

**Единый государственный экзамен  
по МАТЕМАТИКЕ  
Профильный уровень**

**Инструкция по выполнению работы**

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.

КИМ

Ответ: -0,8.

|    |   |   |   |   |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|----|---|---|---|---|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| 10 | - | 0 | , | 8 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|----|---|---|---|---|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|

Бланк

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, что ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 записан под правильным номером.

**Желаем успеха!**

**Справочные материалы**

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

**Часть 1**

*Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.*

**1**

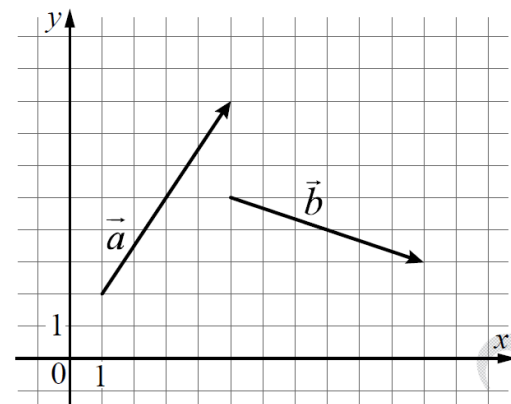
Один угол параллелограмма больше другого на  $40^\circ$ . Найдите меньший угол. Ответ дайте в градусах.



Ответ: \_\_\_\_\_.

**2**

На координатной плоскости изображены векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ . Найдите скалярное произведение  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ .

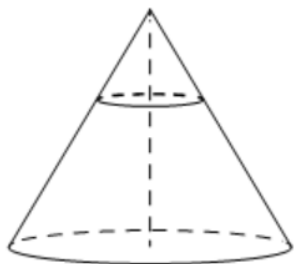


Ответ: \_\_\_\_\_.





- 3 Площадь основания конуса равна 48. Плоскость, параллельная плоскости основания конуса, делит его высоту на отрезки длиной 4 и 12, считая от вершины. Найдите площадь сечения конуса этой плоскостью.



Ответ: \_\_\_\_\_.

- 4 На чемпионате по прыжкам в воду выступают 25 спортсменов, среди них 4 прыгуна из Италии и 6 прыгунов из Мексики. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что двадцать четвёртым будет выступать прыгун из Италии.

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 5 Симметричную игральную кость бросили 3 раза. Известно, что в сумме выпало 6 очков. Какова вероятность события «хотя бы раз выпало 3 очка»?

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 6 Найдите корень уравнения

$$\lg(x + 11) = 1.$$

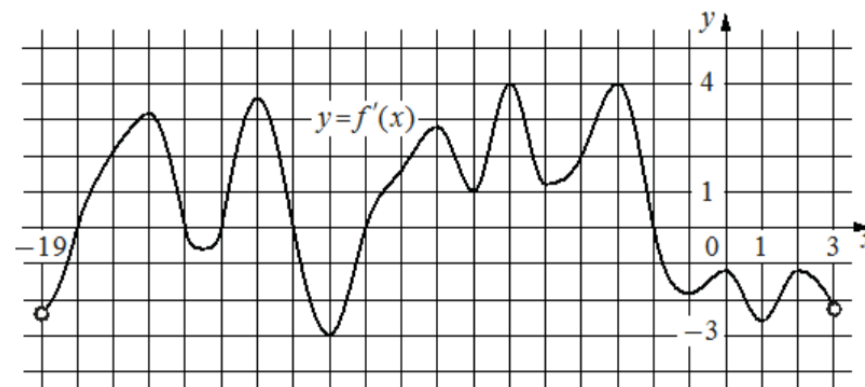
Ответ: \_\_\_\_\_.

- 7 Найдите значение выражения

$$3\sqrt{2}\cos^2\frac{9\pi}{8} - 3\sqrt{2}\sin^2\frac{9\pi}{8}.$$

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 8 На рисунке изображён график  $y = f'(x)$  — производной функции  $f(x)$ , определенной на интервале  $(-19; 3)$ . Найдите количество точек экстремума функции  $f(x)$ , принадлежащих отрезку  $[-17; -4]$ .



Ответ: \_\_\_\_\_.

- 9 Мяч бросили под углом  $\alpha$  к плоской горизонтальной поверхности земли. Время полёта мяча (в секундах) определяется по формуле  $t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$ . При каком наименьшем значении угла  $\alpha$  (в градусах) время полёта будет не меньше 2,1 секунды, если мяч бросают с начальной скоростью  $v_0 = 21$  м/с? Считайте, что ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

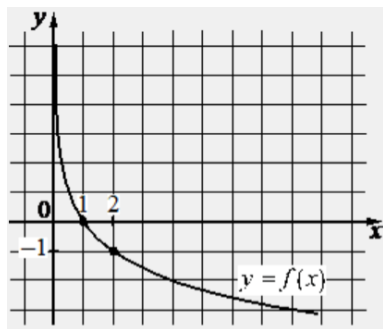
Ответ: \_\_\_\_\_.

- 10 Имеется два сплава. Первый содержит 10% никеля, второй — 35% никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 150 кг, содержащий 25% никеля. На сколько килограммов масса первого сплава была меньше массы второго?

Ответ: \_\_\_\_\_.



- 11 На рисунке изображён график функции вида  $f(x) = \log_a x$ . Найдите значение  $f(8)$ .



Ответ: \_\_\_\_\_.

- 12 Найдите точку минимума функции

$$y = (x^2 - 9x + 9) \cdot e^{x+27}.$$

Ответ: \_\_\_\_\_.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

## Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13 а) Решите уравнение

$$\cos^2 x + \sin x = \sqrt{2} \sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right).$$

- б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}]$ .

- 14 В правильной треугольной призме  $ABC A_1 B_1 C_1$  все рёбра равны 4. Точка  $M$  – середина ребра  $AA_1$ .

- а) Докажите, что прямые  $MB$  и  $B_1 C$  перпендикулярны.  
б) Найдите расстояние между прямыми  $MB$  и  $B_1 C$ .

- 15 Решите неравенство

$$\frac{3\lg^2 x - 8}{\lg^2 x - 4} \geq 2.$$

- 16 15 января планируется взять кредит в банке на 11 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Какую сумму следует взять в кредит, чтобы общая сумма выплат после полного погашения равнялась 0,59 млн рублей?



**17** В прямоугольном треугольнике  $ABC$  точка  $M$  лежит на катете  $AC$ , а точка  $N$  лежит на продолжении катета  $BC$  за точку  $C$ , причём  $CM = BC$  и  $CN = AC$ . Отрезки  $CP$  и  $CQ$  – биссектрисы треугольников  $ACB$  и  $NCM$  соответственно.

- а) Докажите, что  $CP$  и  $CQ$  перпендикулярны.  
б) Найдите  $PQ$ , если  $BC = 3$ , а  $AC = 5$ .

**18** Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$2^x - a = \sqrt{4^x - a}$$

имеет единственный корень.

**19** Из набора цифр 0, 1, 2, 3, 5, 7 и 9 составляют пару чисел, используя каждую цифру ровно один раз. Оказалось, что одно из этих чисел четырёхзначное, другое – трёхзначное и оба кратны 45.

- а) Может ли сумма такой пары чисел равняться 2205?  
б) Может ли сумма такой пары чисел равняться 3435?  
в) Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел в такой паре?

*Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.*

**СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:**

|                 |                                                                                                                                                                                                               |
|-----------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>ФИО:</b>     | Евгений Пифагор                                                                                                                                                                                               |
| <b>Предмет:</b> | Математика                                                                                                                                                                                                    |
| <b>Стаж:</b>    | 14 лет готовлю к ЕГЭ и ОГЭ                                                                                                                                                                                    |
| <b>Регалии:</b> | Набрал <a href="#">100 баллов</a> на ЕГЭ по математике профиль<br><a href="#">Результаты моих учеников</a><br>Высшее образование – ТГУ (Тольятти), 2009-2014<br>Победитель трёх олимпиад по высшей математике |
| <b>ВК:</b>      | <a href="https://vk.com/shkolapifagora">https://vk.com/shkolapifagora</a>                                                                                                                                     |
| <b>Ютуб:</b>    | <a href="https://www.youtube.com/c/pifagor1">https://www.youtube.com/c/pifagor1</a>                                                                                                                           |



### Система оценивания экзаменационной работы по математике (профильный уровень)

Правильное выполнение каждого из заданий 1–12 оценивается 1 баллом. Задание считается выполненным верно, если ответ записан в той форме, которая указана в инструкции по выполнению задания, и полностью совпадает с эталоном ответа.

| Номер задания | Правильный ответ                                                                                     | Видео решение                                                                       |
|---------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| 1             | 70                                                                                                   |    |
| 2             | 12                                                                                                   |    |
| 3             | 3                                                                                                    |    |
| 4             | 0,16                                                                                                 |    |
| 5             | 0,6                                                                                                  |    |
| 6             | -1                                                                                                   |    |
| 7             | 3                                                                                                    |    |
| 8             | 4                                                                                                    |    |
| 9             | 30                                                                                                   |    |
| 10            | 30                                                                                                   |    |
| 11            | -3                                                                                                   |    |
| 12            | 7                                                                                                    |    |
| 13            | а) $\frac{\pi}{2} + \pi n, 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$<br>б) $-4\pi; -\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}$ |    |
| 14            | $\frac{2\sqrt{30}}{5}$                                                                               |  |
| 15            | $(0; 0,01) \cup \{1\} \cup (100; +\infty)$                                                           |  |
| 16            | 0,5 млн                                                                                              |  |
| 17            | $\frac{15}{4}$                                                                                       |  |
| 18            | $(-1; 0) \cup (0; 1]$                                                                                |  |
| 19            | а) да<br>б) нет<br>в) 10035                                                                          |  |

### Решения и критерии оценивания выполнения заданий с развёрнутым ответом

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках, входящих в федеральный перечень учебников, допущенных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.



13 а) Решите уравнение

$$\cos^2 x + \sin x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}]$ .

$$\begin{aligned} \text{а) } \cos^2 x + \sin x &= \sqrt{2} \left( \sin x \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \cdot \sin \frac{\pi}{4} \right) \\ \cos^2 x + \sin x &= \sqrt{2} \left( \sin x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\cos^2 x + \sin x = \sin x + \cos x$$

$$\cos^2 x - \cos x = 0$$

$$\cos x \cdot (\cos x - 1) = 0$$

$$\begin{aligned} \cos x &= 0 & \cos x &= 1 \\ x &= \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} & x &= 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: а) } \frac{\pi}{2} + \pi n, 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{б) } -4\pi; -\frac{3\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}$$



## ИСТОЧНИКИ

ФИПИ (старый банк)  
ФИПИ (новый банк)  
Основная волна 2018  
Основная волна (Резерв) 2018  
Янв. 2019 (36 вар)  
— ФОРМУЛЫ СУММЫ И РАЗНОСТИ

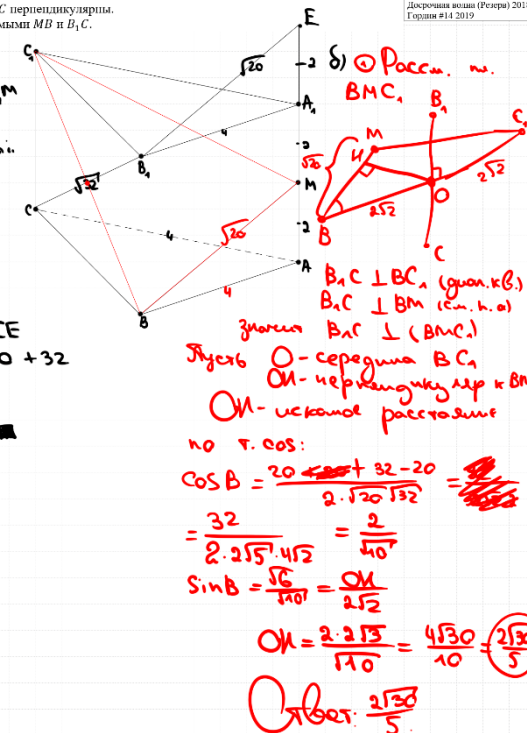
$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$   
 $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$   
 $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$   
 $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$

14

В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$  все рёбра равны 4. Точка  $M$  — середина ребра  $AA_1$ .а) Докажите, что прямые  $MB$  и  $B_1C$  перпендикулярны.  
б) Найдите расстояние между прямыми  $MB$  и  $B_1C$ .

а) Докажем  $A_1E$   
Так как  $A_1E = 2 \cdot A_1M$   
Тогда  $B_1E \parallel BM$   
Тогда  $\angle EB_1C$  — искома.

б)  $\triangle EB_1C$ :  
 $EB_1 = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}$   
 $B_1C = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32}$   
 $CE = \sqrt{AC^2 + AE^2} = \sqrt{52}$   
Заметим, что в  $\triangle B_1CE$   
вып. т. Пиф.  $52 = 20 + 32$   
значит  $\angle EB_1C = 90^\circ$   
 $MB \perp B_1C$   
но т. пер. т. Пиф. ■



## ИСТОЧНИКИ

Докладная волна (Резерв) 2018  
Сентябрь #11 2019

| Содержание критерия                                                                                                                                                                                             | Баллы |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах                                                                                                                                                              | 2     |
| Обоснованно получен верный ответ в пункте а<br>ИЛИ<br>получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б | 1     |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше                                                                                                                                             | 0     |
| Максимальный балл                                                                                                                                                                                               | 2     |

| Содержание критерия                                                                                                                                                                                                                                                           | Баллы |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Имеется верное доказательство утверждения пункта а, и обоснованно получен верный ответ в пункте б                                                                                                                                                                             | 3     |
| Получен обоснованный ответ в пункте б<br>ИЛИ<br>имеется верное доказательство утверждения пункта а, и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки                                                                                    | 2     |
| Имеется верное доказательство утверждения пункта а,<br>ИЛИ<br>при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки,<br>ИЛИ<br>обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен | 1     |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше                                                                                                                                                                                                             | 0     |
| Максимальный балл                                                                                                                                                                                                                                                             | 3     |



15 Решите неравенство

$$\frac{3\lg^2 x - 8}{\lg^2 x - 4} \geq 2.$$

Пусть  $\lg x = t$

$$\frac{3t^2 - 8}{t^2 - 4} - \frac{2}{1} \geq 0$$

$$\frac{3t^2 - 8 - 2t^2 + 8}{t^2 - 4} \geq 0$$

$$\frac{t^2}{(t-2)(t+2)} \geq 0$$

$t < -2$   
 $t = 0$   
 $t > 2$

$$\lg x < -2$$

$$\lg x < \lg \frac{1}{100}$$

$$0 < x < \frac{1}{100}$$

$$\lg x = 0$$

$$\lg x = \lg 1$$

$$x = 1$$

$$\lg x > 2$$

$$\lg x > \lg 100$$

$$x > 100$$

Ответ:  $(0; \frac{1}{100}) \cup \{1\} \cup (100; +\infty)$

ИСТОЧНИКИ

Основная волна 2017  
Досрочная волна (Резерв) 2015

1.  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$   
 2.  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$   
 3.  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$   
 4.  $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$   
 5.  $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$   
 6.  $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$   
 7.  $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

16

15 января планируется взять кредит в банке на 11 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Какую сумму следует взять в кредит, чтобы общая сумма выплат после полного погашения равнялась 0,59 млн рублей?

Пусть  $S$  – сумма долга  
7 чисел – день платежа

Волонтер  $\frac{d_1 + d_n}{2} \cdot n$   
Чар.  $S_n = \frac{d_1 + d_n}{2} \cdot n$

Дата 15 янв  
Сумма долга  $S$

1.  $1,03 \cdot S$   
 2.  $S - \frac{S}{11} = \frac{10}{11} S$   
 3.  $1,03 \cdot \frac{10}{11} S = \frac{103}{11} S$   
 4.  $\frac{103}{11} S$   
 5.  $\frac{103}{11} S$   
 6.  $\frac{103}{11} S$   
 7.  $\frac{103}{11} S$   
 8.  $\frac{103}{11} S$   
 9.  $\frac{103}{11} S$   
 10.  $\frac{103}{11} S$   
 11.  $\frac{103}{11} S$

О. С. В. = 0,59 млн

$\frac{1,33S}{11} + \frac{1,03S}{11} \cdot 11 = 0,59$

$\frac{2,36S}{2} \cdot 11 = 0,59$

$1,18 \cdot S = 0,59$   
 $S = 0,5$  млн.

Ответ: 0,5 млн.

ИСТОЧНИКИ

ГПР (старый банк)  
ГПР (новый банк)  
Основная волна (Резерв) 2024  
Основная волна 2019  
Стиг Град 25.09.2019  
Стиг Град 21.09.2017  
Ященко 2022 (36 вер)  
Ященко 2021 (36 вер)  
Ященко 2020 (36 вер)

| Содержание критерия                                                                                                                                                                                                        | Баллы |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Обоснованно получен верный ответ                                                                                                                                                                                           | 2     |
| Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек<br>ИЛИ<br>получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения | 1     |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше                                                                                                                                                        | 0     |
| Максимальный балл                                                                                                                                                                                                          | 2     |

| Содержание критерия                                                 | Баллы |
|---------------------------------------------------------------------|-------|
| Обоснованно получен верный ответ                                    | 2     |
| Верно построена математическая модель                               | 1     |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0     |
| Максимальный балл                                                   | 2     |

**17** В прямоугольном треугольнике  $ABC$  точка  $M$  лежит на катете  $AC$ , а точка  $N$  лежит на продолжении катета  $BC$  за точку  $C$ , причём  $CM = BC$  и  $CN = AC$ . Отрезки  $CP$  и  $CQ$  — биссектрисы треугольников  $ACB$  и  $NCM$  соответственно.

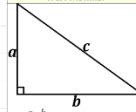
- а) Докажите, что  $CP$  и  $CQ$  перпендикулярны.  
б) Найдите  $PQ$ , если  $BC = 3$ , а  $AC = 5$ .

а)  $\angle ACP = \frac{1}{2} \angle ACB = 45^\circ$   
 $\angle ACQ = \frac{1}{2} \angle NCM = 45^\circ$   
 $\angle QCP = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$   
 $CP \perp CQ$

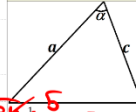
б)  $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{34}$   
 $\triangle ABC$ : по т. о бис.  
 $\frac{AP}{BP} = \frac{AC}{BC} = \frac{5}{3}$   
 $AP = \frac{5}{8} \sqrt{34}$   
 $BP = \frac{3}{8} \sqrt{34}$   
 $\cos A = \frac{5}{\sqrt{34}}$   
 $\triangle APC$ :  
 $PC^2 = 5^2 + \left(\frac{5}{8} \sqrt{34}\right)^2 - 2 \cdot 5 \cdot \frac{5}{8} \sqrt{34} \cdot \frac{5}{\sqrt{34}} = \frac{225}{32}$   
 $PC = \frac{15}{4\sqrt{2}}$   
 Аналогично  $CQ = \frac{15}{4\sqrt{2}}$   
 $PQ = \sqrt{CQ^2 + PC^2} = \frac{15}{4}$   
 Ответ:  $\frac{15}{4}$ .

# ИСТОЧНИКИ

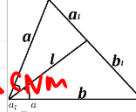
Основная волна 2019  
 ТЕОРЕМА ПИФАГОРА



ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА



ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ



ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ

| Содержание критерия                                                                                                                                                                                                                                                                    | Баллы |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Имеется верное доказательство утверждения пункта $a$ , и обоснованно получен верный ответ в пункте $b$                                                                                                                                                                                 | 3     |
| Получен обоснованный ответ в пункте $b$<br>ИЛИ<br>имеется верное доказательство утверждения пункта $a$ , и при обоснованном решении пункта $b$ получен неверный ответ из-за арифметической ошибки                                                                                      | 2     |
| Имеется верное доказательство утверждения пункта $a$ , ИЛИ<br>при обоснованном решении пункта $b$ получен неверный ответ из-за арифметической ошибки,<br>ИЛИ<br>обоснованно получен верный ответ в пункте $b$ с использованием утверждения пункта $a$ , при этом пункт $a$ не выполнен | 1     |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше                                                                                                                                                                                                                    | 0     |
| Максимальный балл                                                                                                                                                                                                                                                                      | 3     |

**18** Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$2^x - a = \sqrt{4^x - a}$$

имеет единственный корень.

Пусть  $2^x = t$ ,  $t > 0$   
 $t - a = \sqrt{t^2 - a}$   
 Исходное ур-е имеет единств. корень  $\times$  Тогда, когда ур-е с  $t$  имеет единств. полож. корень

$\begin{cases} t - a \geq 0 \\ (t - a)^2 = t^2 - a \\ t > 0 \end{cases}$   $\begin{cases} t \geq a \\ t^2 - 2at + a^2 = t^2 - a \\ t > 0 \end{cases}$   $\begin{cases} 2at = a^2 + a - \text{это линейное ур-е, оно имеет единств. реш. (если } a \neq 0) \\ t \geq a \\ t > 0 \end{cases}$

$\begin{cases} t = \frac{a^2 + a}{2a} \\ t \geq 0 \\ t > 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$   $\begin{cases} t = \frac{a \cdot (a+1)}{2a} \\ t \geq a \\ a > 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$   $\begin{cases} t = \frac{a+1}{2} \\ \frac{a+1}{2} \geq a \quad | \cdot 2 \\ \frac{a+1}{2} > 0 \quad | \cdot 2 \\ a \neq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} t = \frac{a+1}{2} \\ a+1 \geq 2a \\ a+1 > 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$   $\begin{cases} t = \frac{a+1}{2} \\ a \leq 1 \\ a > -1 \\ a \neq 0 \end{cases}$

на рисунке:  $a$  на числовой прямой,  $-1$  и  $1$  отмечены,  $0$  — точка, где  $a \leq 1$  и  $a > -1$  совпадают.

Ответ:  $(-1; 0) \cup (0; 1]$

| Содержание критерия                                                                                            | Баллы |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Обоснованно получен верный ответ                                                                               | 4     |
| С помощью верного рассуждения получено множество значений $a$ , отличающееся от искомого конечным числом точек | 3     |
| С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений $a$                     | 2     |
| Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений $a$                                    | 1     |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше                                            | 0     |
| Максимальный балл                                                                                              | 4     |



**19** Из набора цифр 0, 1, 2, 3, 5, 7 и 9 составляют пару чисел, используя каждую цифру ровно один раз. Оказалось, что одно из этих чисел четырёхзначное, другое – трёхзначное и оба кратны 45.

**ИСТОЧНИКИ**  
ГПР (новый банк)  
Досрочная волна 2024

а) Может ли сумма такой пары чисел равняться 2205?  
б) Может ли сумма такой пары чисел равняться 3435?  
в) Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел в такой паре?

0 1 2 3 5 7 9

Стало ясно было кратна 45, оно д. окант. на 5 или 0 и сумма цифр д.б. кратна

а)  $\begin{pmatrix} 270 \\ 720 \end{pmatrix}$   $\begin{pmatrix} 1395 \\ 1935 \end{pmatrix}$

Ответ: 270 и 1935.

2 способ.  
Сумма двух чисел, кратных 45 также д.б. кратна 45  
НО 3435 не кратна 45.  
Ответ: б) нет.

δ1

1 способ

$\begin{pmatrix} 270 \\ 320 \end{pmatrix}$   $\begin{pmatrix} 1395 \\ 1935 \end{pmatrix}$

Любая из 12 рассмотренных сумм не равна 3435

2 способ

$\begin{pmatrix} 315 \\ 135 \end{pmatrix}$   $\begin{pmatrix} 2720 \\ 2970 \\ 7290 \\ 7920 \\ 9720 \end{pmatrix}$

Любая из 12 рассмотренных сумм не равна 3435  
значит это невозможно  
Ответ: б) нет

| Содержание критерия                                                                                | Баллы |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Обоснованно получены верные ответы в пунктах а, б и в                                              | 4     |
| Обоснованно получен верный ответ в пункте в и обоснованно получен верный ответ в пункте а или б    | 3     |
| Обоснованно получены верные ответы в пунктах а и б ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте в | 2     |
| Обоснованно получен верный ответ в пункте а или б                                                  | 1     |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше                                | 0     |
| Максимальный балл                                                                                  | 4     |

**19** Из набора цифр 0, 1, 2, 3, 5, 7 и 9 составляют пару чисел, используя каждую цифру ровно один раз. Оказалось, что одно из этих чисел четырёхзначное, другое – трёхзначное и оба кратны 45.

а) Может ли сумма такой пары чисел равняться 2205?  
б) Может ли сумма такой пары чисел равняться 3435?  
в) Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел в такой паре?

в) Если трёхзначное окант. на 0, а чет. на 5, то наибольшее значение это 720 и 9315 (см. п.б)

Если тр. окант. на 5, а чет. на 0, то наиб. знач. это 315 и 9720

В обоих случаях сумма 10035  
Большая сумма невозможна, т.к. на брши наиб. знач. сум.

б) 10035.

δ1

$\begin{pmatrix} 270 \\ 320 \end{pmatrix}$

