

**Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ
Профильный уровень**

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.

КИМ

Ответ: -0,8.

10	-	0	,	8															
----	---	---	---	---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Бланк

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, что ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 записан под правильным номером.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

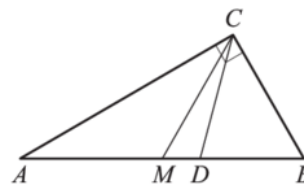
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1

Острый угол B прямоугольного треугольника равен 66° . Найдите угол между биссектрисой CD и медианой CM , проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.



Ответ: _____.

2

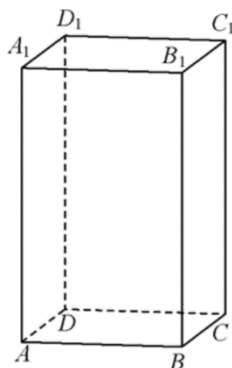
Длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны 3 и 5, а угол между ними равен 60° . Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Ответ: _____.





- 3 Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, D, A_1, B, C, B_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AB = 3, AD = 4, AA_1 = 5$.



Ответ: _____.

- 4 Научная конференция проводится в 4 дня. Всего запланировано 80 докладов – первые два дня по 12 докладов, остальные распределены поровну между третьим и четвёртым днями. На конференции планируется доклад профессора М. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что доклад профессора М. окажется запланированным на последний день конференции?

Ответ: _____.

- 5 Симметричную игральную кость бросили 3 раза. Известно, что в сумме выпало 6 очков. Какова вероятность события «хотя бы раз выпало 3 очка»?

Ответ: _____.

- 6 Найдите корень уравнения

$$6^{1+3x} = 36^{2x}.$$

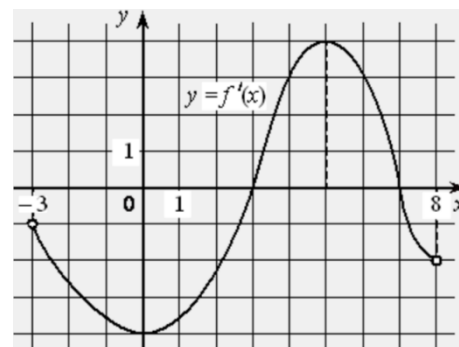
Ответ: _____.

- 7 Найдите значение выражения

$$\frac{\log_5 2}{\log_5 13} + \log_{13} 0,5.$$

Ответ: _____.

- 8 На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3; 8)$. Найдите точку максимума функции $f(x)$.



Ответ: _____.

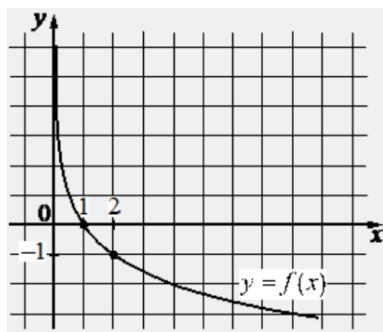
- 9 Для обогрева помещения, температура в котором поддерживается на уровне $T_n = 25^\circ\text{C}$, через радиатор отопления пропускают горячую воду. Расход проходящей через трубу радиатора воды $m = 0,3$ кг/с. Проходя по трубе расстояние x , вода охлаждается от начальной температуры $T_b = 57^\circ\text{C}$ до температуры T , причём $x = \alpha \cdot \frac{cm}{\gamma} \cdot \log_2 \frac{T_b - T_n}{T - T_n}$, где $c = 4200 \frac{\text{Вт} \cdot \text{с}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}}$ — теплоёмкость воды, $\gamma = 63 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^\circ\text{C}}$ — коэффициент теплообмена, а $\alpha = 1,4$ — постоянная. Найдите, до какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы радиатора равна 56 м.

Ответ: _____.

- 10 Имеется два сосуда. Первый содержит 80 кг, а второй – 70 кг раствора кислоты различной концентрации. Если эти растворы смешать, то получится раствор, содержащий 63% кислоты. Если же смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 65% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в первом сосуде?

Ответ: _____.

- 11 На рисунке изображён график функции вида $f(x) = \log_a x$. Найдите значение $f(16)$.



Ответ: _____.

- 12 Найдите наименьшее значение функции $y = (2x + 15) \cdot e^{2x+16}$ на отрезке $[-12; -2]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13 а) Решите уравнение

$$\log_{13}(\cos 2x - 9\sqrt{2} \cos x - 8) = 0.$$

- б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2\pi; -\frac{\pi}{2}]$.

- 14 В треугольной пирамиде $SABC$ известны боковые рёбра: $SA = SB = 13$, $SC = 3\sqrt{17}$. Основанием высоты этой пирамиды является середина медианы CM треугольника ABC . Эта высота равна 12.

- а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.
б) Найдите объём пирамиды $SABC$.

- 15 Решите неравенство

$$\log_{0,5}(x^3 - 3x^2 - 9x + 27) \leq \log_{0,25}(x - 3)^4.$$

- 16 В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплачивать одним платежом часть долга.

Если ежегодно выплачивать по 1 464 100 рублей, то кредит будет полностью погашен за 4 года, а если ежегодно выплачивать по 2 674 100 рублей, то кредит будет полностью погашен за 2 года. Найдите r .



- 17 В трапеции $ABCD$ угол BAD прямой. Окружность, построенная на большем основании AD как на диаметре, пересекает меньшее основание BC в точках C и M .

- а) Докажите, что $\angle BAM = \angle CAD$.
б) Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O . Найдите площадь треугольника AOB , если $AB = \sqrt{10}$, а $BC = 2BM$.

- 18 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$x^2 + (a + 7)^2 = |x - 7 - a| + |x + a + 7|$$

имеет единственный корень.

- 19 На доске написано n единиц подряд. Между некоторыми из них расставляют знаки «+» и считают получившуюся сумму. Например, если было написано 10 единиц, то можно получить сумму 136: $1+1+111+11+11+1=136$

- а) Можно ли получить сумму 141, если $n = 60$?
б) Можно ли получить сумму 141, если $n = 80$?
в) Для скольких значений n можно получить сумму 141?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:

ФИО:	Евгений Пифагор
Предмет:	Математика
Стаж:	14 лет готовлю к ЕГЭ и ОГЭ
Регалии:	Набрал 100 баллов на ЕГЭ по математике профиль Результаты моих учеников Высшее образование – ТГУ (Тольятти), 2009-2014 Победитель трёх олимпиад по высшей математике
ВК:	https://vk.com/shkolapifagora
Ютуб:	https://www.youtube.com/c/pifagor1



Система оценивания экзаменационной работы по математике (профильный уровень)

Правильное выполнение каждого из заданий 1–12 оценивается 1 баллом. Задание считается выполненным верно, если ответ записан в той форме, которая указана в инструкции по выполнению задания, и полностью совпадает с эталоном ответа.

Номер задания	Правильный ответ	Видео решение
1	21	
2	7,5	
3	30	
4	0,35	
5	0,6	
6	1	
7	0	
8	7	
9	33	
10	28	
11	-4	
12	-1	
13	а) $\pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$ б) $-\frac{5\pi}{4}; -\frac{3\pi}{4}$	
14	96	
15	$[-2; 3) \cup (3; +\infty)$	
16	10	
17	$3\sqrt{2}$	
18	$\{-5\} \cup \{-9\}$	
19	а) да б) нет в) 15	

Решения и критерии оценивания выполнения заданий с развёрнутым ответом

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках, входящих в федеральный перечень учебников, допущенных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.



13 а) Решите уравнение

$$\log_{13}(\cos 2x - 9\sqrt{2} \cos x - 8) = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2\pi; -\frac{\pi}{2}]$.

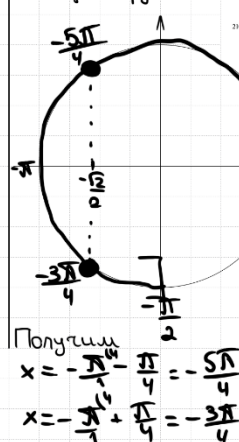
$$\begin{aligned} \text{а) } \cos 2x - 9\sqrt{2} \cos x - 8 &= 1 \\ \cos 2x - 9\sqrt{2} \cos x - 9 &= 0 \\ 2\cos^2 x - 1 - 9\sqrt{2} \cos x - 9 &= 0 \\ 2\cos^2 x - 9\sqrt{2} \cos x - 10 &= 0 \\ \text{Пусть } \cos x &= t \\ 2t^2 - 9\sqrt{2}t - 10 &= 0 \\ D &= (-9\sqrt{2})^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-10) = 242 = 121 \cdot 2 \\ t &= \frac{9\sqrt{2} \pm 11\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t &= 5\sqrt{2} & t &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos x &= 5\sqrt{2} & \cos x &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{нет решений} & & x &= \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: а) } \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{б) } -\frac{5\pi}{4}; -\frac{3\pi}{4}.$$

б) Ответим корни с помощью окружности



$$\begin{aligned} \text{Получим} \\ x &= -\frac{5\pi}{4} \\ x &= -\frac{3\pi}{4} \end{aligned}$$



ИСТОЧНИКИ

Досрочная волна 2023

Основная волна 2017

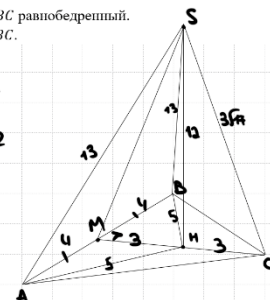
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛОГАРИФМА

если $\log_a b = c$, то $a^c = b$

ФОРМУЛЫ ДВОЙНОГО УГЛА

1 $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$ 2 $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ 3 $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$ 4 $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$

14

В треугольной пирамиде $SABC$ известны боковые рёбра: $SA = SB = 13$, $SC = 3\sqrt{17}$. Основанием высоты этой пирамиды является середина медианы CM треугольника ABC . Эта высота равна 12.а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.б) Найдите объём пирамиды $SABC$.а) Пусть SH - высота $\triangle SAH$ - прямоугольныйт.к. $SH \perp$ пл. осн. $AH = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$ $\triangle SBH$ - прямоугольный $BH = 5$ б) $\triangle ABH$ - р/б.т.к. $SH \perp$ пл. осн.значит SH - высота $\angle BHC = 90^\circ$ значит CM - высота и мед. $\triangle ABC$ $\triangle ABC$ - р/б

$$\text{б) } V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CM \cdot SH$$

$$\text{а) } \triangle SCH:$$

$$CH = \sqrt{(3\sqrt{17})^2 - 12^2} = 3 = CM$$

$$\triangle BMC:$$

$$BM = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 \cdot 12 = 96$$

$$\text{Отв. } 96.$$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Получен обоснованный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а, и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

15 Решите неравенство

$$\log_{0,5}(x^3 - 3x^2 - 9x + 27) \leq \log_{0,25}(x - 3)^4.$$

$$\log_{0,5}(x^2 \cdot (x-3) - 9 \cdot (x-3)) \leq \log_{0,5}(x-3)^2$$

$$\begin{aligned} ① & (x-3) \cdot (x^2-9) \geq (x-3)^2 \\ ② & (x-3) \cdot (x^2-9) > 0 \\ ③ & (x-3)^2 > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ① & (x-3) \cdot (x-3)(x+3) - (x-3)^2 \geq 0 \\ & (x-3)^2 \cdot (x+3-1) \geq 0 \\ & (x-3)^2 \cdot (x+2) \geq 0 \end{aligned}$$



Каждое пересечение:

Ответ: $[-2; 3) \cup (3; +\infty)$

ИСТОЧНИКИ

ГПР (старый банк)
ГПР (новый банк)

Основная волна 2023

СВОЙСТВА ЛОГАРИФМОВ

1 $\log_a b + \log_a c = \log_a (b \cdot c)$

2 $\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$

3 $\log_a b^m = m \cdot \log_a b$

4 $\log_a b = \frac{1}{n} \cdot \log_a b^n$

5 $\log_a b = \frac{\log_c a}{\log_c b}$

6 $\log_a b = \log_c a$

7 $\log_a b = \log_c a$

8 $\log_a b = \log_c a$

9 $\log_a b = \log_c a$

10 $\log_a b = \log_c a$

11 $\log_a b = \log_c a$

12 $\log_a b = \log_c a$

13 $\log_a b = \log_c a$

14 $\log_a b = \log_c a$

15 $\log_a b = \log_c a$

16 $\log_a b = \log_c a$

17 $\log_a b = \log_c a$

18 $\log_a b = \log_c a$

19 $\log_a b = \log_c a$

20 $\log_a b = \log_c a$

21 $\log_a b = \log_c a$

22 $\log_a b = \log_c a$

23 $\log_a b = \log_c a$

24 $\log_a b = \log_c a$

25 $\log_a b = \log_c a$

26 $\log_a b = \log_c a$

27 $\log_a b = \log_c a$

28 $\log_a b = \log_c a$

29 $\log_a b = \log_c a$

30 $\log_a b = \log_c a$

31 $\log_a b = \log_c a$

32 $\log_a b = \log_c a$

33 $\log_a b = \log_c a$

34 $\log_a b = \log_c a$

35 $\log_a b = \log_c a$

36 $\log_a b = \log_c a$

37 $\log_a b = \log_c a$

38 $\log_a b = \log_c a$

39 $\log_a b = \log_c a$

40 $\log_a b = \log_c a$

16

В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплачивать одним платежом часть долга.

Если ежегодно выплачивать по 1 464 100 рублей, то кредит будет полностью погашен за 4 года, а если ежегодно выплачивать по 2 674 100 рублей, то кредит будет полностью погашен за 2 года. Найдите r .

Пусть S – сумма долга

$$\left(1 + \frac{r}{100}\right)^4 = \frac{S}{1464100}$$

март – месяц платежа

$$x = 1464100$$

$$y = 2674100$$

Кредит на 4 года

Дата	Сумма долга
1.20	S
1.21	$S \cdot \frac{r}{100} - x$
1.22	$S \cdot \frac{r^2}{100^2} - x \cdot \frac{r}{100}$
1.23	$S \cdot \frac{r^3}{100^3} - x \cdot \frac{r^2}{100^2} - x \cdot \frac{r}{100}$
1.24	$S \cdot \frac{r^4}{100^4} - x \cdot \frac{r^3}{100^3} - x \cdot \frac{r^2}{100^2} - x \cdot \frac{r}{100}$

Кредит на 2 года

Дата	Сумма долга
1.20	S
1.21	$S \cdot \frac{r}{100} - y$
1.22	$S \cdot \frac{r^2}{100^2} - y \cdot \frac{r}{100}$

Ответ: 10

ИСТОЧНИКИ

ГПР (старый банк)
ГПР (новый банк)

Основная волна 2023

Пересдача 2024

Основная волна 2017

Ященко 2018

Семёнов 2015

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2





- 17 В трапеции $ABCD$ угол BAD прямой. Окружность, построенная на большем основании AD как на диаметре, пересекает меньшее основание BC в точках C и M .
- а) Докажите, что $\angle BAM = \angle CAD$.
- б) Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O . Найдите площадь треугольника AOB , если $AB = \sqrt{10}$, а $BC = 2BM$.

а) Пусть $\angle CAD = \alpha$
 Тогда $\angle ACM = \alpha$
 (накрест. лев.)
 $\angle AM = 2\angle ACM = 2\alpha$
 $\angle BAM = \frac{1}{2} \angle AM = \alpha$
 (т. об. угол между кас. и хордой)
 Получаем
 $\angle BAM = \alpha = \angle CAD$

б) 1) Пусть $BM = x$
 $BC = 2x$
 Тогда $CM = x$
 по т. о кас. и секущей
 $AB^2 = BM \cdot BC$
 $10 = x \cdot 2x$
 $2x^2 = 10$
 $x = \sqrt{5}$

2) Пусть CE - высота трапеции $ABCD$
 Тогда $DE = x$
 $ADCE$ - р.б. трап.
 $AD = 3x$

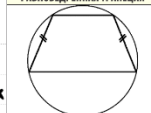
3) $\triangle BOC \sim \triangle AOD$ по 2 углам (...)
 $\frac{BC}{AO} = \frac{2x}{3x} = \frac{CO}{AO} = \frac{2\alpha}{3\alpha}$

4) Пусть OH - высота $\triangle AOB$
 $\triangle ABC \sim \triangle AOH$ по 2 углам (...)
 $k = \frac{AO}{3\alpha} = \frac{BC}{OH}$
 $\frac{5}{3} = \frac{2\sqrt{5}}{OH}$
 $OH = \frac{2 \cdot 3\sqrt{5}}{5}$
 $S_{AOB} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{10} \cdot \frac{2 \cdot 3\sqrt{5}}{5} = 3\sqrt{2}$
 Ответ: $3\sqrt{2}$.

ИСТОЧНИКИ

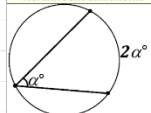
ГПР (старый банк)
 ГПР (новый банк)
 Основная школа 2017

РАВНОБЕДРЕННАЯ ТРАПЕЦИЯ



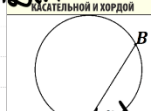
Если трапеция вписана в окружность, то она - равнобедренная

ТЕОРЕМА О ВПИСАННОМ УГЛЕ

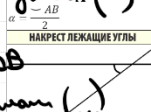


Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается

УГЛА ОБ УГЛЕ МЕЖДУ КАСАТЕЛЬНОЙ И ХОРДОЙ



НАКРЕСТ ЛЕЖАЩИЕ УГЛЫ



Если внутренние накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны (признак параллельности прямых)

СУММА УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА

180°

ТЕОРЕМА О КАСАТЕЛЬНОЙ И СЕКУЩЕЙ



Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , и обоснованно получен верный ответ в пункте b	3
Получен обоснованный ответ в пункте b ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта a , и при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , ИЛИ при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте b с использованием утверждения пункта a , при этом пункт a не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3



- 18 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $x^2 + (a+7)^2 = |x-7-a| + |x+a+7|$

ИСТОЧНИКИ

ЕГЭ (старый базис)
ЕГЭ (новый базис)
Январь 2019 (36 вар)
Сентябрь 2015
Основания ноября 2013

- 1) имеет единственный корень.

$$x^2 + (a+7)^2 - |x-7-a| - |x+a+7| = 0$$

Пусть $f(x) = x^2 + (a+7)^2 - |x-7-a| - |x+a+7|$
 $f(-x) = (-x)^2 + (a+7)^2 - |-x-7-a| - |-x+a+7| = x^2 + (a+7)^2 - |x+a+7| - |x-7-a|$
 $f(-x) = f(x)$, значит $f(x)$ — четная Ф-ция
 единств. корень четной Ф-ции может иметь, только если $x=0$

2) Найдём x для каких a $x=0$

$$a^2 + (a+7)^2 = |0-7-a| + |0+a+7|$$

$$(a+7)^2 = |a+7| + |a+7|$$

$$|a+7|^2 - 2|a+7| = 0$$

$$|a+7| \cdot (|a+7| - 2) = 0$$

$$|a+7| = 0 \quad |a+7| = 2$$

$$a+7 = 0 \quad a+7 = 2 \quad a+7 = -2$$

$$a = -7 \quad a = -5 \quad a = -9$$

3) Проверим x для каких из этих a будет единств. реш.

Если $a = -7$, то

$$x^2 = |x| + |x|$$

$$|x|^2 - 2|x| = 0$$

$$|x| \cdot (|x| - 2) = 0$$

$$|x| = 0 \quad |x| = 2$$

$$x = 0 \quad x = 2 \quad x = -2$$

Значит, т.е. $a = -7$ не подходит.

Если $a = -5$, то

$$x^2 + 4 = |x-2| + |x+2|$$

Если $x > 2$, то

$$x^2 + 4 = x - 2 + x + 2$$

$$x^2 - 2x + 4 = 0$$

$$(x^2 - 2x + 1) + 3 = 0$$

$$(x-1)^2 + 3 = 0$$

Нет реш.

Если $-2 \leq x \leq 2$, то

$$x^2 + 4 = -x + 2 + x + 2$$

$$x^2 = 0$$

$$x = 0$$

одн. реш.

Если $x < -2$, то

$$x^2 + 4 = -x + 2 - x - 2$$

$$x^2 + 2x + 4 = 0$$

нет реш.

т.е. x для $a = -5$ 1 реш.

Если $a = -9$, то

$$x^2 + 4 = |x+2| + |x-2|$$

x — единств. реш.

Ответ: $\{-9\} \cup \{-5\}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4



19 На доске написано n единиц подряд. Между некоторыми из них расставляют знаки «+» и считают получившуюся сумму. Например, если было написано 10 единиц, то можно получить сумму 136: $1+1+111+11+11+1=136$

ИСТОЧНИКИ

ФИПИ (старый банк)
Основания: август 2020

- а) Можно ли получить сумму 141, если $n = 60$?
б) Можно ли получить сумму 141, если $n = 80$?
в) Для скольких значений n можно получить сумму 141?

а) Ответ: да, если взять 9 раз по 11 и 42 раз по 1
 $9 \cdot 11 + 42 \cdot 1 = 141$

по дате написания задания на доске использовались единицы 171

а) Да, можно, если взять 9 раз по 11 и 42 раз по 1. б) Если взять 10 слагаемых 11, то $S = 110 + 60 = 170 \times$
Если взять > 10 слагаемых 11, то $S > 170$

Получаем:
 $9 \cdot 11 + 42 \cdot 1 = 141$
Ответ: а) да.

б) Можно ли использовать 11?
 $S \geq 111 + 77 \cdot 1$
 $S \geq 188$
 $\Rightarrow$ Можно использовать только 1 и 11

ОТВЕТ:
а) да
б) нет
в) 15

Если взять 9 слаг. 11, то $S = 99 + 62 = 161 \times$

Если взять 8 слаг. 11, то $S = 88 + 64 = 152 \times$

Если взять 7 слаг. 11, то $S = 77 + 66 = 143 \times$

Если взять 6 слаг. 11, то $S = 66 + 68 = 134 \times$

Если взять < 6 слаг. 11, то $S < 134$
 $\Rightarrow$ Получить сумму 141 невозможно.
Ответ: б) нет.

в) ① Числа 1111 и больше использовать нельзя

② Число 111 можно использовать только 1 раз

с 9 раз по 11 с 8 раз по 11 с 7 раз по 11
 $111 + 9 \cdot 11 + 8 \cdot 1$ $111 + 11 + 19 \cdot 1$ $111 + 30 \cdot 1$
 $n = 15$ $n = 24$ $n = 33$

③ Теперь используем только числа 11 и 1
Число 11 можно использовать не более 12 раз

Если 11 использовать 12 раз, то $12 \cdot 11 + 9 \cdot 1$ $n = 33$ (уже было)
11 раз, то $11 \cdot 11 + 20 \cdot 1$ $n = 42$
10 $n = 51$
9 $n = 60$
8 $n = 69$
7 $n = 78$
6 $n = 87$
5 $n = 96$
4 $n = 105$
3 $n = 114$
2 $n = 123$
1 $n = 132$
0 $n = 141$

Ответ: в) 15.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а, б и в	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте в и обоснованно получен верный ответ в пункте а или б	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а и б ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте в	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4