 2]$.

4. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений
$$\begin{cases} axy + x - y + \frac{3}{2} = 0, \\ x + 2y + xy + 1 = 0 \end{cases}$$
 имеет единственное решение.

5. При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{x+a} = x+3$ имеет единственное решение?

6. При каких значениях параметра a неравенство $(x^2 - (a+2)x - 2a^2 + 4a)\sqrt{1-x} \leq 0$ имеет единственное решение?

7. Найдите все значения a , при каждом из которых неравенство $\left| \frac{x^2 - ax + 1}{x^2 + x + 1} \right| < 3$ выполняется при всех x .

8. Для каждого значения параметра a решите неравенство $2^{\sqrt{x-2}} > \left(\frac{3}{4}\right)^{a+3}$

9. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $\cos(\sqrt{a^2 - x^2}) = 1$ имеет ровно восемь различных решений.

10. Найдите все значения a , при которых система
$$\begin{cases} (1+3x^2)^a + (b^2 - 4b + 5)^y = 2, \\ x^2 y^2 + (b-2)xy + a^2 + 2a = 3 \end{cases}$$
 имеет решение для любого b .

11. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $x^2 + (a+4)^2 = |x+a+4| + |x-a-4|$ имеет ровно одно решение.

12. Найдите все значения параметра a , при которых система неравенств $\begin{cases} y \leq ax - x^2 - 3, \\ x \leq ay - y^2 - 3 \end{cases}$ имеет ровно одно решение.

13. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых область определения функции $y = \lg(a^{x+2} \cdot x^{3\log_x a} + a^4 \cdot x^5 - (\sqrt{x})^{10+2x\log_x a} - (\sqrt{a})^{18})$ содержит ровно одно целое число.

14. Для каждого значения параметра a определите количество решений уравнения $\|5x| - 10| - a = 3x$.

15. Найдите все такие значения величины x , при которых неравенство $(4 - 2a)x^2 + (13a - 27)x + 33 - 13a > 0$ выполняется для всех a , удовлетворяющих условию $1 < a < 3$.

16. При каких значениях α и β парабола $y = 2x^2 + \alpha x + \beta$ касается прямых $y = 12x - 11$ и $y = 8x - 5$?

17. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $ax + \sqrt{3 - 2x - x^2} = 4a + 2$ имеет единственный корень.

18. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система $\begin{cases} y^2 + xy - 7x - 14y + 49 = 0, \\ y = ax + 1 \end{cases}$ имеет единственное решение.

19. При каких значениях a уравнение $x^2 - (4a - 2)|x| + 3a^2 - 2a = 0$ имеет ровно два различных корня?

20. Для каждого значения параметра a решите систему неравенств: $\begin{cases} x^2 + x \leq a, \\ 2x - x^2 \geq a - 1. \end{cases}$

21. Найдите все значения параметра a , при которых множество решений неравенства $1 - \frac{a}{x} < \frac{8}{x} \left(1 - \frac{a+2}{x} + \frac{2a}{x^2} \right)$ содержится в некотором отрезке длиной 7 и при этом содержит какой-нибудь отрезок длины 4.

22. Найдите все значения a , при каждом из которых ровно одно решение неравенства $x^2 + (5a + 3)x + 4a^2 - 4 \leq 0$ удовлетворяет неравенству $ax(x - 4 - a) \leq 0$.

23. При каких a фигура, задаваемая на плоскости неравенствами
$$\begin{cases} y \geq |x - a| + a^2 - 4a, \\ y \leq -|x - a| - a^2 + 2a, \end{cases}$$
 имеет наибольшую площадь? Найдите эту площадь.

24. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система
$$\begin{cases} |x + 2y + 1| \leq 11, \\ (x - a)^2 + (y - 2a)^2 = 2 + a \end{cases}$$
 имеет единственное решение.

25. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений
$$\begin{cases} x^2 - 6x + y^2 - 6y + 17 = 0, \\ x^2 - 2a(x + y) + y^2 + a^2 = 0 \end{cases}$$
 имеет единственное решение.

26. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система неравенств
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x + 2y \leq a^2 - 5, \\ x^2 + y^2 - 8x - 14y \geq 4a^2 + 12a - 56 \end{cases}$$
 имеет единственное решение.

27. При каких значениях a уравнение $|x + a^2| = |a + x^2|$ имеет ровно три корня?

28. Найдите все значения параметра a при каждом из которых уравнение $|\log_3 x^2 - a| - |\log_3 x + 2a| = \log_3^2 x$ имеет четыре различных корня.