

**Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ
Профильный уровень**

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.

КИМ

Ответ: -0,8.

10	-	0	,	8																
----	---	---	---	---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Бланк

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, что ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 записан под правильным номером.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

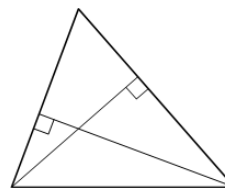
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1

Две стороны треугольника равны 21 и 28. Высота, опущенная на большую из этих сторон, равна 15. Найдите высоту, опущенную на меньшую из этих сторон треугольника.



Ответ: _____.

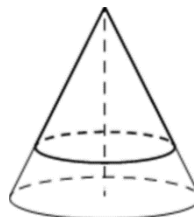
2

Даны векторы $\vec{a} (3; 4)$ и $\vec{b} (-4; -3)$. Найдите косинус угла между ними.

Ответ: _____.

3

Площадь полной поверхности конуса равна 32,5. Параллельно основанию конуса проведено сечение, делящее высоту в отношении 4:1, считая от вершины конуса. Найдите площадь полной поверхности отсечённого конуса.



Ответ: _____.





- 4 В случайном эксперименте симметричную монету бросают четырежды. Найдите вероятность того, что орёл выпадет ровно два раза.

Ответ: _____.

- 5 Чтобы пройти в следующий круг соревнований, футбольной команде нужно набрать хотя бы 4 очка в двух играх. Если команда выигрывает, она получает 3 очка, в случае ничьей – 1 очко, если проигрывает – 0 очков. Найдите вероятность того, что команде удастся выйти в следующий круг соревнований. Считайте, что в каждой игре вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,2.

Ответ: _____.

- 6 Найдите корень уравнения

$$2^{x-3} = \frac{1}{16}.$$

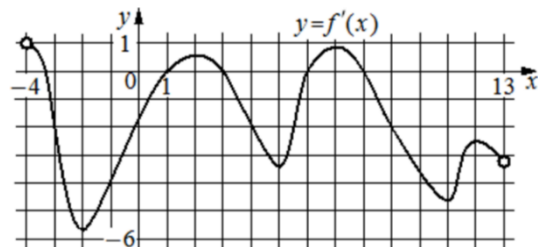
Ответ: _____.

- 7 Найдите значение выражения

$$\log_{\sqrt[6]{13}} 13.$$

Ответ: _____.

- 8 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-4; 13)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = -2x - 10$ или совпадает с ней.



Ответ: _____.

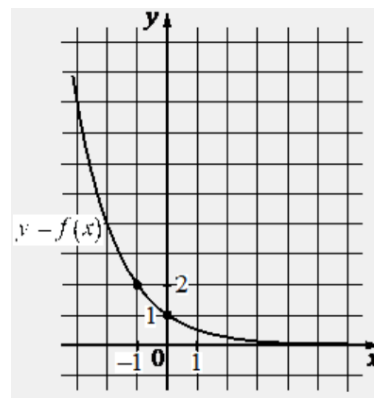
- 9 Два тела, массой $m = 2$ кг каждое, движутся с одинаковой скоростью $v = 8$ м/с под углом 2α друг к другу. Энергия (в Дж), выделяющаяся при их абсолютно неупругом соударении, вычисляется по формуле $Q = mv^2 \sin^2 \alpha$, где m – масса (в кг), v – скорость (в м/с). Найдите, под каким углом 2α должны двигаться тела, чтобы в результате соударения выделилась энергия, равная 32 Дж. Ответ дайте в градусах.

Ответ: _____.

- 10 Первая труба пропускает на 5 литров воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если резервуар объемом 375 литров она заполняет на 10 минут быстрее, чем первая труба заполняет резервуар объемом 500 литров?

Ответ: _____.

- 11 На рисунке изображён график функции вида $f(x) = a^x$. Найдите значение $f(-3)$.



Ответ: _____.

- 12 Найдите наибольшее значение функции $y = \ln(x + 6)^3 - 3x$ на отрезке $[-5; 0]$.

Ответ: _____.



Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13** а) Решите уравнение

$$4 \sin x \cos^2 x - 2\sqrt{3} \sin 2x + 3 \sin x = 0.$$

 б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.
- 14** В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ отмечены середины M и N отрезков AB и AD соответственно.
 а) Докажите, что прямые $B_1 N$ и CM перпендикулярны.
 б) Найдите расстояние между этими прямыми, если $B_1 N = 3\sqrt{5}$.

- 15** Решите неравенство

$$\frac{\log_7(49x^2) - 7}{\log_7^2 x - 4} \leq 1.$$

- 16** 15-го марта в банке был взят кредит на некоторую сумму на 31 месяц. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по 30-й долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- 15-го числа 30-го месяца долг составит 100 тысяч рублей;
- к 15-му числу 31-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Какая сумма была взята в кредит, если общая сумма выплат после его погашения составила 555 тысяч рублей?

- 17** В треугольнике ABC провели высоту CC_1 и медиану AA_1 . Оказалось, что точки A, A_1, C, C_1 лежат на одной окружности.

- а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.
 б) Найдите площадь треугольника ABC , если $AA_1 : CC_1 = 4 : 3$ и $A_1 C_1 = 6$.

- 18** Найдите все значения a , при каждом из которых неравенство

$$\left| \frac{x^2 + ax + 1}{x^2 + x + 1} \right| < 3$$

выполняется при всех x .

- 19** Последовательность $a_1, a_2, \dots, a_6$ состоит из неотрицательных однозначных чисел. Пусть M_k – среднее арифметическое всех членов этой последовательности, кроме k -го. Известно, что $M_1 = 7, M_2 = 6$.

- а) Приведите пример такой последовательности, для которой $M_3 = 6,4$.
 б) Существует ли такая последовательность, для которой $M_3 = 5$?
 в) Найдите наименьшее возможное значение M_3 .

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.



СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:	
ФИО:	Евгений Пифагор
Предмет:	Математика
Стаж:	14 лет готовлю к ЕГЭ и ОГЭ
Регалии:	Набрал 100 баллов на ЕГЭ по математике профиль Результаты моих учеников Высшее образование – ТГУ (Тольятти), 2009-2014 Победитель трёх олимпиад по высшей математике
ВК:	https://vk.com/shkolapifagora
Ютуб:	https://www.youtube.com/c/pifagor1

Система оценивания экзаменационной работы по математике (профильный уровень)

Правильное выполнение каждого из заданий 1–12 оценивается 1 баллом. Задание считается выполненным верно, если ответ записан в той форме, которая указана в инструкции по выполнению задания, и полностью совпадает с эталоном ответа.

Номер задания	Правильный ответ	Видео решение
1	20	
2	-0,96	
3	20,8	
4	0,375	
5	0,28	
6	-1	
7	6	
8	5	
9	60	
10	25	
11	8	
12	15	
13	а) $\pi n, \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$ б) $-3\pi; -\frac{13\pi}{6}; -2\pi$	
14	2	
15	$\left(0; \frac{1}{49}\right) \cup \{7\} \cup (49; +\infty)$	
16	400 тыс.	
17	$12\sqrt{55}$	
18	$(-1; 5)$	
19	а) привели б) нет в) 5,2	



Решения и критерии оценивания выполнения заданий с развёрнутым ответом

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках, входящих в федеральный перечень учебников, допущенных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

13 а) Решите уравнение

$$4 \sin x \cos^2 x - 2\sqrt{3} \sin 2x + 3 \sin x = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi]$.

а) $4 \sin x \cos^2 x - 2\sqrt{3} \sin 2x + 3 \sin x = 0$

$$\sin x (4 \cos^2 x - 4\sqrt{3} \cos x + 3) = 0$$

$$\sin x = 0$$

$$x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$4 \cos^2 x - 4\sqrt{3} \cos x + 3 = 0$$

$$4t^2 - 4\sqrt{3}t + 3 = 0$$

$$D = 48 - 4 \cdot 4 \cdot 3 = 0$$

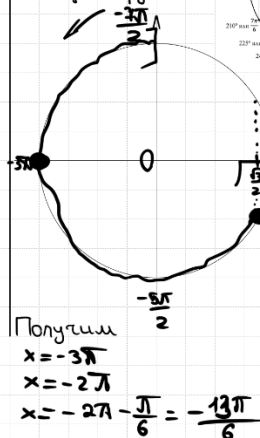
$$t = \frac{4\sqrt{3}}{8}$$

$$t = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

б) Отберём корни с помощью окружности.



Получим

$$x = -3\pi$$

$$x = -2\pi$$

$$x = -2\pi - \frac{\pi}{6} = -\frac{13\pi}{6}$$

Ответ: а) πn
б) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
в) $-3\pi; -2\pi; -\frac{13\pi}{6}$



ИСТОЧНИКИ

Основная волна 2021

Формулы двойного угла

1. $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$

2. $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

3. $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$

4. $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

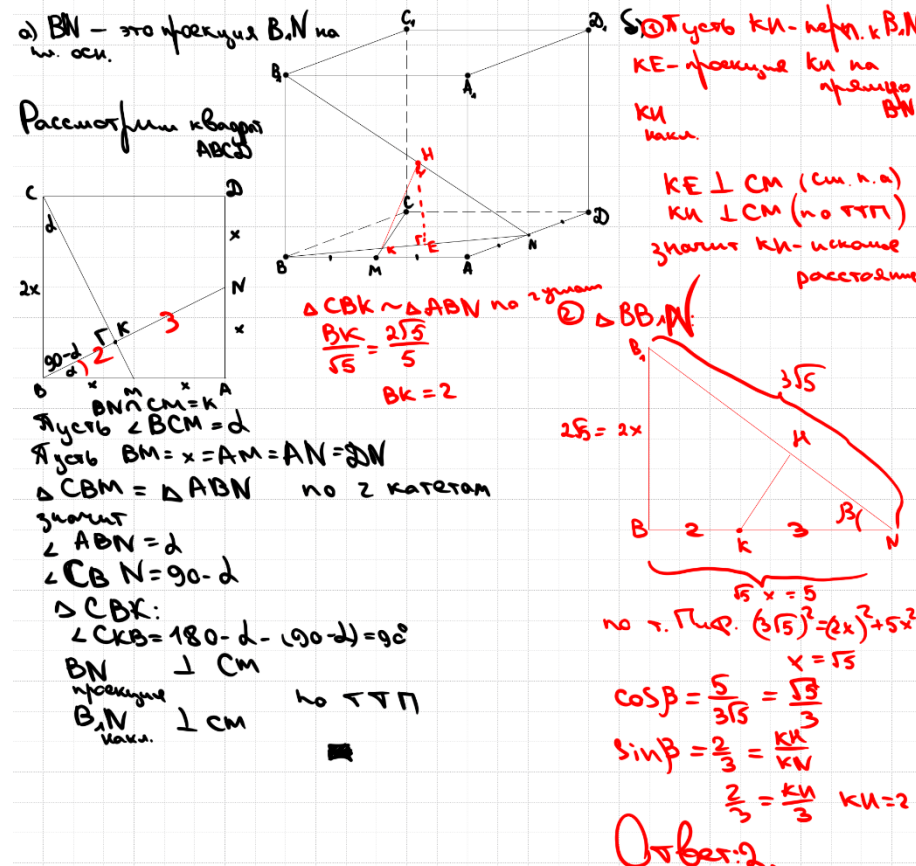
14

В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ отмечены середины M и N отрезков AB и AD соответственно.

- Докажите, что прямые $B_1 N$ и CM перпендикулярны.
- Найдите расстояние между этими прямыми, если $B_1 N = 3\sqrt{5}$.

ИСТОЧНИКИ

Основная волна 2022



Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , и обоснованно получен верный ответ в пункте b	3
Получен обоснованный ответ в пункте b ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта a , и при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , ИЛИ при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте b с использованием утверждения пункта a , при этом пункт a не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

15 Решите неравенство

$$\frac{\log_7(49x^2) - 7}{\log_7^2 x - 4} \leq 1.$$

$\log_7 49 + \log_7 x^2 - 7 = \frac{1}{1} (\log_7^2 x - 4)$
 $\log_7^2 x - 4$
 $2 + 2\log_7 |x| - 7 - \log_7^2 x + 4 \leq 0$
 $\log_7^2 x - 4$
 $\text{Пусть } \log_7 x = t$
 $\frac{-t^2 + 2t - 1}{t^2 - 4} \leq 0 \quad | \cdot (-1)$
 $\frac{t^2 - 2t + 1}{t^2 - 4} \geq 0$
 $\frac{(t-1)^2}{(t-2)(t+2)} \geq 0$

 $\begin{cases} t < -2 \\ t = 1 \\ t > 2 \end{cases}$
 $\log_7 x < \log_7 \frac{1}{49}$
 $0 < x < \frac{1}{49}$
 $\log_7 x = \log_7 7$
 $x = 7$
 $\log_7 x > \log_7 49$
 $x > 49$
Ответ: $(0; \frac{1}{49}) \cup \{7\} \cup (49; +\infty)$

ИСТОЧНИКИ

ГПР (старый банк)
ГПР (новый банк)
Досрочная волна 2022
Основные волны 2017

СВОЙСТВА ЛОГАРИФМОВ

- $\log_a b + \log_a c = \log_a (b \cdot c)$
- $\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$
- $\log_a b^m = m \cdot \log_a b$
- $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$
- $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$
- $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

ФОРМУЛЫ

- $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
- $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
- $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2



16 15-го марта в банке был взят кредит на некоторую сумму на 31 месяц. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по 30-й долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- 15-го числа 30-го месяца долг составит 100 тысяч рублей;
- к 15-му числу 31-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Какая сумма была взята в кредит, если общая сумма выплат после его погашения составила 555 тысяч рублей?

ИСТОЧНИКИ
ГПР (старый банк)
ГПР (новый банк)
Основная волна 2018
Основная волна (Резерв) 2021

Решение:
Пусть S — сумма кредита.
7-е число — день платежа.
 x — это сумма уменьшения долга первые 30 мес.
Первые 30 выплат
ср. арифм. прогр.
 $O.C.B. = 555$ тыс.
первые 30 выплат + 31-я = 555
выплата
 $0,02S + x + 0,02S + 0,12x = 30 + 102 = 555$
 $(0,02S + 0,71x) \cdot 30 = 453$
 $0,6S + 21,3x = 453$
 $0,6 \cdot (100 + 30x) + 21,3x = 453$
 $60 + 18x + 21,3x = 453$
 $39,3x = 393$
 $x = 10$ тыс.
 $S = 100 + 30x = 400$ тыс.
Ответ: 400 тыс.

17 В треугольнике ABC провели высоту CC_1 и медиану AA_1 . Оказалось, что точки A, A_1, C, C_1 лежат на одной окружности.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.
б) Найдите площадь треугольника ABC , если $AA_1 : CC_1 = 4 : 3$ и $A_1C_1 = 6$.

ИСТОЧНИКИ
Основная волна 2020
ТЕОРЕМА О ВПИСАННОМ УГЛЕ

Решение:
а) $\angle ACC_1 = 90^\circ$ — вписанный
значит AC — диаметр.
тогда $\angle AA_1C = 90^\circ$
(по т. о впис. угле)
б) $\triangle AA_1B \sim \triangle CC_1B$
по 2 углам ($\angle A_1AB = \angle C_1CB$ — вписанные, $\angle ABA_1 = \angle CBC_1$ — общий)
 $\frac{AA_1}{CC_1} = \frac{AB}{BC}$
 $\frac{4x}{3x} = \frac{AB}{BC}$
 $AB = 16 = AC$
 $\triangle ABC$ — равнобедренный.
Площадь $S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CC_1 = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 12 = 96$.
Ответ: 96.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Получен обоснованный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а, и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3



18	Найдите все значения a , при каждом из которых неравенство $\frac{x^2+ax+1}{x^2+x+1} < 3$ выполняется при всех x .	ИСТОЧНИКИ ГПР (старый банк) Основная волна (Резерв), 2012
----	--	---

$\frac{x^2+ax+1}{x^2+x+1} < 3$

Заметим, что $(x+0,5)^2 + 0,75 > 0$ при любых x

Значит $\frac{x^2+ax+1}{x^2+x+1} < 3 \quad | \cdot (x^2+x+1)$

$x^2+ax+1 < 3(x^2+x+1)$

$-3x^2-3x-3 < x^2+ax+1 < 3x^2+3x+3$

$\begin{cases} -3x^2-3x-3 < x^2+ax+1 \\ x^2+ax+1 < 3x^2+3x+3 \end{cases}$

① $\begin{cases} 4x^2+3x+a+4 > 0 \\ 2x^2+3x-ax+2 > 0 \end{cases}$

$\begin{cases} D_1 < 0 \\ D_2 < 0 \end{cases}$

$\begin{cases} (3+a)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 4 < 0 \\ (3+a)^2 - 8^2 < 0 \\ (3+a-8)(3+a+8) < 0 \\ (a-5)(a+11) < 0 \end{cases}$

$\begin{cases} (3-a)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 < 0 \\ (3-a)^2 - 4^2 < 0 \\ (3-a-4)(3-a+4) < 0 \\ (-1-a)(7-a) < 0 \end{cases}$

Найдем пересечение.

Ответ: $(-1; 5)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек	3

С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19	Последовательность $a_1, a_2, \dots, a_6$ состоит из неотрицательных однозначных чисел. Пусть M_k — среднее арифметическое всех членов этой последовательности, кроме k -го. Известно, что $M_1 = 7, M_2 = 6$.	ИСТОЧНИКИ Основная волна (Резерв), 2017 Основная волна 2016
----	---	---

а) Приведите пример такой последовательности, для которой $M_3 = 6,4$.

б) Существует ли такая последовательность, для которой $M_3 = 5$?

в) Найдите наименьшее возможное значение M_3 .

а) $M_1 = \frac{a_2+a_3+a_4+a_5+a_6}{5} = 7$
 $M_2 = \frac{a_1+a_3+a_4+a_5+a_6}{5} = 6$
 $M_3 = \frac{a_1+a_2+a_4+a_5+a_6}{5} = 6,4$

б) ① $\begin{cases} a_2+a_3+a_4+a_5+a_6 = 35 \\ a_1+a_3+a_4+a_5+a_6 = 30 \\ a_1+a_2+a_4+a_5+a_6 = 25 \end{cases}$
 ② $a_3 - a_1 = 10$
 Но разность должна быть ≤ 9 т.к. даны цифры.
 $\Rightarrow$ не существует такой п.с.т.
 Ответ: нет.

в) ① т.к. $a_3 - a_1 \leq 9$, то получаем, что $a_1+a_2+a_4+a_5+a_6 \geq 26 \Rightarrow M_3 \geq 5,2$

② Покажем, что $M_3 = 5,2$ можно быть.
 ① $\begin{cases} a_2+a_3+a_4+a_5+a_6 = 35 \\ a_1+a_3+a_4+a_5+a_6 = 30 \\ a_1+a_2+a_4+a_5+a_6 = 26 \end{cases}$
 ② $\begin{cases} a_3 - a_1 = 5 \\ a_3 - a_2 = 4 \end{cases}$

0 5 9 7 7 7
 Ответ: в) 5,2.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а, б и в	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте в и обоснованно получен верный ответ в пункте а или б	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а и б ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте в	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4