



ПЕДАГОГИКА И ПСИХОЛОГИЯ

УДК 372.851

ББК 658.1

Абасов Рагиб Зейнал оглы

кандидат физико-математических наук,

доцент

кафедра высшая математики

Азербайджанская Государственная Нефтяная Академия

г.Баку

Abasov Rahib Zeynal

candidate of physics and mathematics science,

assistant professor

Department of Higher Mathematics

Azerbaijan State Oil Academy

Baku

rahib-55@mail.ru

Действия над бесконечными периодическими десятичными дробями

The operation on the repeating decimals

Нельзя сказать, что в школьной программе математики рассмотренная нами тема изучается подробно, много вопросов по этой теме остаются открытыми.

В данной работе бесконечные периодические десятичные дроби рассматриваются как бесконечный процесс в определенном смысле. Кроме этого, изучаются и доказываются некоторые свойства этих дробей. Эти свойства аналогичны соответствующим свойствам конечных десятичных дробей.

We can't say that considered theme by us is studied in detail in the school curriculum of mathematics. So many questions on this topic are still open.

In this paper recurring decimals are regarded as an infinite process in a certain way. Besides this some properties of these fractions are studied and proved. These properties are analogical for corresponding properties of finite decimals.

Ключевые слова: обыкновенные дроби, периодические десятичные дроби, действия над периодическими дробями, обобщение, рациональное вычисление.

Key words: common fraction, repeating decimals, the operation on the repeating decimals, generalization, efficient calculation.

В школьной математике периодические дроби изучаются в определенном смысле как бесконечные процессы. Но, периодические дроби прежде всего – бесконечные десятичные дроби и поэтому естественно ожидать, что некоторые преобразования и действия над ними можно осуществлять аналогично с действиями над десятичными дробями. Кроме того, периодическая дробь – это есть обыкновенная дробь с особым знаменателем вида $99 \dots 900 \dots 0$. И этот

факт может дать некоторый эффект в работе с периодическими дробями. Следовательно, преобразования и действия над периодическими дробями требуют рассмотрения в новом аспекте, чему и посвящается настоящая статья.

Дробь $\frac{m}{n}$ будем считать правильной и несократимой.

1. Об эффективном обращении простых дробей в периодические десятичные дроби

Известно что, если в разложении знаменателя n на простые множители нет множителей отличных от 2 и 5 (которые могут быть в одинаковых или различных степенях), то дробь $\frac{m}{n}$ может быть записана в виде десятичной дроби. При этом число цифр в дробной части равно максимальному количеству множителей 2 или 5 в разложении n . Например, в представлении дроби $\frac{37}{160}$ после запятой будет пять цифр, поскольку $160 = 2^5 \cdot 5$. Естественно, что для несократимых дробей это правило остается в силе, если числитель дроби произвольно изменить (даже если числитель будет больше знаменателя). Так же ясно и то, что несократимая дробь $\frac{m}{n}$, у которой знаменатель представляется в виде $2^5 \cdot 5^i$ или $5^5 \cdot 2^i$ ($i = 0,5$) может быть записана в этом же виде десятичной дроби. Отметим еще, что в рассмотренном случае преобразовать обыкновенную дробь в десятичную можно двумя способами:

- 1) делением числителя на знаменатель;
- 2) умножением знаменателя и числителя на недостающие двойки или пятерки до равного их количества в знаменателе.

В некоторых случаях второй способ бывает удобнее:

$$\frac{73}{80} = \frac{73}{2^4 \cdot 5} = \frac{73 \cdot 5^3}{2^4 \cdot 5^4} = \frac{9125}{10000} = 0,9125.$$



Если в знаменателе рассматриваемой дроби есть множители отличные от 2 и 5, то эта дробь записывается в виде периодической дроби. Можно показать, что если в разложении числа n на простые множители нет 2 и 5, тогда независимо от того, что n простое или составное число, дробь $\frac{m}{n}$ (несократимая) может быть представлена в виде чистой периодической дроби. Если же в разложении n есть 2 или 5 (в любых степенях), то дробь $\frac{m}{n}$ представляется в виде смешанной периодической дроби такой, что число цифр между запятой и первым периодом равно максимальному количеству множителей 2 и 5.

Основываясь на правиле обращения периодической дроби в обыкновенные, для некоторых обыкновенных дробей можно ускорить процесс обращения их в периодическую дробь. Например, по известному правилу $0,(3) = \frac{3}{9}$, производя обратные рассуждения можно записать $\frac{4}{9} = 0,(4)$, $2\frac{2}{3} = 2\frac{6}{9} = 2,(6)$ и т.д.

По такому же правилу будет:

$$10\frac{7}{11} = 10\frac{63}{99} = 10,(63), \quad 7\frac{11}{37} = 7\frac{11 \cdot 27}{37 \cdot 27} = 7\frac{297}{999} = 2,(297),$$

$$\frac{83}{110} = \frac{747}{990} = \frac{754 - 7}{990} = 0,7(54) \quad \text{и т.д.}$$

В последней дроби представление 747 в виде $747 = 754 - 7$ объясняется так: $\frac{747}{990} = 0, a(\overline{bc}) \Rightarrow \overline{abc} - a = 747 \Rightarrow 99a + \overline{bc} = 747 = 99 \cdot 7 + 54 \Rightarrow a = 7$, $\overline{bc} = 54$ (обратить внимание на причину того, что периодическая дробь смешанная). Итак, чтобы дробь $\frac{747}{990}$ обратить в периодическую дробь, надо разделить число 747, стоящее в числителе на 99, получить частное $a = 7$, и остаток $\overline{bc} = 54$. Не продолжая деление принимаем полученный остаток 54 за период. Это правило изложим в общем виде:

$$\overbrace{99 \dots 9}^m \underbrace{00 \dots 0}_r = 0, \overline{a_1 a_2 \dots a_r} (\overline{b_1 b_2 \dots b_k}) \Rightarrow \overbrace{a_1 a_2 \dots a_r b_1 b_2 \dots b_k}^{r+k} - \overline{a_1 a_2 \dots a_r} = m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m = \overline{a_1 a_2 \dots a_r} \underbrace{00 \dots 0}_k + \overline{b_1 b_2 \dots b_k} - \overline{a_1 a_2 \dots a_r} = \underbrace{99 \dots 9}_k \cdot \overline{a_1 a_2 \dots a_r} + \overline{b_1 b_2 \dots b_k}.$$

Отсюда видно, что для того, чтобы дробь данного вида записать в виде периодической дроби, надо разделить данное в числителе число m на число $99 \dots 9$

и найти частное $\overline{a_1 a_2 \dots a_r}$ и остаток $\overline{b_1 b_2 \dots b_k}$. Покажем это на примере:

$$\begin{array}{r|l} 74761 & 999 \\ -6993 & 74 \\ \hline 4831 & \\ -3996 & \\ \hline 835 & \end{array} \Rightarrow \frac{74761}{99900} = 0,74(835)$$

По такому же правилу, так как $74761 = 99 \cdot 755 + 16$, можно записать

$$\frac{74761}{99000} = 0,755(16).$$

К преобразованиям такого вида мы вернемся в одном из последующих разделов.

Обращение правильной несократимой дроби $\frac{m}{n}$, у которой в разложении знаменателя на простые множители нет множителей 2 и 5, в чистую периодическую дробь означает, что число n должно быть делителем некоторого числа $\underbrace{99 \dots 9}_k$ изображенного цифрой 9, повторенной определенное число раз. Можно проверить, что для деления числа $\underbrace{99 \dots 9}_k$ на 7 и 13, 17, 19, 23, 29 число k должно равняться соответственно числам 6, 16, 18, 22, 28.

Для использования вышеизложенного метода обращения обыкновенных дробей в периодические полезно знать разложение некоторых чисел вида $\underbrace{99 \dots 9}_k$ на простые множители. Приведем некоторые из них:

$$999 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 37,$$

$$9999 = 3 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 101,$$

$$99999 = 3 \cdot 3 \cdot 41 \cdot 271,$$



$$999999 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37,$$

$$9999999 = 3 \cdot 3 \cdot 239 \cdot 4649,$$

$$99999999 = 3 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 73 \cdot 101 \cdot 137 \text{ и др.}$$

Согласно этим разложениям, например, можно найти

$$\frac{17}{101} = \frac{17 \cdot 99}{101 \cdot 99} = \frac{1683}{9999} = 0,(1683),$$

$$\frac{103}{2390} = \frac{103 \cdot 9 \cdot 4649}{2390 \cdot 9 \cdot 4649} = \frac{4309623}{9999990} = 0,0(4309623) .$$

2. Некоторые видоизменения чистых и смешанных периодических дробей

При решении некоторых простых примеров с периодическими дробями иногда полезно представить чистую периодическую дробь в виде другой чистой или даже смешанной периодической дроби. В некоторых же случаях смешанная периодическая дробь, записанная в виде чистой периодической дроби, принимает более простую форму. Рассмотрим лишь несколько таких примеров. Начнем с чистых периодических дробей. Но, прежде всего отметим, что обоснование этих преобразований может стать полезной самостоятельной работой для школьников. Например,

$$1) 2,(4) = 2,(44) = 2,(444) = \dots;$$

$$4) 0,(32) = 0,3(23) = 0,32(32) = \dots;$$

$$2) 2,(4) = 2,4(4) = 2,44(4) = \dots;$$

$$5) -3,(163) = -3,(163163) = \dots;$$

$$3) 0,(32) = 0,(3232) = \dots;$$

$$6) -3,(163) = -3,1(631) = -3,16(316) = \\ = -3,163(163) = \dots .$$

В этих примерах отметим одно обстоятельство: при обращении чистой периодической дроби в смешанную число цифр в периоде остается постоянным. Для примера, докажем в общем виде пример 4) ($b \neq c$):

$$\begin{aligned} a, (\overline{bc}) &= a + \frac{\overline{bc}}{99} = a + \frac{10b+c}{99} = a + \frac{100b+10c}{990} = \\ &= a + \frac{100b+10c+b-b}{990} = a + \frac{\overline{bcb}-b}{990} = a, b(\overline{cb}). \end{aligned}$$

Записав в обратном порядке некоторые из приведенных равенств, увидим, что некоторые смешанные периодические дроби можно представить в виде чистых периодических дробей. Рассмотрим еще некоторые видоизменения смешанных периодических дробей:

1) $6,54(24) = 6,5(42)$; 3) $2,06738(38) = 2,0673(83) = 2,067(38)$;

2) $3,724(24) = 3,72(42) = 3,7(24)$; 4) $-0,13(7813) = -0,1(3781) = -0,(1378)$.

На основе этих примеров нетрудно вывести общие соображения о том, какие видоизменения и над какими смешанными периодическими дробями возможны.

3. Цифры 0 (нуль) в записи периодических дробей

Школьникам хорошо известно какое значение имеет цифра 0 в записи десятичной дроби в зависимости от занимаемой позиции. Какую роль играет эта цифра в записи периодической дроби? Здесь ограничимся несколькими примерами:

$$1) \quad 2_{,(40)} < 2_{,(4)};$$

6) $2,0(4) < 2,(4);$

2) $2_{,(400)} < 2_{,(40)}$;

7) $2,0(40) < 2,0(4)$;

3) $2_{,(405)} < 2_{,(45)}$;

8) $2,0(40) < 2,(40)$;

4) $2_{,(040)} < 2_{,(04)}$;

9) $2,00(4) < 2,0(4)$;

5) $2_{,(040)} < 2_{,(40)}$;

10) $2,00(40) < 2,(40)$ и т.д.

В этих примерах видим (это можно доказать и в общем виде), что при отбрасывании цифры 0 из дробной части в записи периодической дроби (целой или смешанной) получается большая дробь по сравнению с данной.



4. Умножение и деление периодических дробей на 10^n ($n \in \mathbb{N}$)

Умножение и деление периодических дробей на 10^n ($n \in \mathbb{N}$) как отдельная тема в школьной программе математики не изучается, хотя в некоторых моментах мы наблюдаем такие умножения, но без доказательства. Отметим, что в этих примерах число n , как правило, не произвольное, оно выбирается определенным образом. Желая получить правила выполнения этих действий над периодическими дробями, когда n произвольное натуральное число, (аналогично тому, как это делается с десятичными дробями) ниже проведем доказательства некоторых частных случаев. Начнем с чистой периодической дроби. Рассмотрим выражение $10 \cdot \overline{a_1 a_2 \dots a_n}, (\overline{b_1 b_2 \dots b_m})$. Для простоты обозначим $c = \overline{a_1 a_2 \dots a_n}$. Тогда

$$\begin{aligned} 10 \cdot c, (\overline{b_1 b_2 \dots b_m}) &= 10 \left(c + \frac{\overline{b_1 b_2 \dots b_m}}{\underbrace{99 \dots 9}_m} \right) = 10c + \frac{\overline{b_1 b_2 \dots b_m} 0}{\underbrace{99 \dots 9}_m} = 10c + \\ &+ \frac{b_1 \cdot 10^m + \overline{b_2 b_3 \dots b_m} 0}{\underbrace{99 \dots 9}_m} = 10c + \frac{99 \dots 9 \cdot b_1 + b_1 + \overline{b_2 b_3 \dots b_m} 0}{\underbrace{99 \dots 9}_m} = 10c + \\ &+ b_1 + \frac{\overline{b_2 b_3 \dots b_m} b_1}{\underbrace{99 \dots 9}_m} = \overline{c b_1}, (\overline{b_2 b_3 \dots b_m b_1}) = \overline{a_1 a_2 \dots a_n b_1}, (\overline{b_2 b_3 \dots b_m b_1}) \end{aligned}$$

Таким образом, для умножения чистой периодической дроби на 10 надо передвинуть запятую вправо (в определенном смысле) на один знак. Таким же образом можно определить правило умножения этих дробей на 10^n : передвинуть запятую вправо на n знаков в том же смысле. Например,

$$1) 100 \cdot 12,(\overline{4315}) = 1243,(\overline{1543}); \quad 2) 1000 \cdot 3,(\overline{04}) = 3040,(\overline{40}) \text{ и т.д.}$$

Умножение смешанной периодической дроби на 10 рассмотрим на одном примере:

$$10 \cdot b, c(\overline{d}) = 10 \cdot \left(b + \frac{\overline{cd} - c}{90} \right) = 10b + \frac{9c + d}{9} = 10b + c + \frac{d}{9} = \overline{bc}, (\overline{d}) -$$

запятая перенесена вправо на один знак. Можно доказать, что при умножении

смешанной периодической дроби на 10^n запятая переносится вправо на n знак (в определенном смысле). Например,

$$1) 100 \cdot 2,5(34) = 253, (43);$$

$$2) 10000 \cdot 3,28(043) = 32804,(304) \text{ и т.д.}$$

Думаем, что школьнику будет полезно провести соответствующее доказательство в общем виде. Заметим, что при этих действиях число цифр в периоде и здесь остается неизменным.

Подобным образом можно утверждать, что для деления периодической дроби на 10^n запятую надо перенести на n знаков влево (в определенном смысле). Для определенности рассмотрим один простой случай:

$$\frac{1}{10} \cdot a, (b) = \frac{1}{10} \cdot \left(a + \frac{b}{9}\right) = \frac{9a+b}{90} = \frac{10a+b-a}{90} = \frac{\overline{ab}-a}{90} = 0,a(b).$$

Например,

$$1) \frac{1}{10} \cdot 3,(48) = 0,3(48);$$

$$2) \frac{1}{100} \cdot 2,5(7) = 0,025(7).$$

Как видно, при делении периодических дробей на 10^n период не меняется.

Из сказанного следует, что умножение и деление периодических дробей на 10^n проводится аналогично тому как это делается с десятичными дробями, только перенесение запятой нужно понимать в определенном смысле.

5. Сложение периодических дробей

Для выяснения правила сложения периодических дробей с целыми числами достаточно следующих примеров:

$$1) 5 + 2,(4) = 5 + 2\frac{4}{9} = 7\frac{4}{9} = 7,(4);$$

$$2) 3 + 7,0(6) = 3 + 7\frac{6}{90} = 10\frac{6}{90} = 10,0(6).$$



Сложение чистых периодических дробей рассмотрим в следующих случаях:

а) Количество цифр (n) в периоде слагаемых одинаково.

В этом случае, если сумма периодов меньше числа $99 \dots 9$, то сложение производится аналогично правилу сложения десятичных дробей, а в остальных случаях сначала сумма периодов увеличивается на 1, а далее применяется то же самое правило. Например,

$$\begin{array}{rclcl}
 1) & 12,(57) & 2) & 12,(57) & 3) & 12,(57) & 4) & 4,(618) \\
 & + 3,(13) & & + 3,(42) & & + 3,(61) & & + 15,(721) \\
 \hline
 & 15,(70) & & 16,(00) = 16 & & 16,(19) & & 20,(340)
 \end{array}$$

б) Число цифр в периодах разное.

В этом случае, уравнив число цифр в периодах, применяют предыдущее правило. Например,

$$\begin{array}{l}
 1) \quad 2,(64) + 0,(132) = 2,(646464) + 0,(132132) = 2,(778586) \quad (\text{НОК}(2, 3) = 6); \\
 2) \quad 3,(53) + 4,(7) = 3,(53) + 4,(77) = 8,(31).
 \end{array}$$

Сравнение этого способа с обычным способом сложения периодических дробей предоставляем читателю.

Используя вышеприведенные правила умножения и деления периодических дробей на 10^n ($n \in \mathbb{N}$), а также некоторые их видоизменения, можно определить правила сложения смешанных периодических дробей. Сначала отметим, что при сложении периодических дробей цифры между запятой и первым периодом принципиального значения не имеют, числа же стоящие в периоде складываются по правилу сложения чистых периодических дробей. Однако в первую очередь в слагаемых числах надо уравнивать количество цифр между запятой и первым периодом, а также количество цифр в периодах. Например,

$$\begin{array}{l}
 1) \quad 2,4(3) + 3,2(4) = 5,6(7); \quad 3) \quad 5,42(7) + 2,6(8) = 5,42(7) + 2,68(8) = 8,11(6); \\
 2) \quad 2,4(8) + 3,7(4) = 6,2(3); \quad 4) \quad 1,42(3) + 0,7(12) = 1,42(33) + 0,71(21) = 2,13(54).
 \end{array}$$

6. Вычитание периодических дробей

При одинаковом количестве цифр в периоде вычитание чистых периодических дробей производится следующим образом:

а) если число стоящее в периоде уменьшаемого не меньше числа стоящего в периоде вычитаемого, то вычитание производится аналогично правилу вычитания десятичных дробей. Например,

$$1) 7,(8) - 2,(5) = 5,(3);$$

$$2) 12 - 4,(57) = 11, (99) - 4,(57) = 7,(42) \text{ и т.д.}$$

б) если период уменьшаемого меньше периода вычитаемого, то сначала период вычитаемого уменьшает на 1, а затем производят вычитание аналогично вычитанию десятичных дробей. Например,

$$6,(538) - 4,(694) = 1,(694).$$

Для вычитания смешанных периодических дробей сначала их преобразуют, выравнивая в уменьшаемом и вычитаемом количество цифр между запятой и первым периодом, а также количество цифр в периоде. Затем, учитывая сказанное выше о периодах чистых периодических дробей, производят вычитание аналогично вычитанию десятичных дробей. Например,

$$7,12(4) - 3,8(23) = 7,12(44) - 3,82(32) = 3,30(12).$$

Этот пример можно решить и приведя данные дроби к чистым периодическим дробям:

$$7,12(4) - 3,8(23) = \frac{1}{100} \cdot [712,(44) - 382,(32)] = \frac{1}{100} \cdot 330,(12) = 3,30(12).$$

Еще один пример:

$$3,4(138) - 2,23(49) = 3,41(381381) - 2,23(494949) = 1,17(886431).$$

Наконец, на основании вышесказанного можем дать правило сравнения периодических дробей. Из двух периодических дробей та больше, у которой целая часть больше. При равенстве целых частей, независимо от того периодические дроби чистые или смешанные, сравнение производится аналогично



правилу сравнения десятичных дробей. Чтобы доказать это, надо в данных периодических дробях уравнивать число цифр после запятой до первого периода, а также число цифр в периоде.

Библиографический список

- 1.Ляпин, Е.С. Алгебра и теория чисел. / Ляпин, Е.С, Евсеев А.Е. - Москва, " Просвещение ",-1974,- 382 стр.
2. Марданов, М.Дж. Математика ,учебник 6-го класса.Баку,-из-во "Чашыоглы",-2007,- 382стр.

Bibliography

- 1.Lyapin, ES Algebra and Number Theory. / Liapin, ES, AE Evseev - Moscow. "Enlightenment-solution", -1974, - 382 pages
2. Mardanov, MJ Math textbook 6th klassa.Baku,-from-in "Chashiogli" -2007, -382 page