

Движение по окружности

■ Примеры

1. Из одной точки круговой трассы, длина которой равна 14 км, одновременно в одном направлении стартовали два автомобиля. Скорость первого автомобиля равна 80 км/ч, и через 40 минут после старта он опережал второй автомобиль на один круг. Найдите скорость второго автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

2. Два мотоциклиста стартуют одновременно в одном направлении из двух диаметрально противоположных точек круговой трассы, длина которой равна 14 км. Через сколько минут мотоциклисты поравняются в первый раз, если скорость одного из них на 21 км/ч больше скорости другого?

3. Из пункта А круговой трассы выехал велосипедист. Через 30 мин он еще не вернулся в пункт А и из пункта А за ним отправился мотоциклист. Через 10 минут после отправления он догнал велосипедиста в первый раз, а еще через 30 минут после этого догнал его во второй раз. Найдите скорость мотоциклиста, если длина трассы 30 км. Ответ дайте в км/ч.

4. Два гонщика участвуют в гонках. Им предстоит проехать 60 кругов по кольцевой трассе протяженностью 3 км. Оба гонщика стартовали одновременно, а на финиш первый пришел раньше второго на 10 минут. Чему равнялась средняя скорость второго гонщика, если известно, что первый гонщик в первый раз обогнал второго на круг через 15 мин?

5. Часы со стрелками показывают 2 часа ровно. Через сколько минут минутная стрелка в десятый раз поравняется с часовой?

6. Часы со стрелками показывают 6 часов 10 минут. Через сколько минут минутная стрелка в шестой раз поравняется с часовой?

7. Часы со стрелками показывают 6 часов 35 минут. Через сколько минут минутная стрелка в пятый раз поравняется с часовой?

Решение (примеры) Движение по окружности

1. Из одной точки круговой трассы, длина которой равна 14 км, одновременно в одном направлении стартовали два автомобиля. Скорость первого автомобиля равна 80 км/ч, и через 40 минут после старта он опережал второй автомобиль на один круг. Найдите скорость второго автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

Решение:

Пусть $V_I = 80$ км/ч, $V_{II} = x$ км/ч. Т.к. первый автомобиль опережал

второго через 40 мин, то $V_I > V_{II}$ и $V_{\text{вдогонку}} = V_I - V_{II} = 80 - x$.

Время, за которое первый нагнал второго $40 \text{ мин} = \frac{40}{60} \text{ ч} = \frac{2}{3} \text{ ч}$.

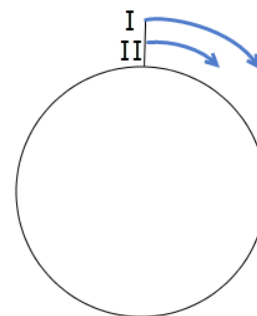
Путь, который он преодолел за это время - один круг, т.е. 14 км.

Составим уравнение

$$(80 - x) \cdot \frac{2}{3} = 14, \quad x = 59.$$

Скорость второго автомобиля 59 км/ч.

Ответ: 59.



2. Два мотоциклиста стартуют одновременно в одном направлении из двух диаметрально противоположных точек круговой трассы, длина которой равна 14 км. Через сколько минут мотоциклисты поравняются в первый раз, если скорость одного из них на 21 км/ч больше скорости другого?

Решение:

Пусть $V_I > V_{II}$, тогда $V_{\text{вдогонку}} = V_I - V_{II} = 21$ км/ч.

Время, за которое более быстрый нагонит более медленного - t .

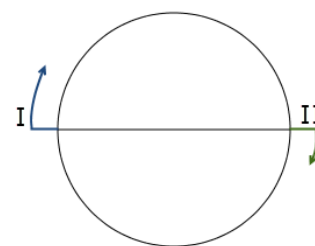
В момент старта мотоциклисты находятся в точках, расположенных на трассе

диаметрально друг от друга, значит, полкруга это $\frac{14}{2} = 7$ км.

Составим уравнение

$$21 \cdot t = 7, \quad t = \frac{1}{3} \text{ ч} = 20 \text{ мин.}$$

Ответ: 20.



3. Из пункта А круговой трассы выехал велосипедист. Через 30 мин он еще не вернулся в пункт А и из пункта А за ним отправился мотоциклист. Через 10 минут после отправления он догнал велосипедиста в первый раз, а еще через 30 минут после этого догнал его во второй раз. Найдите скорость мотоциклиста, если длина трассы 30 км. Ответ дайте в км/ч.

Решение:

Пусть $V_{\text{вел}} = x$ км/ч, а $V_{\text{мот}} = y$ км/ч. Время велосипедиста до первой

встречи с мотоциклистом $30 + 10 = 40 \text{ мин} = \frac{2}{3} \text{ ч}$ и его путь равен $\frac{2}{3}x$ км.

Время мотоциклиста до первой встречи $10 \text{ мин} = (1/6) \text{ ч}$ и его путь равен

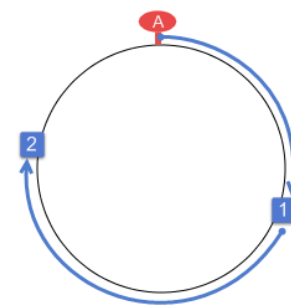
$\frac{1}{6}y$ км. До первой точки встречи мотоциклист и велосипедист проехали

одинаковое расстояние, значит, $\frac{2}{3}x = \frac{1}{6}y$, $y = 4x$.

Второй раз произойдет их встреча через $30 \text{ мин} = 0,5 \text{ ч}$, когда мотоциклист сделает полный круг и нагонит велосипедиста.

$$(y - x) \cdot 0,5 = 30, \quad x = 20, \quad y = 80.$$

Ответ: 80 км/ч.



4. Два гонщика участвуют в гонках. Им предстоит проехать 60 кругов по кольцевой трассе протяженностью 3 км. Оба гонщика стартовали одновременно, а на финиш первый пришел раньше второго на 10 минут. Чему равнялась средняя скорость второго гонщика, если известно, что первый гонщик в первый раз обогнал второго на круг через 15 мин?

Решение:

Оба гонщика проехали по трассе $60 \cdot 3 = 180$ км.

Т.к. первый гонщик на финиш пришел раньше второго

на 10 мин $= \frac{1}{6}$ ч, то $t_{II} > t_I$ на $\frac{1}{6}$ ч.

$$\frac{180}{y} - \frac{180}{x} = \frac{1}{6}$$

	Скорость	Путь	Время
I	x	180	$\frac{180}{x}$
II	y	180	$\frac{180}{y}$
Вдогонку	$x - y$	3	$\frac{15}{60} = \frac{1}{4}$

Первый, более быстрый гонщик, обогнал второго на

круг через $\frac{1}{4}$ ч, тогда $(x - y) \cdot \frac{1}{4} = 3$.

$$\begin{cases} \frac{180}{y} - \frac{180}{x} = \frac{1}{6} \\ (x - y) \cdot \frac{1}{4} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 12 \\ \frac{180}{x - 12} - \frac{180}{x} = \frac{1}{6} \end{cases} \quad (1)$$

$$(1) \quad \frac{180}{x - 12} - \frac{180}{x} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{180x - 180(x - 12) + 12 \cdot 180}{x(x - 12)} = \frac{1}{6}$$

$$6 \cdot 12 \cdot 180 = x^2 - 12x$$

$$x^2 - 12x - 6 \cdot 12 \cdot 180 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 6^2 + 6^2 \cdot 360 = 6^2 \cdot (1 + 360) = 6^2 \cdot 19^2 = 114^2$$

$$x = 6 \pm 114, \quad x > 0, \quad x = 120$$

$$V_{II} = y = x - 12 = 120 - 12 = 108 \text{ км/ч.}$$

Ответ: 108.

5. Часы со стрелками показывают 2 часа ровно. Через сколько минут минутная стрелка в десятый раз поравняется с часовой?

Решение:

1 час $= \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$. В положении 2 часа ровно угол между стрелками равен 60° .

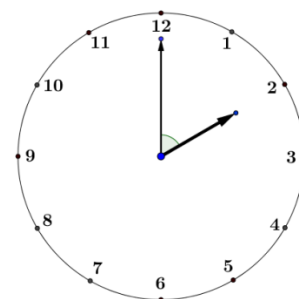
Найдем угловые скорости стрелок.

$$V_{мин} = \frac{360^\circ}{60 мин} = 6^\circ / мин, \quad V_{час} = \frac{30^\circ}{60 мин} = \left(\frac{1}{2}\right)^\circ / мин.$$

$$\text{Минутная стрелка догоняет часовую } V_{\text{вдогонку}} = 6 - \frac{1}{2} = \frac{11}{2}.$$

За время t минутная стрелка первый раз поравняется с часовой, когда нагонит путь 60° , и еще 9 раз будет с ней равняться через полные обороты.

$$\frac{11}{2} \cdot t = 60 + 360 \cdot 9, \quad t = \frac{3300 \cdot 2}{11} = 600.$$



Ответ: 600.

6. Часы со стрелками показывают 6 часов 10 минут. Через сколько минут минутная стрелка в шестой раз поравняется с часовой?

Решение:

В положении 6 часов 10 минут:

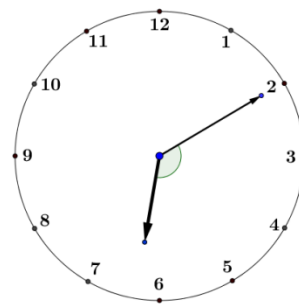
$$\text{часовая стрелка на } 180^\circ + \left(\frac{1}{2}\right)^\circ / \text{мин} \cdot 10 \text{ мин} = 185^\circ,$$

минутная на 60° . Угол между стрелками $185^\circ - 60^\circ = 125^\circ$.

За время t минутная стрелка первый раз поравняется с часовой, когда нагонит путь 125° , и еще 5 раз будет с ней равняться через полные обороты.

$$\frac{11}{2} \cdot t = 125 + 360 \cdot 5, \quad t = \frac{1925 \cdot 2}{11} = 350.$$

Ответ: 350.



7. Часы со стрелками показывают 6 часов 35 минут. Через сколько минут минутная стрелка в пятый раз поравняется с часовой?

Решение:

В положении 6 часов 35 минут:

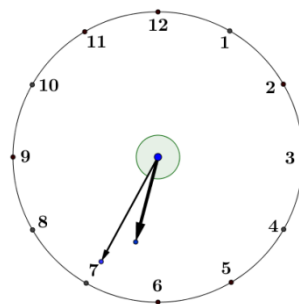
$$\text{часовая стрелка на } \left(\frac{1}{2}\right)^\circ / \text{мин} \cdot 35 \text{ мин} = 17,5^\circ, \text{ минутная на } 30^\circ.$$

Угол между стрелками $30^\circ - 17,5^\circ = 12,5^\circ$.

За время t минутная стрелка первый раз поравняется с часовой, когда нагонит путь $360^\circ - 12,5^\circ = 347,5^\circ$, и еще 4 раза будет с ней равняться через полные обороты.

$$\frac{11}{2} \cdot t = 347,5 + 360 \cdot 4, \quad t = \frac{3575}{11} = 325.$$

Ответ: 325.



■ **Тест** **Движение по окружности**

- №1. Из одной точки круговой трассы, длина которой равна 25 км, одновременно в одном направлении стартовали два автомобиля. Скорость первого автомобиля равна 112 км/ч, и через 25 минут после старта он опережал второй автомобиль на один круг. Найдите скорость второго автомобиля. Ответ дайте в км/ч.
-
- №2. Два мотоциклиста стартуют одновременно в одном направлении из двух диаметрально противоположных точек круговой трассы, длина которой равна 22 км. Через сколько минут мотоциклисты поравняются в первый раз, если скорость одного из них на 20 км/ч больше скорости другого?
-
- №3. Из пункта А круговой трассы выехал велосипедист. Через 40 мин он еще не вернулся в пункт А и из пункта А за ним отправился мотоциклист. Через 8 минут после отправления он догнал велосипедиста в первый раз, а еще через 36 минут после этого догнал его во второй раз. Найдите скорость мотоциклиста, если длина трассы 30 км. Ответ дайте в км/ч.
-
- №4. Два гонщика участвуют в гонках. Им предстоит проехать 99 кругов по кольцевой трассе протяженностью 4 км. Оба гонщика стартовали одновременно, а на финиш первый пришел раньше второго на 22 минут. Чему равнялась средняя скорость второго гонщика, если известно, что первый гонщик в первый раз обогнал второго на круг через 20 мин?
-
- №5. Часы со стрелками показывают 10 часов ровно. Через сколько минут минутная стрелка второй раз поравняется с часовой?
-
- №6. Часы со стрелками показывают 8 часов 20 минут. Через сколько минут минутная стрелка в четвертый раз поравняется с часовой?
-
- №7. Часы со стрелками показывают 2 часа 25 минут. Через сколько минут минутная стрелка в девятый раз поравняется с часовой?

■ **Ответы (тест)** **Движение по окружности**

№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7
52	33	60	108	120	220	575

Решение (тест) Движение по окружности

№1. Из одной точки круговой трассы, длина которой равна 25 км, одновременно в одном направлении стартовали два автомобиля. Скорость первого автомобиля равна 112 км/ч, и через 25 минут после старта он опережал второй автомобиль на один круг. Найдите скорость второго автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

Решение:

Пусть $V_I = 112$ км/ч, $V_{II} = x$ км/ч. Т.к. первый автомобиль опережал

второго через 25 мин, то $V_I > V_{II}$ и $V_{\text{вдогонку}} = V_I - V_{II} = 112 - x$.

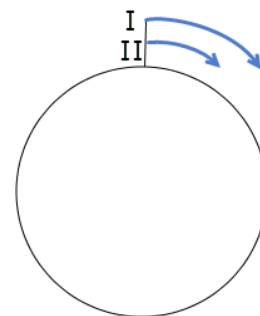
Время, за которое первый нагнал второго $25 \text{ мин} = \frac{25}{60} \text{ ч} = \frac{5}{12} \text{ ч}$.

Путь, который он преодолел за это время - один круг, т.е. 25 км.

Составим уравнение

$$(112 - x) \cdot \frac{5}{12} = 25, \quad x = 52.$$

Скорость второго автомобиля 52 км/ч.



Ответ: 52.

№2. Два мотоциклиста стартуют одновременно в одном направлении из двух диаметрально противоположных точек круговой трассы, длина которой равна 22 км. Через сколько минут мотоциклисты поравняются в первый раз, если скорость одного из них на 20 км/ч больше скорости другого?

Решение:

Пусть $V_I > V_{II}$, тогда $V_{\text{вдогонку}} = V_I - V_{II} = 20$ км/ч.

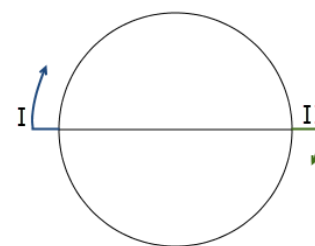
Время, за которое более быстрый нагонит более медленного - t .

В момент старта мотоциклисты находятся в точках, расположенных на

трассе диаметрально друг от друга, значит, полкруга это $\frac{22}{2} = 11$ км.

Составим уравнение

$$20 \cdot t = 11, \quad t = \frac{11}{20} \text{ ч} = \frac{11 \cdot 3}{20 \cdot 3} = 33 \text{ мин}.$$



Ответ: 33.

№3. Из пункта А круговой трассы выехал велосипедист. Через 40 мин он еще не вернулся в пункт А и из пункта А за ним отправился мотоциклист. Через 8 минут после отправления он догнал велосипедиста в первый раз, а еще через 36 минут после этого догнал его во второй раз. Найдите скорость мотоциклиста, если длина трассы 30 км. Ответ дайте в км/ч.

Решение:

Пусть $V_{\text{вел}} = x$ км/ч, а $V_{\text{мот}} = y$ км/ч. Время велосипедиста до первой

встречи с мотоциклистом $40 + 8 = 48 \text{ мин} = \frac{48}{60} = \frac{4}{5} \text{ ч}$ и его путь равен

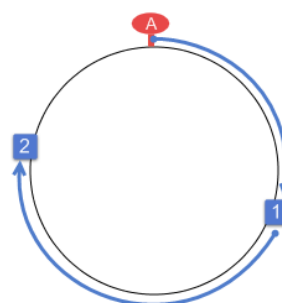
$\frac{4}{5}x$ км. Время мотоциклиста до первой встречи 8 мин $= (2/15) \text{ ч}$ и его

путь равен $\frac{2}{15}y$ км. До первой точки встречи мотоциклист и велосипедист

проехали одинаковое расстояние, значит, $\frac{4}{5}x = \frac{2}{15}y$, $y = 6x$.

Второй раз произойдет их встреча через 36 мин $= 0,6 \text{ ч}$, когда мотоциклист сделает полный круг и нагонит велосипедиста.

$$(y - x) \cdot 0,6 = 30, \quad x = 10, \quad y = 60.$$



Ответ: 60 км/ч.

№4. Два гонщика участвуют в гонках. Им предстоит проехать 99 кругов по кольцевой трассе протяженностью 4 км. Оба гонщика стартовали одновременно, а на финиш первый пришел раньше второго на 22 минут. Чему равнялась средняя скорость второго гонщика, если известно, что первый гонщик в первый раз обогнал второго на круг через 20 мин?

Решение:

Оба гонщика проехали по трассе $99 \cdot 4 = 396$ км.

Т.к. первый гонщик на финиш пришел раньше

второго на 22 мин $= \frac{11}{30}$ ч, то $t_{II} > t_I$ на $\frac{11}{30}$ ч.

$$\frac{180}{y} - \frac{180}{x} = \frac{11}{30}$$

Первый, более быстрый гонщик, обогнал второго на

круг через $\frac{1}{3}$ ч, тогда $(x - y) \cdot \frac{1}{3} = 4$.

$$\begin{cases} \frac{396}{y} - \frac{396}{x} = \frac{11}{30} \\ (x - y) \cdot \frac{1}{3} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 12 \\ \frac{36}{x - 12} - \frac{36}{x} = \frac{1}{30} \end{cases} \quad (1)$$

$$(1) \quad \frac{36}{x - 12} - \frac{36}{x} = \frac{1}{30}$$

$$\frac{36x - 36x + 12 \cdot 36}{x(x - 12)} = \frac{1}{30}$$

$$36 \cdot 12 \cdot 30 = x^2 - 12x$$

$$x^2 - 12x - 36 \cdot 12 \cdot 30 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 6^2 + 6^2 \cdot 360 = 6^2 \cdot (1 + 360) = 6^2 \cdot 19^2 = 114^2$$

$$x = 6 \pm 114, \quad x > 0, \quad x = 120$$

$$V_{II} = y = x - 12 = 120 - 12 = 108 \text{ км/ч.}$$

Ответ: 108.

№5. Часы со стрелками показывают 10 часов ровно. Через сколько минут минутная стрелка второй раз поравняется с часовой?

Решение:

$1 \text{ час} = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$. В положении 10 часов ровно угол между стрелками равен

60° . Найдем угловые скорости стрелок.

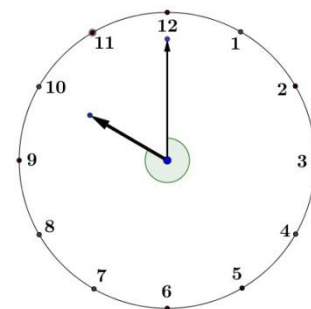
$$V_{\text{мин}} = \frac{360^\circ}{60 \text{ мин}} = 6^\circ / \text{мин}, \quad V_{\text{час}} = \frac{30^\circ}{60 \text{ мин}} = \left(\frac{1}{2}\right)^\circ / \text{мин}.$$

Минутная стрелка догоняет часовую $V_{\text{вдогонку}} = 6 - \frac{1}{2} = \frac{11}{2}$.

За время t минутная стрелка первый раз поравняется с часовой, когда нагонит путь 300° , и еще второй раз поравняется с ней через полный оборот.

$$\frac{11}{2} \cdot t = 300 + 360 \cdot 1, \quad t = \frac{660 \cdot 2}{11} = 120.$$

Ответ: 120.



№6. Часы со стрелками показывают 8 часов 20 минут. Через сколько минут минутная стрелка в четвертый раз поравняется с часовой?

Решение:

В положении 8 часов 20 минут:

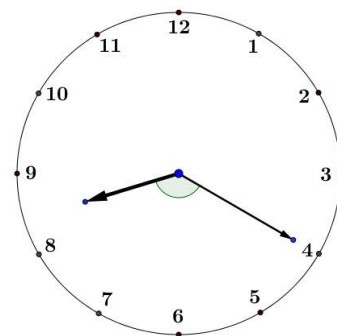
$$\text{часовая стрелка на } 180^\circ + 60^\circ + \left(\frac{1}{2}\right)^\circ / \text{мин} \cdot 20 \text{ мин} = 250^\circ,$$

минутная на 120° . Угол между стрелками $250^\circ - 120^\circ = 130^\circ$.

За время t минутная стрелка первый раз поравняется с часовой, когда нагонит путь 130° , и еще 3 раза будет с ней равняться через полные обороты.

$$\frac{11}{2} \cdot t = 130 + 360 \cdot 3, \quad t = \frac{1210 \cdot 2}{11} = 220.$$

Ответ: 220.



№7. Часы со стрелками показывают 2 часа 25 минут. Через сколько минут минутная стрелка в девятый раз поравняется с часовой?

Решение:

В положении 2 часов 25 минут:

$$\text{часовая стрелка на } 60^\circ + \left(\frac{1}{2}\right)^\circ / \text{мин} \cdot 25 \text{ мин} = 72,5^\circ, \text{ минутная на } 25^\circ.$$

Угол между стрелками $150^\circ - 72,5^\circ = 77,5^\circ$.

За время t минутная стрелка первый раз поравняется с часовой, когда нагонит путь $360^\circ - 77,5^\circ = 282,5^\circ$, и еще 8 раз будет с ней равняться через полные обороты.

$$\frac{11}{2} \cdot t = 282,5 + 360 \cdot 8, \quad t = 575.$$

Ответ: 575.

