

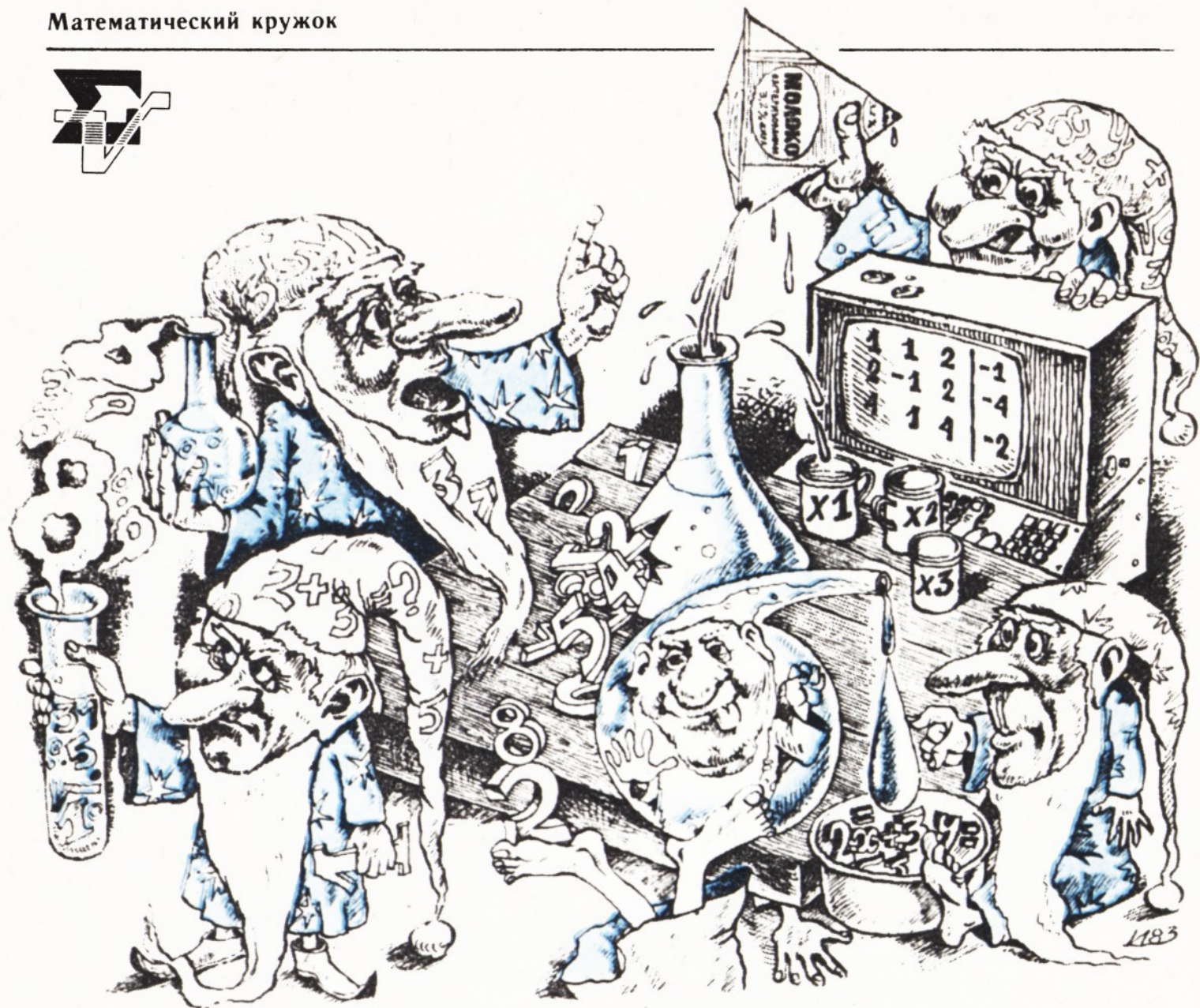
ISSN 0130-2221

Квант

1
1984

*Научно-популярный физико-математический журнал
Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР*





Системы линейных уравнений

Кандидат физико-математических наук
В. Л. ГУТЕНМАХЕР

Системы линейных уравнений часто встречаются в разных приложениях математики (например, к физике, химии, экономике). В статье рассказывается о простейших способах решения таких систем и об универсальном способе — методе Гаусса.

Исключение переменной

Понять метод лучше всего на примере. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 7x + 5y = 1. \end{cases}$$

Чтобы ее решить, исключим с помощью первого уравнения переменную x из второго уравнения. Подготовим для этого оба уравнения так, чтобы коэффициенты при x у них были одинаковы. Умножая первое уравнения на 7, а второе на 2, получаем

$$\begin{cases} 14x + 21y = 35 \\ 14x + 10y = 2. \end{cases}$$

Теперь оставим первое уравнение нетронутым, а второе заменим на разность между первым и вторым уравнениями:

$$\begin{cases} 14x + 21y = 35 \\ 11y = 33. \end{cases}$$

Придадим теперь первому уравнению его первоначальный вид, а второе разделим на 11:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ y = 3. \end{cases}$$

Подставляя значение $y = 3$ в первое уравнение, находим

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 3. \end{cases}$$

Ответ получен, система уравнений имеет единственное решение — пару чисел $(-2; 3)$.

Задачи

1. Методом исключения переменной решите систему

$$\text{а) } \begin{cases} 2x+3y=4 \\ 3x-2y=5 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{3}{4}x - \frac{5}{6}y = 1 \\ \frac{5}{6}x - \frac{3}{4}y = 2. \end{cases}$$

2. Две точки движутся по числовой оси со скоростями $u = -12$ км/ч и $v = 12$ м/с. Вначале их абсциссы были $a = 3$ км и $b = -500$ м. Где и когда они встретятся?

Замена переменных

Одним из основных приемов алгебры является замена одних переменных другими. Этот прием позволяет сводить задачи к более простым. Пусть, например, нам нужно решить систему нелинейных уравнений

$$\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 5. \\ \frac{7}{x} + \frac{5}{y} = 1. \end{cases}$$

Полагая $u = \frac{1}{x}$, $v = \frac{1}{y}$, мы получаем линейную систему с новыми переменными u, v :

$$\begin{cases} 2u+3v=5 \\ 7u+5v=1. \end{cases}$$

Решая ее, находим $u = -2$, $v = 3$. Возвратимся теперь к старым переменным: $\frac{1}{x} = -2$, $\frac{1}{y} = 3$, откуда

$$x = -\frac{1}{2}, \quad y = \frac{1}{3}.$$

Задача 3. Методом замены переменных решите систему

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{1}{2x+3y-5} + \frac{7}{5x-8y+12} = 1 \\ \frac{4}{2x+3y-5} - \frac{14}{5x-8y+12} = 1. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x^2+xy=5 \\ 3x^2+5xy=23 \end{cases}$$

$$\text{в) } \frac{xy}{3x+2y} = \frac{1}{5}, \quad \frac{xy}{5x+7y} = 1.$$

Геометрический смысл линейного уравнения

Чтобы найти уравнение прямой $y = kx + b$, проходящей через точки с координатами $(1; 2)$ и $(3; 1)$, подставим в уравнение $y = kx + b$ вместо x и y координаты данных точек. Мы получим систему

$$\begin{cases} 2 = k + b \\ 1 = 3k + b. \end{cases}$$

Решая ее, находим $k = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{5}{2}$.

Таким образом, искомое уравнение $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.

Но может случиться и так, что соответствующая система уравнений не имеет решений. Пусть, например, данные точки имеют координаты $(1; 2)$ и $(1; 3)$. Подставляя эти значения в уравнение $y = kx + b$, получаем систему

$$\begin{cases} 2 = k + b \\ 3 = k + b, \end{cases}$$

не имеющую решений (ведь из уравнений системы следует $2 = 3$). На первый взгляд, это немного удивительно — ведь через две точки всегда проходит прямая. Оказывается, уравнение прямой, проходящей через точки $(1; 2)$ и $(1; 3)$, не записывается в виде $y = kx + b$ — ее уравнение $x = 1$.

Таким образом, мы выяснили причину недоразумения — задача была неудачно сформулирована: в условии предполагалось, что уравнение прямой на координатной плоскости всегда имеет вид $y = kx + b$, однако для прямых, параллельных оси ординат, это не так. В связи с этим обстоятельством уравнение произвольной прямой записывают в виде $ax + by = c$. Такой вид позволяет охватить уже все прямые на координатной плоскости. Например, если положить $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$, $c = \frac{5}{2}$, получится уравнение первой найденной нами прямой, а если взять $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$ — уравнение второй прямой.

Рассмотрим теперь систему

$$\begin{cases} x + \sqrt{2}y = \sqrt{3} \\ \sqrt{2}x + 2y = \sqrt{6}. \end{cases}$$

Решить ее — это на геометрическом языке значит найти общие точки прямых, заданных уравнениями $x + \sqrt{2}y = \sqrt{3}$, $\sqrt{2}x + 2y = \sqrt{6}$. Решим эту систему методом исключения переменной: умножим первое уравнение на $\sqrt{2}$ и вычтем из второго:

$$\begin{cases} \sqrt{2}x + 2y = \sqrt{6} \\ \sqrt{2}x + 2y = \sqrt{6} \end{cases} \begin{cases} \sqrt{2}x + 2y = \sqrt{6} \\ 0 = 0. \end{cases}$$

В результате осталось только одно уравнение. Это означает, что система имеет бесконечное число решений и прямые совпадают. В процессе решения мы обнаружили, что второе уравнение — это первое, умноженное на $\sqrt{2}$, что сразу можно было не заметить.

В разобранных задачах мы столкнулись со всеми возможными ситуациями: система имеет единственное решение, не имеет решений, имеет бесконечное число решений. Так же обстоит дело и в общем случае. Система n линейных уравнений с n неизвестными, как правило, имеет единственное решение. Но когда одно из ее уравнений является «линейной комбинацией» остальных уравнений или противоречит им, она имеет бесконечное число решений или их вообще нет.

Задачи

4. Найдите уравнение прямой, проходящей через точки а) (1; 5) и (2; 3); б) (6; 1) и (6; 5)

5. При каких k и b прямые $y - kx = 2$ и $2y - 6x = b$ а) совпадают? б) не пересекаются?

6. При каких a система

$$\begin{cases} 2x + (9a^2 - 2)y = 3a \\ x + y = 1 \end{cases}$$

не имеет решений?

7. Докажите, что система

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

тогда и только тогда имеет единственное решение, когда $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. (Число $a_1b_2 - a_2b_1$ называется *определителем* системы.)

Ошибки при округлении

При решении задач на ЭВМ могут возникнуть удивительные ситуации. Классической иллюстрацией этого является решение системы

$$\begin{cases} x + \sqrt{2}y = \sqrt{3} \\ \sqrt{2}x + 2y = \sqrt{6}. \end{cases} \quad (1)$$

Эта система, как мы уже убедились, имеет бесконечное число решений. Однако, если решать ее на ЭВМ, она будет иметь... единственное решение! Это происходит потому, что ЭВМ не умеет оперировать с числами вида $\sqrt{2}$, — они заменяются в ней на десятичные (или двоичные) приближения.

Если, например, числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$ заменить на их десятичные приближения с одной цифрой после запятой: $\sqrt{2} \approx 1,4$; $\sqrt{3} \approx 1,7$; $\sqrt{6} \approx 2,4$, система примет вид

$$\begin{cases} x + 1,4y = 1,7 \\ 1,4x + 2y = 2,4. \end{cases} \quad (2)$$

Решив ее, мы получим одно решение: $x = 1$; $y = 0,5$.

Если же оставить четыре знака после запятой, получается система

$$\begin{cases} x + 1,4142y = 1,7320 \\ 1,4142x + 2y = 2,4494 \end{cases} \quad (3)$$

имеющая тоже одно (но совсем другое) решение: $x = 0,3178$; $y = 1$.

Интересно, что, какими бы десятичными приближениями мы ни заменяли число $\sqrt{2}$, всегда будет получаться единственное решение.

Докажем это. Заменяя в системе (1) $\sqrt{2}$ буквой a , получим

$$\begin{cases} x + ay = \sqrt{3} \\ ax + 2y = \sqrt{6}. \end{cases}$$

Покажем, что при $a^2 \neq 2$ система имеет единственное решение. Если $a = 0$, это очевидно. Пусть теперь $a \neq 0$. Умножая первое уравнение на a и вычитая из него второе, приводим систему к виду

$$\begin{cases} x + ay = \sqrt{3} \\ (a^2 - 2)y = a\sqrt{3} - \sqrt{6}. \end{cases}$$

Так как $a^2 \neq 2$, y принимает единственное значение $\frac{a\sqrt{3} - \sqrt{6}}{a^2 - 2}$. Подставляя его в первое

уравнение, находим единственное значение x . Таким образом, если в качестве a взять не само число $\sqrt{2}$, а его какое-нибудь приближение, то $a^2 \neq 2$ — значит, система обладает единственным решением.

Остается напомнить («Алгебра 7», п. 28), что само число $\sqrt{2}$ не представляется в виде конечной десятичной дроби (и даже в виде любой дроби $\frac{p}{q}$, где p и q целые числа).

Из-за этого мы и получили парадокс, связанный с решением системы (1) на ЭВМ.

Обратим внимание на то, что даже в случае, когда все коэффициенты данной системы — конечные десятичные дроби, при их округлении решение системы может сильно измениться. Так, система (2) получается округлением коэффициентов системы (3), и при этом их решения совсем разные. В системах с большим числом переменных ошибки, возникающие при округлении, тем более могут приводить к существенным изменениям решений.

Оценить ошибку и указать процедуру решения, гарантирующую наименьшую погрешность, — важная и далеко не простая задача. В начале прошлого века ее начал изучать великий математик Гаусс, а существенные дальнейшие продвижения в этом направлении были сделаны только в последние десятилетия. В связи с основополагающим вкладом Гаусса в эту область его именем назван простой и универсальный метод исключения переменных.

Метод Гаусса

Последовательное исключение переменных — наиболее удобный способ решения систем линейных

уравнений на ЭВМ. Продемонстрируем его на примере системы трех уравнений с тремя переменными

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$$

Первый шаг состоит в том, что с помощью первого уравнения переменная x_1 исключается из остальных уравнений: первое уравнение оставляем неизменным; из второго уравнения вычитаем удвоенное первое; из третьего уравнения вычитаем учетверенное первое; получаем

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ -3x_2 - 2x_3 = -2 \\ -3x_2 - 4x_3 = 2. \end{cases}$$

Второй шаг состоит в том, что с помощью нового второго уравнения переменная x_2 исключается из третьего уравнения: первые два уравнения оставляем неизменными; из третьего уравнения вычитаем второе; получаем

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ -3x_2 - 2x_3 = -2 \\ -2x_3 = 4. \end{cases}$$

Теперь из последнего уравнения находим $x_3 = -2$. Подставляя это значение в предыдущее уравнение, находим $x_2 = 2$. Подставляя $x_2 = 2$ и $x_3 = -2$ в первое уравнение, находим $x_1 = 1$. Итак, у нас готов ответ: $(1; 2; -2)$.

Аналогичным образом можно решать любые системы линейных уравнений. Грубо говоря, метод Гаусса заключается в следующем:

С помощью первого уравнения переменная x_1 исключается из остальных уравнений. Затем с помощью нового второго уравнения переменная x_2 исключается из всех следующих уравнений. Потом с помощью нового третьего уравнения исключается переменная x_3 . И так далее, пока мы не получим в последнем уравнении значение последней переменной. После этого находим переменные в обратном порядке, подставляя их известные значения в уравнения.

Мы видим, что это — почти готовая программа для ЭВМ. Но, чтобы

этот метод срабатывал, нужно, чтобы на k -м шаге новое k -е уравнение содержало k -ю переменную (ведь с его помощью нам нужно исключать эту переменную из остальных уравнений). Если оказывается, что это не так, приходится переставлять (перенумеровывать) уравнения или переменные.

Может случиться также, что с некоторого места последние уравнения превратятся в числовые равенства вида $0 = b$. Если хотя бы одно из этих равенств неверно ($b \neq 0$), то система не имеет решений. Если же все эти равенства верны, то система имеет бесконечное число решений. (Все такие ситуации предусмотрены в реально используемых программах для ЭВМ.)

Отметим, что в ЭВМ вводятся не уравнения, а таблицы коэффициентов — так называемые *матрицы* системы. Например, системе, которую мы только что решали, сопоставляется матрица

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 4 & -2 \end{array} \right).$$

Два шага метода Гаусса, которые мы сделали при решении, можно изобразить так:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 4 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -4 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Кстати сказать, когда системы с тремя и большим числом переменных решаешь вручную, а не на ЭВМ, то тоже удобнее действовать с матрицами — меньше шансов ошибиться.

Задача 8. Решите систему, предлагавшуюся семиклассникам на 2-м туре XV Московской олимпиады:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 4x_5 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 6x_5 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 8x_5 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 5. \end{cases}$$

Разные задачи

9. Математик вышел гулять — сначала он пошел по ровной дороге, затем поднялся в гору, повернул назад и пришел домой той же

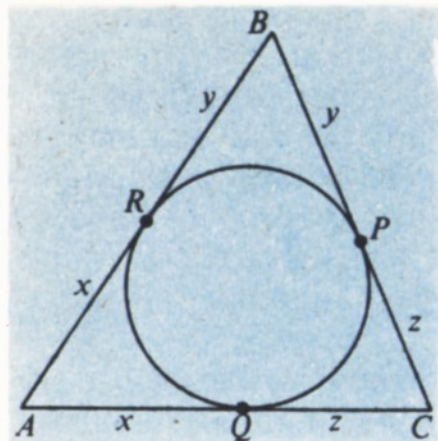


Рис. 1.

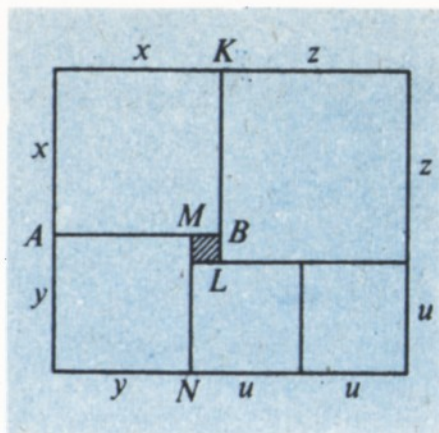


Рис. 2.

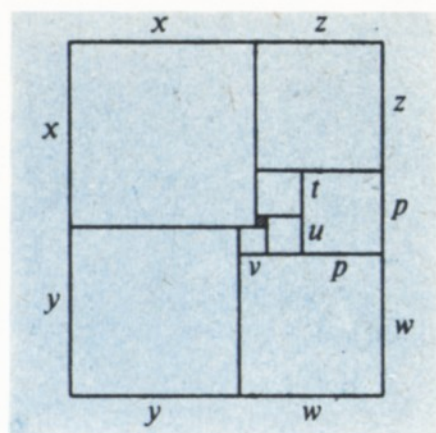


Рис. 3.

дорогой. Он знал, что гулял всего 5 ч, что его скорость по ровной дороге равна 4 км/ч, в гору — 3 км/ч и при спуске с горы — 6 км/ч. Сев за стол и составив одно уравнение с двумя переменными: x — пройденное в оба конца расстояние и y — длина наклонного участка, математик с удивлением обнаружил, что может найти x . Найдите x .

10. За круглым столом сидят 4 гнома. Перед каждым стоит кружка с молоком. Один из гномов переливает $\frac{1}{4}$ своего молока соседу справа. Затем сосед справа делает то же самое. Затем то же самое делает следующий сосед справа и, наконец, четвертый гном $\frac{1}{4}$ оказавшегося у него молока наливает первому. Во всех кружках вместе молока 2 л. Сколько молока было первоначально в кружках, если

а) в конце у всех гномов оказалось молока поровну?

б) в конце у всех гномов оказалось молока столько, сколько было вначале?

11. Определите числа a , b и c так, чтобы функция $y = ax^2 + bx + c$ имела таблицу значений

x	0	1	2
y	1	2	2

Решение. Подставляя последовательно данные значения x и y в формулу $y = ax^2 + bx + c$, получаем $1 = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c$, $2 = a \cdot 1 + b \cdot 1 + c$, $2 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c$. Решив эту систему уравнений, находим $c = 1$, $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{2}$. Следовательно,

функция имеет вид

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 1.$$

12. Определите числа a , b и c так, чтобы функция $y = a + b(x-1) + c(x-1)(x-2)$ имела таблицу значений

x	0	1	2
y	1	2	2

13. Определите числа a , b , c и d так, чтобы равенство

$$(x-1)^2(ax+b) + (x^2+x-1)(cx+d) = 1$$

выполнялось при всех значениях x .

Решение. Если равенство выполняется при всех значениях x , то оно выполняется, в частности, при $x=1$, при $x=0$, при $x=-1$ и при $x=2$. Подставляя их последовательно в это равенство получаем $c+d=1$, $b-d=1$, $-4a+4b+c-d=1$, $2a+b+10c+5d=1$. Решив эту систему уравнений относительно a , b , c , d , находим $a=3$, $b=5$, $c=-3$, $d=4$. Подставляя их в исходное равенство и раскрывая скобки, проверяем, что оно верно при всех значениях x .

Замечание. Мы подставили только четыре значения x , так как этого достаточно, чтобы определить четыре неизвестных. С другой стороны, последний шаг решения (проверка) тоже обязателен (рассмотрите равенство $(x-1)^2(ax+b) + (x^2+x-1)cx = 1$ в точках $x=1$, $x=0$, $x=-1$).

14. Определите числа a , b и c так, чтобы равенство

$$(x^2-3x+2)a + (3x-1)(bx+c) = 1$$

выполнялось при всех значениях x .

15. В треугольнике ABC вписанная окружность касается сторон BC , CA , AB в точках P , Q , R (рис. 1). Найдите *) $AQ=AR=x$, $BR=BP=y$ и $CP=CQ=z$, если $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$. (Замечание. $AQ=AR$, $BR=BP$ и $CP=CQ$, так как касательные к окружности из одной точки равны.)

Решение. Из рисунка 1 получается система

*) Поскольку данная статья в первую очередь рассчитана на семиклассников, здесь и дальше используются обозначения из учебного пособия А. В. Погорелова «Геометрия 6—10».

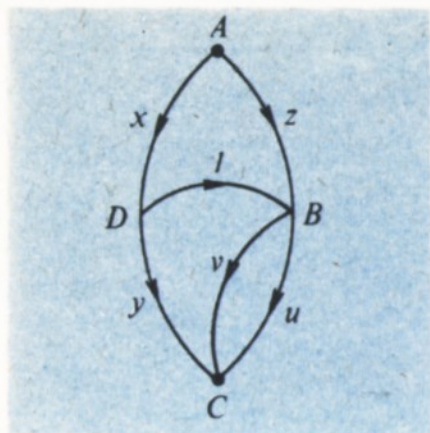


Рис. 4.

$$x + y = c, \quad y + z = a, \quad z + x = b.$$

Она, конечно, легко решается любым из вышеуказанных способов, но красивее и проще поступить иначе. Сложим все три уравнения. Получаем $2x + 2y + 2z = a + b + c$, откуда $x + y + z = \frac{a+b+c}{2}$. Вычитая из этого

уравнения каждое из уравнений системы, находим $x = \frac{b+c-a}{2}$, $y = \frac{a+c-b}{2}$, $z = \frac{a+b-c}{2}$.

16. На основании AB равнобедренного треугольника ABC взята точка E . В треугольники ACE и ECB вписаны окружности, которые касаются отрезка CE в точках K и H соответственно. Найдите длину отрезка KH , если $AE = a$, $EB = b$.

17. (Предлагалась восьмиклассникам на XXIII Украинской олимпиаде в 1983 г.) Прямоугольник разбит на квадраты так, как показано на рисунке 2. Известно, что сторона заштрихованного квадрата равна 1. Найдите стороны остальных квадратов.

Решение. Обозначим искомые стороны через x, y, z, u (см. рис. 2). Тогда $MN = y = u + 1$, $AB = x = y + 1$, $KL = z = x + 1$. Подставляя $y = u + 1$ во второе соотношение, находим $x = u + 2$. Подставляя $x = u + 2$ в третье соотношение, находим $z = u + 3$. Теперь запишем равенство противоположных сторон данного прямоугольника: $x + z = y + 2u$; подставив сюда x, y и z , получаем $(u + 2) + (u + 3) = (u + 1) + 2u$, откуда $u = 4$. Теперь находим $x = 6$, $y = 5$, $z = 7$.

18. Прямоугольник разбит на квадраты так, как показано на рисунке 3. Известно, что сторона заштрихованного квадрата равна 2. Найдите стороны остальных квадратов.

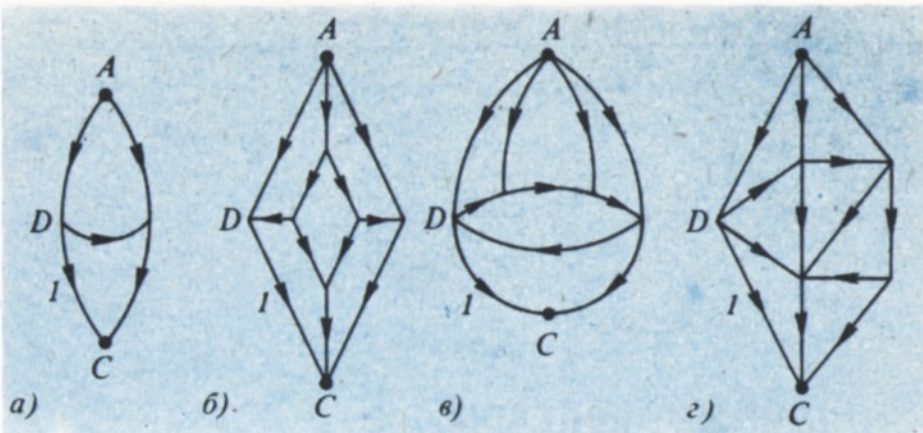


Рис. 5.

В двух следующих задачах речь идет о разветвленных электрических цепях, составленных из проводников единичного сопротивления. Каждая цепь подключена к источнику в двух точках (полюсах). Токи подчиняются правилам Кирхгофа, которые для рассматриваемых цепей можно сформулировать так:

1) Сумма токов, входящих в любой узел, равна сумме токов, выходящих из него (полюс узлом не считается).

2) В любом замкнутом контуре сумма токов, идущих по часовой стрелке, равна сумме токов, идущих против часовой стрелки*).

19. На рисунке 4 изображена электрическая цепь с полюсами A, C и узлами B, D . Найдите токи во всех проводниках этой цепи, если известно, что ток в проводнике DB равен 1. (Стрелками обозначены направления токов.)

20. На рисунке 5 изображены электрические цепи с полюсами A и C . Найдите токи в их проводниках, если известно, что в каждой цепи ток в проводнике CD равен 1. Некоторые токи у вас получатся нулевыми и отрицательными, что это означает?

21. Двое играют в такую игру: в системе

$$\begin{cases} *x + *y = * \\ *x + *y = * \end{cases}$$

они поочередно вместо какой-нибудь звездочки ставят какое-нибудь число; первый хочет, чтобы полученная в конце система имела решение, а второй хочет, чтобы система решений не имела. Кто выиграет при правильной игре? А кто выиграет, если, наоборот, первый хочет, чтобы полученная система не имела решений, а второй — чтобы имела?

22. (Предлагалась в восьмом и десятом классах на XIII Всесоюзной олимпиаде и вошла в задачник «Кванта» под номером М578; решение см. в разделе «Ответы, указания, решения».) Решите систему (a и b — данные числа)

$$\frac{x - y\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{1 - x^2 + y^2}} = a, \quad \frac{y - x\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{1 - x^2 + y^2}} = b.$$

*). Правильнее сказать, что одинаковы суммы падений напряжения, но, поскольку все проводники имеют единичные сопротивления, можно говорить и о токах.