Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ
Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.

КИМ Ответ: -0,8 . Бланк 10 −0,8

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, что ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 записан под правильным номером.

Желаем успеха!

Справочные материалы

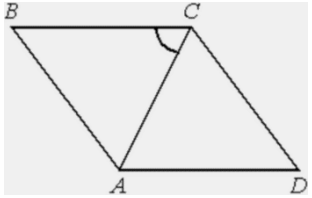
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Составитель: Школа Пифагора

Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 В ромбе $ABCD$ угол CDA равен 78°. Найдите угол ACB. Ответ дайте в градусах.

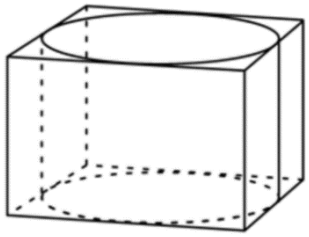


Ответ: _____.

2 Даны векторы $\vec{a}\ (7;1)$ и $\vec{b}\ (-1;-7)$. Найдите косинус угла между ними.

Ответ: _____.

3 Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания которого равен 3. Объём параллелепипеда равен 36. Найдите высоту цилиндра.



Ответ: _____.

4 В фирме такси в наличии 60 легковых автомобилей; 27 из них чёрного цвета с жёлтыми надписями на боках, остальные – жёлтого цвета с чёрными надписями. Найдите вероятность того, что на случайный вызов приедет машина жёлтого цвета с чёрными надписями.

Ответ: _____.

5 Игральную кость бросили два раза. Известно, что шесть очков не выпало ни разу. Найдите при этом условии вероятность события «сумма очков равна 9».

Ответ: _____.

6 Найдите корень уравнения

$(6x - 13)^2 = (6x - 11)^2$.

Ответ: _____.

7 Найдите значение выражения

$\sqrt{2}\sin\frac{7\pi}{8}\cdot\cos\frac{7\pi}{8}$.

Ответ: _____.

8 Прямая $y = -3x - 5$ является касательной к графику функции $y = x^2 + 7x + c$. Найдите c.

Ответ: _____.

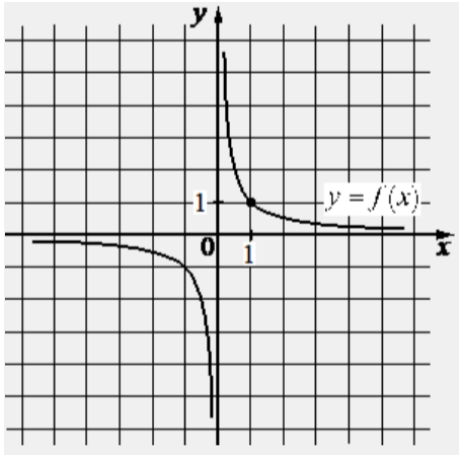
9 Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t) = 2 + 13t - 5t^2$, где h – высота в метрах, t – время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее 8 метров?

Ответ: _____.

10 Две трубы наполняют бассейн за 1 час 55 минут, а одна первая труба наполняет бассейн за 46 часов. За сколько часов наполняет бассейн одна вторая труба?

Ответ: _____.

11 На рисунке изображён график функции вида $f(x) = \frac{k}{x}$. Найдите значение $f(10)$.



Ответ: _____.

12 Найдите наименьшее значение функции

$y = e^{2x} - 2e^x + 8$ на отрезке $[-2; 1]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение

$$2\cos^2 x - 3\sin(-x) - 3 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

14 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны 6. На рёбрах AA_1 и CC_1 отмечены точки M и N соответственно, причём $AM = 2$, $CN = 1$.

а) Докажите, что плоскость MNB_1 разбивает призму на два многогранника, объёмы которых равны.
б) Найдите объём тетраэдра $MNBB_1$.

15 Решите неравенство

$$\frac{2 \cdot 4^{x-2}}{2 \cdot 4^{x-2} - 1} \leq \frac{7}{4^x - 1} + \frac{40}{16^x - 9 \cdot 4^x + 8}.$$

16 В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму на 10 лет. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг будет возрастать на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо оплатить одним платежом часть долга;
– в июле 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг должен быть на какую-то одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
– в июле 2030 года долг должен составить 600 тыс. рублей;
– в июле 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов долг должен быть на другую одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
– к июлю 2035 года долг должен быть выплачен полностью.

Найдите начальную сумму кредита, если сумма выплат по кредиту равна 2360 тысяч рублей.

17 В трапеции $ABCD$ основание AD в два раза больше основания BC. Внутри трапеции взяли точку M так, что углы ABM и DCM прямые.

а) Докажите, что $AM = DM$.
б) Найдите угол BAD, если угол ADC равен 70°, а расстояние от точки M до прямой AD равно стороне BC.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$(4\cos x - 3 - a) \cdot \cos x - 2{,}5\cos 2x + 1{,}5 = 0$$

имеет хотя бы один корень.

19 Есть три коробки: в первой коробке 64 камня, во второй – 77, в третьей пусто. За один ход разрешается взять по камню из двух коробок и положить в оставшуюся.

а) Могло ли в первой коробке оказаться 64 камня, во второй – 59, в третьей – 18?
б) Могло ли в третьей коробке оказаться 141 камень?
в) Какое наибольшее число камней могло оказаться в третьей коробке?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:	
ФИО:	Евгений Пифагор
Предмет:	Математика
Стаж:	14 лет готовлю к ЕГЭ и ОГЭ
Регалии:	Набрал 100 баллов на ЕГЭ по математике профиль Результаты моих учеников Высшее образование – ТГУ (Тольятти), 2009-2014 Победитель трёх олимпиад по высшей математике
ВК:	https://vk.com/shkolapifagora
Ютуб:	https://www.youtube.com/c/pifagor1

Система оценивания экзаменационной работы по математике (профильный уровень)

Правильное выполнение каждого из заданий 1–12 оценивается 1 баллом. Задание считается выполненным верно, если ответ записан в той форме, которая указана в инструкции по выполнению задания, и полностью совпадает с эталоном ответа.

Номер задания	Правильный ответ	Видео решение
1	51	▶
2	-0,28	▶
3	1	▶
4	0,55	▶
5	0,08	▶
6	2	▶
7	-0,5	▶
8	20	▶
9	1,4	▶
10	2	▶
11	0,1	▶
12	7	▶
13	а) $\frac{\pi}{2}+2\pi n, \frac{\pi}{6}+2\pi n, \frac{5\pi}{6}+2\pi n; n \in Z$ б) $\frac{5\pi}{2}; \frac{17\pi}{6}$	▶
14	$18\sqrt{3}$	▶
15	$(0; 1{,}5)$	▶
16	1100 тыс.	▶
17	65	▶
18	$(-\infty; -6] \cup [0; +\infty)$	▶
19	а) да б) нет в) 140	▶

Решения и критерии оценивания выполнения заданий с развёрнутым ответом

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. **Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.**

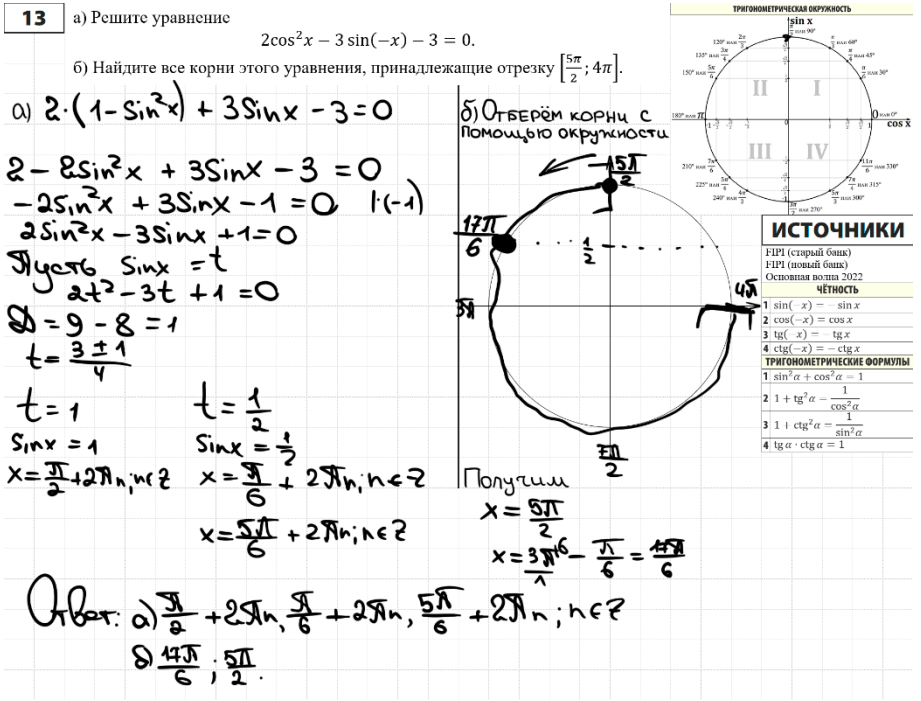
Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках, входящих в федеральный перечень учебников, допущенных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

13 а) Решите уравнение

$$2\cos^2 x - 3\sin(-x) - 3 = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.



Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

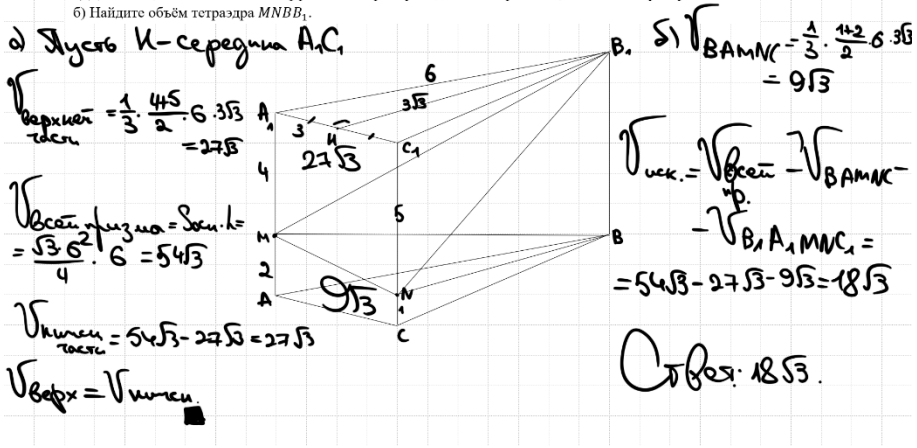
14 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны 6. На рёбрах AA_1 и CC_1 отмечены точки M и N соответственно, причём $AM = 2$, $CN = 1$.

а) Докажите, что плоскость MNB_1 разбивает призму на два многогранника, объёмы которых равны.

б) Найдите объём тетраэдра $MNBB_1$.

ИСТОЧНИКИ

Досрочная волна 2016



Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

15 Решите неравенство

$$\frac{2 \cdot 4^{x-2}}{2 \cdot 4^{x-2} - 1} \le \frac{7}{4^x - 1} + \frac{40}{16^x - 9 \cdot 4^x + 8}.$$

ИСТОЧНИКИ

Основная волна 2024
Основная волна 2017

СТЕПЕНИ

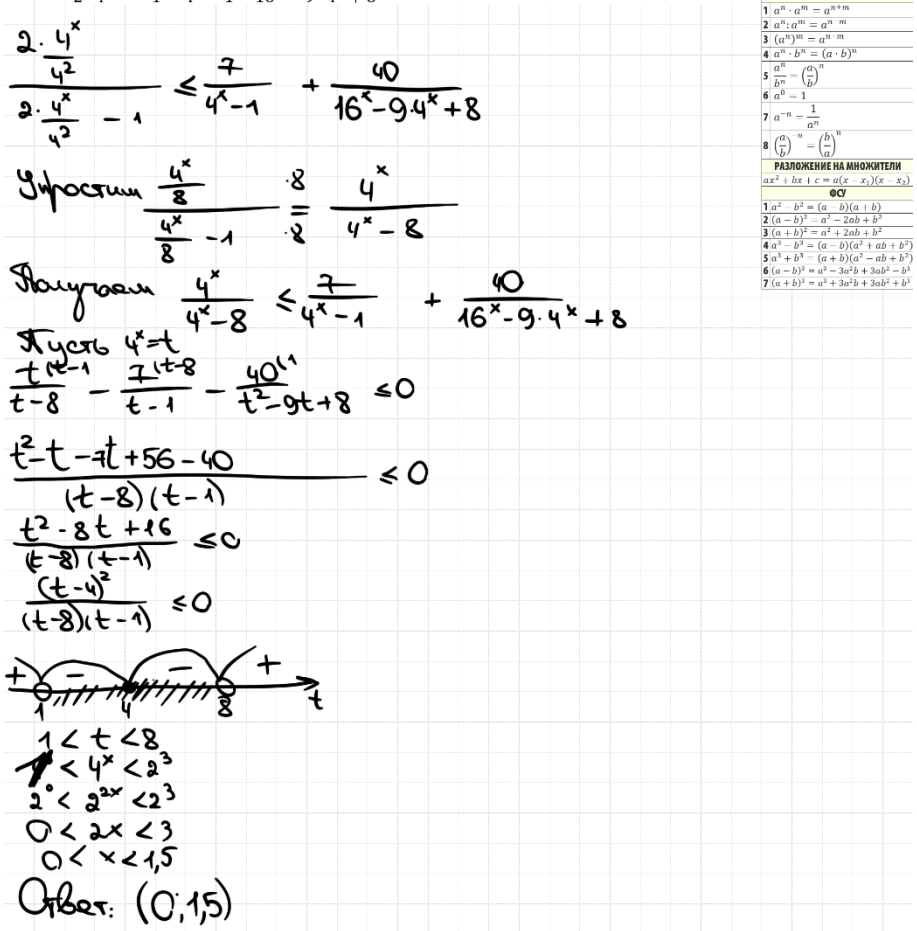
1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
2. $a^n : a^m = a^{n-m}$
3. $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
4. $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
5. $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
6. $a^0 = 1$
7. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
8. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

РАЗЛОЖЕНИЕ НА МНОЖИТЕЛИ

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

ФСУ

1. $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
2. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
4. $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
5. $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
6. $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
7. $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$



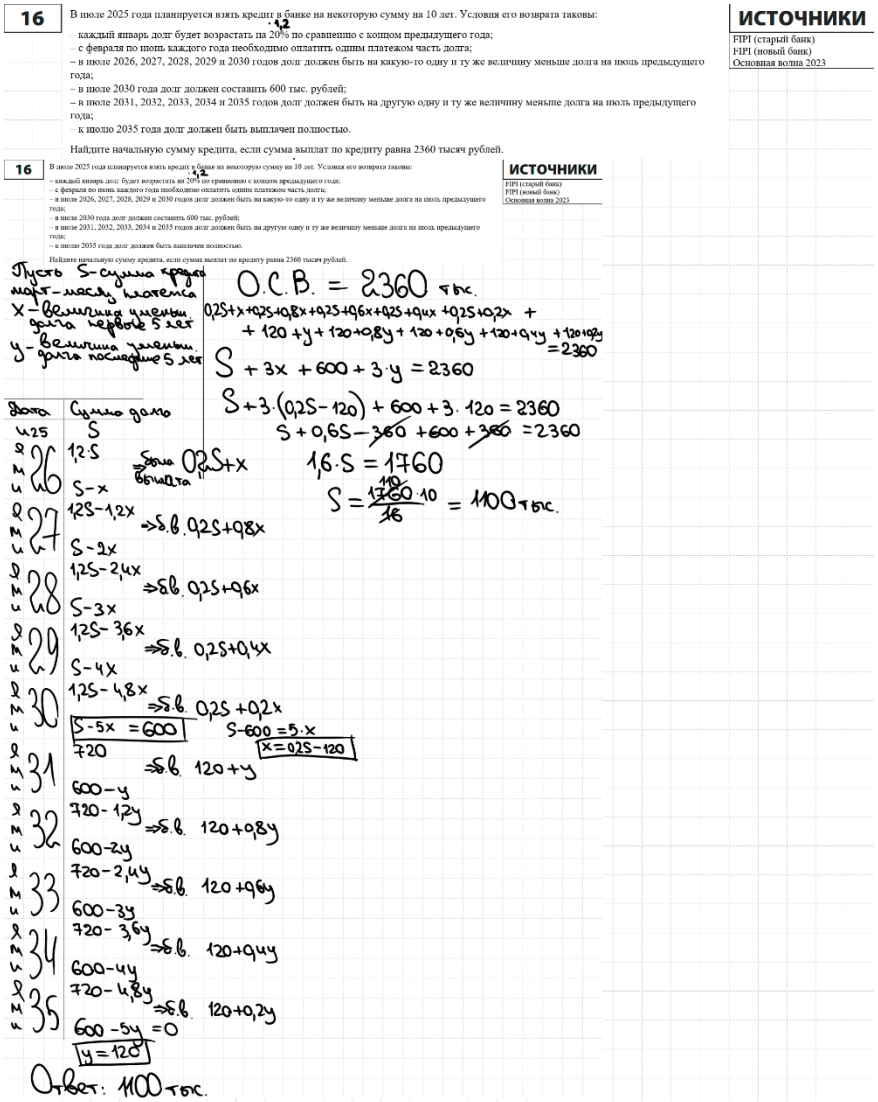
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму на 10 лет. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг будет возрастать на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо оплатить одним платежом часть долга;
– в июле 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг должен быть на какую-то одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
– в июле 2030 года долг должен составить 600 тыс. рублей;
– в июле 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов долг должен быть на другую одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
– к июлю 2035 года долг должен быть выплачен полностью.

Найдите начальную сумму кредита, если сумма выплат по кредиту равна 2360 тысяч рублей.

ИСТОЧНИКИ
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2023



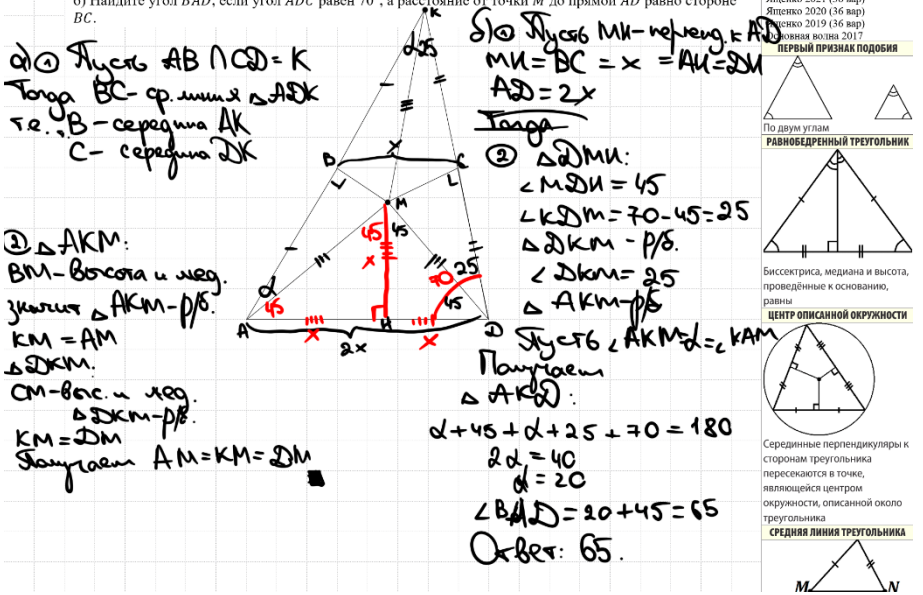
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

17 В трапеции $ABCD$ основание AD в два раза больше основания BC. Внутри трапеции взяли точку M так, что углы ABM и DCM прямые.

а) Докажите, что $AM = DM$.

б) Найдите угол BAD, если угол ADC равен 70°, а расстояние от точки M до прямой AD равно стороне BC.

ИСТОЧНИКИ
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Яценко 2022 (36 вар)
Яценко 2021 (36 вар)
Яценко 2020 (36 вар)
Яценко 2019 (36 вар)
Основная волна 2017



ПЕРВЫЙ ПРИЗНАК ПОДОБИЯ
По двум углам
РАВНОБЕДРЕННЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК
Биссектриса, медиана и высота, проведённые к основанию, равны
ЦЕНТР ОПИСАННОЙ ОКРУЖНОСТИ
Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в точке, являющейся центром окружности, описанной около треугольника
СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

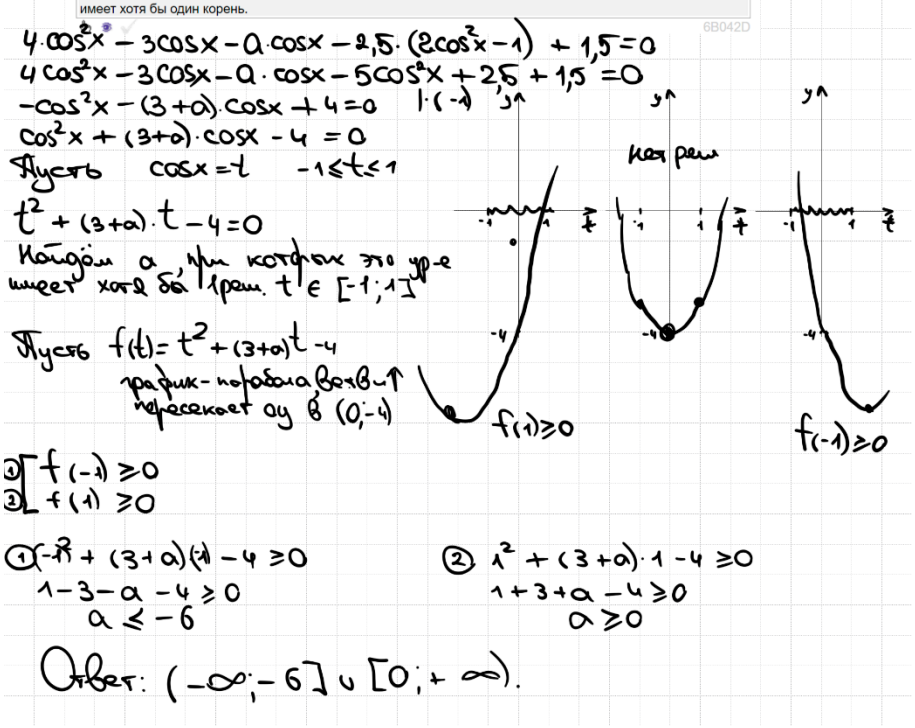
$$(4\cos x - 3 - a)\cdot\cos x - 2{,}5\cos 2x + 1{,}5 = 0$$

имеет хотя бы один корень.

ИСТОЧНИКИ

ГИРТ (старый банк)
Досрочная волна 2013

6B042D



Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Есть три коробки: в первой коробке 64 камня, во второй – 77, в третьей пусто. За один ход разрешается взять по камню из двух коробок и положить в оставшуюся.

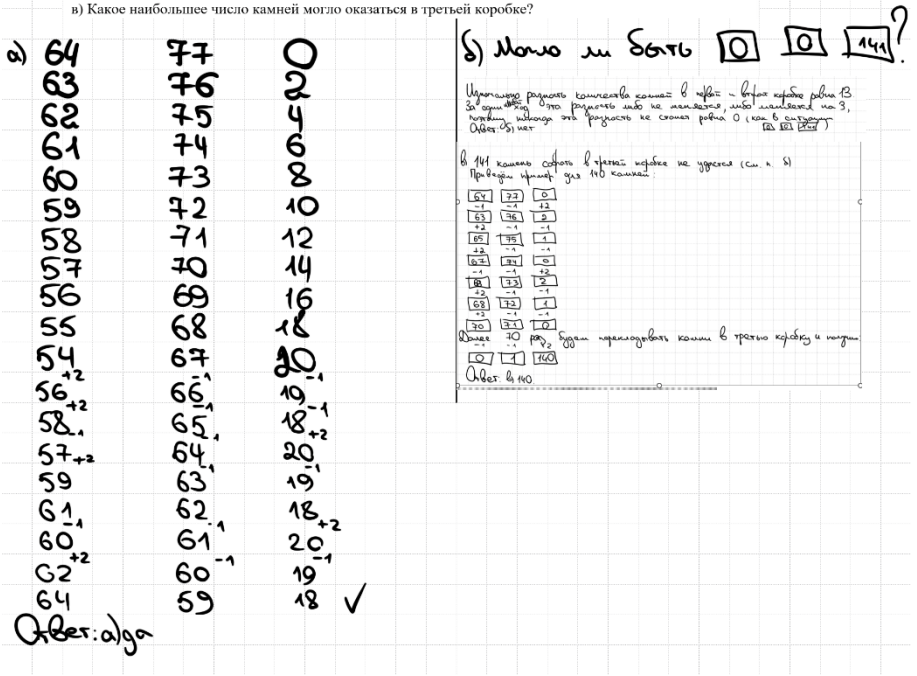
а) Могло ли в первой коробке оказаться 64 камня, во второй – 59, в третьей – 18?

б) Могло ли в третьей коробке оказаться 141 камень?

в) Какое наибольшее число камней могло оказаться в третьей коробке?

ИСТОЧНИКИ

Основная волна 2022



Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а, б* и *в*	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте *в* и обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а* и *б* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *в*	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4