ВСТУПЛЕНИЕ

Задачи на смеси часто включают в экзаменационные варианты 11-го, а иногда и 9-го класса, но многие ученики пропускают эти задачи, так как испытывают сложности при их решении.

В брошюре в начале каждой задачи указано, начиная с какого класса можно ее решать. Это позволит учителю сэкономить время при подготовке к уроку, так как одну и ту же задачу (или ей подобную) можно использовать сначала в 5-м или 6-м классе при изучении темы, а потом ее же включить при повторении в 9-м или 11-м классе. В процессе решения задач учащиеся повторяют, как найти часть от числа и число по его части, прямую и обратную пропорциональные зависимости, способы решения уравнений и другое.

Задачи на смеси имеют практическую направленность. Прежде чем объяснять методы решения этих задач, необходимо побеседовать с ребятами. Например, мы пьем чай и кладем в чашку столько сахару, чтобы не пересластить (создаем нужную нам концентрацию), а если пересластили, то добавляем воды. Летом мы ходим за грибами, затем их сушим. И мы понимаем, что чем дольше их сушить, тем меньше в них остается воды, при этом масса сухого вещества не меняется. Врач выписывает рецепт, и мы покупаем мази, микстуры с определенной концентрацией лекарственных веществ.

Решая задачи данного типа, нам нужно будет выделить компоненты, которые изменяются, и те, что остаются неизменными. Измерять количество компонентов смеси будем в единицах массы, а не объема, так как изменения массы происходят линейно, а изменения объема — по более сложной зависимости, и все равно приходится переходить к изменениям массы, но уже используя плотность веществ. Об этом можно и нужно говорить с учащимися после того, как они познакомятся с решениями подобных задач на уроках химии.

Говоря о смесях, растворах и сплавах будем употреблять термин «смесь» независимо от ее вида (твердая, жидкая, сыпучая, газообразная). Смесь состоит из основного вещества и примеси. Что такое основное вещество, в каждой задаче определяем отдельно.

Долей (α) основного вещества в смеси будем называть отношение массы основного вещества (m) в смеси к общей массе смеси (M):

$$\alpha = \frac{m}{M}(\cdot 100\%).$$

Эта величина может быть выражена либо в долях единицы, либо в процентах.

Различные способы решения задач

1. В колбе было 140 г 10%-го раствора марганцовки (перманганата калия). В нее долили 60 г 30%-го раствора марганцовки. Определите процентное содержание марганцовки в полученном растворе.

Условия задач на смеси удобно записывать в виде таблицы, и надо приучать учащихся к такой записи.

Решение. Заполним таблицу по условию задачи:

	α	M (г)	m (г)
Было	10%, или 0,1	140	$0{,}1 \cdot 140$
Добавили	30%, или 0,3	60	$0{,}3 \cdot 60$
Стало	?	$140 + 60$	

1) $0{,}1 \cdot 140 + 0{,}3 \cdot 60 = 32$ г — масса марганцовки в смеси;

2) $140 + 60 = 200$ г — масса смеси;

3) $\alpha = \frac{32}{200} \cdot 100 = 16\%$ — содержание марганцовки в смеси.

Ответ: 16%.

Рассмотрим другую задачу, которая получена из первой небольшим изменением условия.

2. Сколько нужно взять 10%-го и 30%-го растворов марганцовки, чтобы получить 200 г 16%-го раствора марганцовки?

Решение. *Способ I.* (*С 5-го класса.*) Пусть масса первого раствора — x г. Заполним таблицу по условию задачи:

	α	M (г)	m (г)
1-й раствор	10%, или 0,1	x	$0{,}1x$
2-й раствор	30%, или 0,3	$200 - x$	$0{,}3(200 - x)$
3-й раствор	16%, или 0,16	200	$0{,}16 \cdot 200$

Составим и решим уравнение: $0{,}1x + 0{,}3(200 - x) = 0{,}16 \cdot 200$, $0{,}2x = 28$, откуда $x = 140$.

Ответ: 140 г 10%-го и 60 г 30%-го.

Способ II. (*С 7-го класса.*) Пусть масса первого раствора — x г, а масса второго раствора — y г. Заполним таблицу по условию задачи:

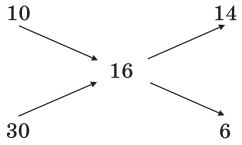
	α	M (г)	m (г)
1-й раствор	10%, или 0,1	x	$0{,}1x$
2-й раствор	30%, или 0,3	y	$0{,}3y$
3-й раствор	16%, или 0,16	200	$0{,}16 \cdot 200$

Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 200, \\ 0{,}1x + 0{,}3y = 32; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 200 - y, \\ 0{,}1(200 - y) + 0{,}3y = 32; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 140, \\ y = 60. \end{cases}$$

Ответ: 140 г 10%-го и 60 г 30%-го.

Способ III. Решим эту задачу старинным способом по правилу «креста». Составим схему:



В левой колонке схемы записаны процентные содержания марганцовки в имеющихся растворах. Посередине – процентное содержание марганцовки в полученной смеси. В правой — разности процентных содержаний имеющихся растворов и полученной смеси (вычитаем из большего числа меньшее и записываем разность на ту диагональ, где находятся, соответственно, уменьшаемое и вычитаемое).

Исходя из схемы делаем вывод: в 200 г смеси содержится 14 частей 10%-го раствора и 6 частей 30%-го раствора. Найдем их массы:

$200 : (14 + 6) \cdot 14 = 140$ г;

$200 : (14 + 6) \cdot 6 = 60$ г.

Ответ: 140 г 10%-го и 60 г 30%-го.

В старших классах можно показать, как выводится правило «креста». Пусть смешали два раствора: первый — массой m_1 г и концентрацией α_1 и второй — массой m_2 г и концентрацией α_2, получили раствор массой $(m_1 + m_2)$ г и концентрацией α_3, причем $\alpha_1 < \alpha_3 < \alpha_2$.

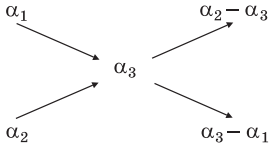
Найдем зависимость масс исходных растворов от их концентраций.

Масса основного вещества в первом растворе равна $\alpha_1 m_1$ г, во втором растворе — $\alpha_2 m_2$ г, а в смеси $\alpha_3(m_1 + m_2)$ г.

Составим равенство $\alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2 = \alpha_3(m_1 + m_2)$ и из него получим:

$$\alpha_1 m_1 - \alpha_3 m_1 = \alpha_3 m_2 - \alpha_2 m_2,$$

откуда следует пропорция $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{\alpha_2 - \alpha_3}{\alpha_3 - \alpha_1}$.



3. Имеется склянка 20%-го раствора кислоты и склянка 40%-го раствора кислоты.

а) Смешали 200 г раствора кислоты из первой склянки и 300 г из второй. Определите массу кислоты и ее долю в полученном растворе.

б) Из первой склянки взяли 300 г раствора кислоты. Сколько граммов раствора кислоты надо долить из второй склянки, чтобы получить 32%-й раствор кислоты?

в) Верно ли, что если из второй склянки берут на 50% больше раствора кислоты, чем из первой, то полученная смесь является 32%-ым раствором кислоты?

Решение. а) Заполним таблицу по условию задачи:

	α	M (г)	m (г)
1-й раствор	20%, или 0,2	200	$0{,}2 \cdot 200$
2-й раствор	40%, или 0,4	300	$0{,}4 \cdot 300$
Смесь	?	$200 + 300$	?

Масса кислоты в смеси: $0{,}2 \cdot 200 + 0{,}4 \cdot 300 = 40 + 120 = 160$ г.

Процентное содержание кислоты в смеси рассчитаем по формуле $\alpha = \dfrac{m}{M}$: $\alpha = \dfrac{m}{M} = \dfrac{160}{500} \cdot 100 = 32\%$.

Ответ: 160 г, 32%.

б) Пусть из второй склянки взяли x г раствора кислоты. Заполним таблицу по условию задачи.

	α	m (г)	M (г)
1-й раствор	20%, или 0,2	$0{,}2 \cdot 300$	300
2-й раствор	40%, или 0,4	$0{,}4x$	x
Смесь	32%, или 0,32	$60 + 0{,}4x$	$300 + x$

Составим и решим уравнение: $60 + 0{,}4x = 0{,}32\,(300 + x)$, $0{,}08x = 36$, откуда $x = 450$.

Ответ: 450 г.

в) Пусть из первой склянки берут x г раствора. Заполним таблицу по условию задачи.

	α	M (г)	m (г)
1-й раствор	20%, или 0,2	x	$0{,}2x$
2-й раствор	40%, или 0,4	$1{,}5x$	$0{,}4 \cdot 1{,}5x$
Смесь	32%, или 0,32	$x + 1{,}5x$	$0{,}32 \cdot 2{,}5x$

Рассчитаем содержание кислоты в смеси по формуле $\alpha = \frac{m}{M}$:

$$\alpha = \frac{m}{M} = \frac{0{,}32 \cdot 2{,}5x}{2{,}5 \cdot x} \cdot 100 = 32\%.$$

Ответ: верно.

4. (*С 6-го класса.*) Было 12 кг пресной воды. В нее добавили несколько килограммов сахара и получили 4%-й раствор. Сколько килограммов сахара было добавлено в воду?

Решение. Пусть добавили x кг сахара. Заполним таблицу по условию задачи.

	α	M (кг)	m (кг)
Вода	0%, или 0	12	
Сахар	100%, или 1	x	x
Раствор	4%, или 0,04	$12 + x$	x

Так как масса добавленного сахара и есть масса сахара в растворе, то составим и решим уравнение: $(12 + x)0{,}04 = x$, $0{,}96x = 0{,}48$, откуда $x = 0{,}5$.

Ответ: 0,5 кг.

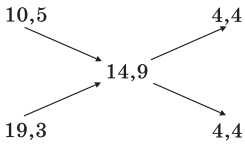
5. (*С 8-го класса.*) Сплав из золота и серебра весом 13 кг 410 г при полном погружении в воду стал весить 12 кг 510 г. Определите массы золота и серебра в сплаве, если плотность золота 19,3 г/см^3, а серебра 10,5 г/см^3.

Решение. По закону Архимеда, сплав при погружении в воду теряет в весе столько, сколько весит вытесненная им вода, то есть $13{,}41 - 12{,}51 = 0{,}9$ кг.

Плотность воды равна 1 г/см^3, поэтому объем сплава равен 900 см^3, а его плотность равна

$$\frac{13\,410}{900} = 14{,}9 \text{ г/см}^3.$$

Составим схему по правилу «креста», где в левой колонке и в центре стоят массы 1 см^3 серебра, золота и сплава:



Рассматривая правую колонку, видим, что сплав содержит одинаковое число частей серебра и золота. Значит, массы золота и серебра в сплаве равны.

Ответ: 6 кг 705 г каждого.

6. Из 20 т руды выплавляют 10 т металла, содержащего 8% примесей. Определите процент примесей в руде.

Решение. 1) Масса примесей в 10 т металла: $10 \cdot 0{,}08 = 0{,}8$ т;

2) масса металла в 10 т металла с примесью: $10 - 0{,}8 = 9{,}2$ т;

3) процентное содержание металла в руде: $\frac{9{,}2}{20} \cdot 100 = 46\%$;

4) процентное содержание примесей в руде: $100 - 46 = 54\%$.

Ответ: 54% примесей.

Задачи на понижение концентрации

1. (*С 5-го класса.*) Сироп содержит 18% сахара. Сколько килограммов воды нужно добавить к 40 кг сиропа, чтобы содержание сахара составило 15%?

Решение. Пусть надо добавить x кг воды. Заполним таблицу по условию задачи.

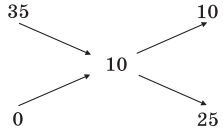
	α	M (кг)	m (кг)
Было	18%, или 0,18	40	$0{,}18 \cdot 40$
Стало	15%, или 0,15	$40 + x$	$0{,}15(40 + x)$

Так как масса сахара не изменилась, то составим и решим уравнение: $0{,}15(40 + x) = 7{,}2$, $0{,}15x = 1{,}2$, откуда $x = 8$.

Ответ: 8 кг.

2. (*С 6-го класса.*) Сколько граммов 35%-го раствора марганцовки надо добавить к 325 г воды, чтобы концентрация марганцовки в растворе составила 10%?

Решение. Способ I. Решим задачу по правилу «креста». Составим схему:



Значит, 325 г воды составляют 25 частей, а 35%-й раствор — 10 частей, или $325 : 25 \cdot 10 = 130$ г.

Ответ: 130 г.

3. (*С 5-го класса.*) Сколько граммов воды нужно добавить к 5%-й йодной настойке массой 100 г, чтобы концентрация йода уменьшилось до 1%?

Решение. Способ I. 1) $100 \cdot 0{,}05 = 5$ г — масса йода в исходном растворе;

2) 5 г — это 1% йода в полученном растворе. Масса полученного раствора составляет 100% и равна 500 г;

3) $500 - 100 = 400$ г — столько воды надо добавить.

Ответ: 400 г.

Способ II. Пусть надо добавить x г воды. Заполним таблицу по условию задачи.

	α	M (г)	m (г)
Исходный р-р	5%, или 0,05	100	$0{,}05 \cdot 100$
Вода	0%, или 0	x	
Полученный р-р	1%, или 0,01	$x + 100$	$0{,}1(x + 100)$

Так как масса йода не изменилась, то составим уравнение: $0{,}01(x + 100) = 5$, $0{,}01x = 4$, откуда $x = 400$.

Ответ: 400 г.

4. (*С 5-го класса.*) Какую массу воды надо добавить к водному раствору соды массой 90 кг, содержащему 5% соды, чтобы получить раствор, содержащий 3% соды?

Решение. Пусть надо добавить x кг воды. Заполним таблицу по условию задачи:

	α	M (кг)	m (кг)
Исходный р-р	5%, или 0,05	90	$90 \cdot 0{,}05$
Вода	0%, или 0	x	0
Полученный р-р	3%, или 0,03	$90 + x$	$(90 + x) \cdot 0{,}03$

Так как масса соды не изменилась, то составим уравнение: $(90 + x) \cdot 0{,}03 = 4{,}5$, $0{,}03x = 1{,}8$, откуда $x = 60$.

Ответ: 60 кг.

5. (*С 5-го класса.*) Морская вода содержит 5% солей. Сколько килограммов чистой воды нужно добавить к 40 кг морской, чтобы содержание солей в полученном растворе составило 2%?

Решение. *Способ I.*

1) $40 \cdot 0{,}05 = 2$ кг солей в 40 кг морской воды;

2) 2 кг солей — 2% в полученном растворе (100%), $2 : 2 \cdot 100 = 100$ кг — масса полученного раствора;

3) $100 - 40 = 60$ кг — масса добавленной воды.

Ответ: 60 кг.

Способ II. Содержание солей в новом растворе в $\frac{5}{2} = 2{,}5$ раза меньше, чем в исходном. Следовательно, масса нового раствора должна быть в 2,5 раза больше, то есть $40 \cdot 2{,}5 = 100$ кг.

Масса добавленной воды равна $100 - 40 = 60$ кг.

Ответ: 60 кг.

6. (*С 5-го класса.*) В морской воде содержится 5% солей. Сколько килограммов пресной воды надо добавить к 55 кг морской для получения 4%-ного раствора.

Ответ: 13,75 кг.

7. (*С 5-го класса.*) Апельсиновый сок содержит 12% сахара. Сколько килограммов воды нужно добавить к 5 кг сока, чтобы содержание сахара стало 8%?

Решение. Концентрация сахара уменьшилась в $\frac{12}{8} = 1{,}5$ раза. Значит, масса раствора увеличилась в 1,5 раза и стала равна $5 \cdot 1{,}5 = 7{,}5$ кг. Следовательно, масса добавленной воды равна $7{,}5 - 5 = 2{,}5$ кг.

Ответ: 2,5 кг.

8. (*С 5-го класса.*) Сколько килограммов воды надо добавить к 60 кг 16%-ной соляной кислоты, чтобы получить 10%-ный раствор этой кислоты?

Ответ: 36 кг.

9. (*С 6-го класса.*) Сколько килограммов 5%-го раствора соли надо добавить к 15 кг 10%-го раствора той же соли, чтобы получить ее 8%-ный раствор?

Решение. Пусть добавили x кг 5%-го раствора соли. Заполним таблицу по условию задачи:

Раствор	α	M (кг)	m (кг)
10%-ный	10%, или 0,1	15	$0{,}1 \cdot 15$
5%-ный	5%, или 0,05	x	$0{,}05x$
8%-ный	8%, или 0,08	$15 + x$	$1{,}5 + 0{,}05x$

Составим и решим уравнение: $1{,}5 + 0{,}05x = 0{,}08\ (15 + x)$, $0{,}03x = 0{,}3$, откуда $x = 10$.

Ответ: 10 кг.

10. (*С 5-го класса.*) Имеется сплав меди с оловом массой 12 кг, содержащий 45% меди. Сколько чистого олова надо добавить, чтобы получить сплав, в котором содержится 40% меди?

Решение. Пусть добавили x кг олова. Так как масса меди в исходном и полученном сплавах одна и та же, то составим уравнение $0{,}4(12 + x) = 12 \cdot 0{,}45$. Решив его, получим; $x = 1{,}5$.

Ответ: 1,5 кг.

11. (*С 6-го класса.*) В 5%-й раствор соли добавили 55 г соли и получили 10%-й раствор. Сколько граммов 5%-го раствора было?

Решение. Пусть было x г 5%-го раствора. Заполним таблицу по условию задачи:

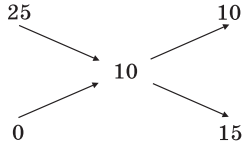
	α	M (г)	m (г)
Было	5%, или 0,05	x	$0{,}05x$
Стало	10%, или 0,1	$x + 55$	$0{,}1(x + 55)$

Составим и решим уравнение: $0{,}05x + 55 = 0{,}1 \cdot (x + 55)$, $0{,}05x = 49{,}5$, откуда $x = 990$.

Ответ: 990 г.

12. (*С 6-го класса.*) Требуется приготовить 100 г 10%-го раствора нашатырного спирта. Сколько для этого потребуется воды и 25%-го раствора нашатырного спирта?

Решение. Решим задачу по правилу «креста». Составим схему:



Значит, надо взять $100 : (15 + 10) \cdot 10 = 40$ г нашатырного спирта и $100 : 25 \cdot 15 = 60$ г воды.

Ответ: 40 г нашатырного спирта и 60 г воды.

Задачи на «высушивание»

При решении этих задач надо объяснить учащимся, что все тела, вещества, продукты содержат в себе воду, которая частично испаряется. Поэтому при решении этих задач мы каждый раз разделяем данное нам вещество на воду и «сухой остаток», масса которого не меняется в условиях задачи.

1. (*С 5-го класса.*) Собрали 8 кг свежих цветков ромашки, влажность которых 85%. После того как цветки высушили, их влажность составила 20%. Чему равна масса цветков ромашки после сушки?

Решение. Заполним таблицу по условию задачи:

	Масса, в кг	Содержание, в %	
		воды	сухого вещества
Свежие цветы	8	85	100–85
Высушенные	?	20	100–20

1) $0{,}15 \cdot 8 = 1{,}2$ кг — масса сухого вещества в 8 кг;

2) 1,2 кг сухого вещества — это 80% массы высушенных цветов, значит, масса высушенных цветов равна $1{,}2 : 0{,}8 = 1{,}5$ кг.

Ответ: 1,5 кг.

2. (*С 5-го класса.*) Из 22 кг свежих грибов получается 2,5 кг сухих грибов, содержащих 12% воды. Каков процент воды в свежих грибах?

Решение. Заполним таблицу по условию задачи:

	Масса, в кг	Содержание, в %	
		воды	сухого вещества
Свежие грибы	22	?	
Сухие грибы	2,5	12	100–12

1) $2{,}5 \cdot 0{,}88 = 2{,}2$ кг — масса сухого вещества;

2) $2{,}2 : 22 \cdot 100 = 10\%$ сухого вещества содержится в свежих грибах;

3) $100 - 10 = 90\%$ воды в свежих грибах.

Ответ: 90%.

3. (*С 5-го класса.*) Свежие яблоки содержат 80% воды, а сушеные 10%. Сколько надо взять свежих яблок, чтобы получить 6 кг сушеных?

Решение. Если в сушеных яблоках содержится 10% воды, то сухое вещество составляет 90%. Найдем массу сухого вещества в 6 кг сушеных яблок: $6 \cdot 0{,}9 = 5{,}4$ кг. Та же масса сухого вещества была и в свежих яблоках, и она составляла 20% от их массы. Найдем массу свежих яблок: $5{,}4 : 0{,}2 = 27$ кг.

Ответ: 27 кг.

4. (*С 5-го класса.*) Если из 10 кг абрикосов получается 8 кг кураги, содержащей 42% воды, то сколько процентов воды содержат свежие абрикосы?

Ответ: 53,6%.

5. (*С 5-го класса.*) Только что добытый каменный уголь содержит 2% воды, а после двухнедельного пребывания на воздухе он содержит 12% воды. На сколько килограммов увеличится масса одной добытой тонны угля после того, как она две недели пролежит на воздухе?

Эта задача обратна предыдущим, здесь влажность угля увеличивается за счет поглощения влаги из воздуха.

Решение. Заполним таблицу по условию задачи:

	Масса, в т	Содержание, в %	
		воды	сухого вещества
Было	1	2	100–2
Стало	?	12	100–12

1) $1000 \cdot 0{,}98 = 980$ кг — сухого вещество в добытом угле;

2) 980 кг — это 88%, $980 : 0{,}88 \approx 1114$ кг — масса угля после двух недель пребывания на воздухе;

3) $1114 - 1000 = 114$ кг — увеличение массы одной добытой тонны угля.

Ответ: на 114 кг.

6. (*С 5-го класса.*) В свежих грибах 70% влаги, а в сушеных 10%. Сколько килограммов свежих грибов надо собрать для того, чтобы получить 30 кг сушеных?

Решение. 1) В сушеных грибах сухое вещество составляет 90%; 90% от 30 кг — $30 : 100 \cdot 90 = 27$ кг.

2) 27 кг сухого вещества в свежих грибах составляют 30%. Найдем 1% от 27кг: $27 : 30 = 0{,}9$ кг. Тогда 100% составляют $0{,}9 \cdot 100 = 90$ кг.

Ответ: 90 кг.

7. (*С 5-го класса.*) Свежие грибы содержат 90% воды, а сухие — 12% воды. Сколько получится сухих грибов из 22 кг свежих грибов?

Решение. 1) В 22 кг свежих грибов содержится 10% сухого вещества, то есть $0{,}1 \cdot 22 = 2{,}2$ кг.

2) После сушки сухое вещество стало составлять $100 - 12 = 88\%$.

3) Составим пропорцию $\frac{2{,}2}{x} = \frac{88}{100}$, откуда $x = \frac{2{,}2 \cdot 100}{88} = 2{,}5$ кг.

Ответ: 2,5 кг.

8. (*С 5-го класса.*) Трава при высыхании теряет около 28% своей массы. Сколько было накошено травы, если из нее было получено 1,44 т сена?

Решение. Заполним таблицу по условию задачи:

	Масса, в т	Содержание, в %
Трава	x	100
Сено	1,44	100–28

Зависимость прямо пропорциональная. Составим и решим пропорцию $\frac{x}{1{,}44} = \frac{100}{72}$, откуда $x = \frac{1{,}44 \cdot 100}{72} = 2$ т.

Ответ: 2 т.

9. На складе хранилась 51 т зерна, влажность которого была 20%. Перед закладкой зерна в зернохранилище его просушили, доведя влажность до 15%. Сколько тонн зерна засыпали в зернохранилище?

Решение. 1) $100 - 20 = 80\%$ составляет сухое вещество;

2) $51 \cdot 0{,}8 = 40{,}8$ т — масса сухого вещества;

3) $100 - 15 = 85\%$ составляет сухое вещество после просушки;

4) $40{,}8 : 0{,}85 = 48$ т — масса зерна после просушки.

Ответ: 48т.

10. (*С 6-го класса.*) Имеется 0,5 т целлюлозной массы, содержащей 85% воды. После выпаривания получили массу, содержащую 25% целлюлозы. Сколько килограммов воды было выпарено?

Решение. Пусть выпарили x кг воды.

Заполним таблицу по условию задачи:

	α, %	M, кг	m, кг
Было	100–85	500	$500 \cdot 0{,}15$
Стало	25	$500 - x$	$(500 - x) \cdot 0{,}25$

Составим и решим уравнение: $500 \cdot 0{,}15 = (500 - x) \cdot 0{,}25$, $0{,}25x = 50$, откуда $x = 200$.

Ответ: 200 кг.

11. (*С 6-го класса.*) Из 60%-го водного раствора спирта испарилась половина воды и $\frac{2}{3}$ спирта. Каково процентное содержание спирта в получившемся растворе?

Решение. 60%-й раствор спирта содержит 60% спирта и $100 - 60 = 40\%$ воды. Если масса раствора была x г, то спирта в нем было $0{,}6x$ г, а воды — $0{,}4x$ г. В результате испарения в растворе осталось:

1) спирта $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$, или $\frac{1}{3} \cdot 0{,}6x = 0{,}2x$ г;

2) воды $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, или $\frac{1}{2} \cdot 0{,}4x = 0{,}2x$ г.

Рассчитаем концентрацию получившегося раствора:

$$\alpha = \frac{m}{M} = \frac{0{,}2x}{0{,}2x + 0{,}2x} = \frac{0{,}2x}{2 \cdot 0{,}2x} = \frac{1}{2} = 50\%.$$

Ответ: 50%.

12. (*С 5-го класса.*) Пчелы перерабатывают цветочный нектар в мед, освобождая его от воды. Нектар обычно содержит 84% воды, а полученный из него мед — 20%. Сколько килограммов нектара приходится перерабатывать пчелам для получения одного килограмма меда?

Решение. Решим задачу арифметически, с конца.

1) 100 – 20 = 80% составляет основное вещество от полученного меда;

2) 1 · 0,8 = 0,8 кг — масса основного вещества в 1 кг меда;

3) 100 – 84 = 16% составляет основное вещество от собранного нектара;

4) 0,8 : 0,16 = 5 кг нектара.

Ответ: 5 кг.

Задачи на смешивание растворов разных концентраций

1. (*С 6-го класса.*) При смешивании 5%-го и 40%-го растворов кислоты получили 140 г 30%-го раствора кислоты. Сколько грамм каждого раствора было взято?

Решение. Пусть взяли x г 5%-го раствора кислоты. Заполним таблицу по условию задачи:

	α	M, г	m, г
5%-й	0,05	x	$0{,}05x$
40%-й	0,4	$(140 - x)$	$0{,}4(140 - x)$
Смесь	0,3	140	$0{,}3 \cdot 140$

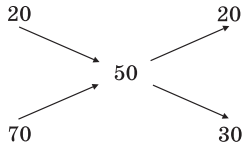
Составим и решим уравнение:

$$0{,}05x + 0{,}4(140 - x) = 0{,}3 \cdot 140, \qquad 0{,}35x = 14, \qquad x = 40.$$

Ответ: 40 г 5%-го и 100 г 40%-го.

2. (*С 5-го класса.*) Один раствор содержит 20% соли, а второй — 70%. Сколько граммов первого и второго растворов нужно взять, чтобы получить 100 г 50%-го солевого раствора?

Решение. Решим задачу по правилу «креста». Составим схему:



Значит, 100 г смеси составляют 50 частей.

Одна часть — 100 : (30 + 20) = 2 г, 70%-й раствор — 2 · 30 = 60 г, 20%-й раствор — 2 · 20 = 40 г.

Ответ: 20%-го 40 г, 70%-го 60 г.

3. (*С 6-го класса.*) Смешали 30%-й и 10%-й растворы соляной кислоты и получили 600 г 15%-го раствора. Сколько граммов каждого раствора было взято?

Решение. Пусть взяли x г 30%-го раствора и y г — 10%-го раствора. Заполним таблицу по условию задачи:

	α	M, г	m, г
30%-й	0,3	x	$0{,}3x$
10%-й	0,1	y	$0{,}1y$
Смесь	0,15	600	$0{,}15 \cdot 600$

Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 600, \\ 0{,}3x + 0{,}1y = 0{,}15 \cdot 600, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 150, \\ y = 450. \end{cases}$$

Ответ: 150 г 30%-го и 450 г 10%-го.

4. (*С 6-го класса.*) Смешали клубничный сироп, содержащий 40% сахара, и малиновый сироп, содержащий 20% сахара. Сколько граммов каждого сиропа взяли, если получили 360 г ягодного коктейля с содержанием сахара 25%?

Ответ: 90 г клубничного и 270 г малинового.

5. (*С 6-го класса.*) Имеется руда из двух пластов с содержанием меди 6% и 11%. Сколько надо взять «бедной» руды, чтобы при смешивании с «богатой» получить 20 т руды с содержанием меди 8%?

Решение. Пусть взяли x т «бедной» руды. Заполним таблицу по условию задачи:

	α	M, т	m, т
«Бедная» руда	0,06	x	$0{,}06x$
«Богатая» руда	0,11	$20 - x$	$0{,}11(20 - x)$
Смесь руд	0,08	20	$0{,}08 \cdot 20$

Составим и решим уравнение:

$0{,}06x + 0{,}11 \cdot (20 - x) = 20 \cdot 0{,}08$, $\quad 0{,}05x = 0{,}6$, $\quad x = 12$.

Ответ: 12 т.

6. (*С 7-го класса.*) Сколько граммов воды и 6%-го раствора перекиси водорода надо добавить к 36 г 3%-го раствора перекиси водорода, чтобы получить 54 г 5%-го раствора перекиси водорода?

Решение. Пусть добавили x г 6%-го раствора перекиси водорода.

	α, %	M, г	m, г
Было	3	36	1,08
Добавили	6	x	$0{,}06\,x$
Стало	5	54	$0{,}05 \cdot 54$

Так как при прибавлении воды масса перекиси водорода в растворе не изменяется, то составим и решим уравнение:

$1{,}08 + 0{,}06x = 0{,}05 \cdot 54$, $\quad 0{,}06x = 1{,}62$, $\quad$ откуда $x = 27$.

Найдем массу добавленной воды: $54 - 36 - 27 = 1$ г.

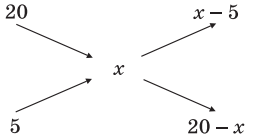
Ответ: 27 г перекиси и 1 г воды.

7. (*С 5-го класса.*) Имеется творог двух сортов. Жирный содержит 20% жира а нежирный содержит 5% жира. Определите процент жирности получившегося творога, если смешали:

а) 2 кг жирного и 3 кг нежирного творога,

б) 3 кг жирного и 2 кг нежирного творога.

Решение. а) Решим задачу по правилу «креста». Составим схему:



$\dfrac{x-5}{20-x} = \dfrac{2}{3}$, $\quad 3x - 15 = 40 - 2x$, $\quad 5x = 55$, $\quad x = 11$.

б) Заполним таблицу по условию задачи:

	α	M, кг	m, кг
Жирный	0,2	3	$3 \cdot 0{,}2$
Нежирный	0,05	2	$2 \cdot 0{,}05$

Жирность творога — это доля жира или его концентрация в твороге. Найдем ее по формуле $\alpha = \dfrac{m}{M} = \dfrac{0{,}6+0{,}1}{3+2} = \dfrac{0{,}7}{5} = 0{,}14$, или 14%.

Ответ: а) 11%; б) 14%.

8. (*С 7-го класса.*) Имеются два сосуда, содержащие 30 кг и 35 кг раствора кислоты различной концентрации. Если смешать оба раствора, то получится раствор, содержащий 46% кислоты. Если смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 47% кислоты. Какова концентрация данных растворов?

Решение. Пусть концентрация одного раствора $x\%$, а другого $y\%$, p — массы растворов во втором случае. Заполним таблицу:

	α	M, кг	m, кг
1-й раствор	$x\%$, или $0{,}01x$	30	$0{,}01x \cdot 30$
2-й раствор	$y\%$, или $0{,}01y$	35	$0{,}01y \cdot 35$
1-я смесь	46%, или 0,46	65	$0{,}46 \cdot 65$
2-я смесь	47%, или 0,47	$2p$	$0{,}47 \cdot 2p$

Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 0{,}3x + 0{,}35y = 0{,}46 \cdot 65, \\ 0{,}01x \cdot p + 0{,}01y \cdot p = 0{,}47 \cdot 2p, \end{cases} \quad \begin{cases} 30x + 35y = 2990, \\ x + y = 94, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x + 7y = 598, \\ x + y = 94, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 60, \\ y = 34. \end{cases}$$

Ответ: 60% и 34%.

9. (*С 8-го класса.*) Имеются два сосуда, содержащие 10 кг и 12 кг раствора кислоты различной концентрации. Если эти растворы смешать, то получится раствор, содержащий 36% кислоты. Если смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащей 39% кислоты. Сколько килограммов кислоты в каждом растворе?

Ответ: в первом — 7,2 кг, во втором — 0,72 кг.

10. (*С 8-го класса.*) В двух сосудах находятся растворы щелочи разных концентраций. В первом сосуде находится 4 кг раствора, а во втором — 6 кг. Если их слить вместе, то получится раствор, содержащий 35% щелочи. Если же слить вместе по 3 кг из каждого сосуда, то получится раствор, содержащий $a\%$ щелочи. Сколько килограммов щелочи во втором сосуде? Какие значения может принимать a?

Решение. Пусть масса щелочи в первом сосуде x кг, а во втором — y кг. Заполним таблицу по условию задачи:

	α	M, кг	m (щелочи), кг
1-й сосуд		4	x
2-й сосуд		6	y
Вместе	35	10	$0{,}35 \cdot 10$
По 3 кг из каждого сосуда	a	6	$\frac{3}{4}x + \frac{3}{6}y$

Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y=0,35\cdot 10, \\ \dfrac{3}{4}x+\dfrac{3}{6}y=\dfrac{6a}{100}, \end{cases} \begin{cases} x+y=3,5, \\ 3x+2y=0,24a, \end{cases} \begin{cases} x=0,24a-7, \\ y=10,5-0,24a. \end{cases}$$

По условию задачи: $0 \le x \le 4$, $0 \le y \le 6$. То есть получим систему неравенств:

$$\begin{cases} 0 \le 0,24a-7 \le 4, \\ 0 \le 10,5-0,24a \le 6, \end{cases} \begin{cases} 7 \le 0,24a \le 11, \\ 4,5 \le 0,24a \le 10,5, \end{cases}$$

откуда имеем: $7 \le 0,24a \le 10,5$, или $\dfrac{175}{6} \le a \le \dfrac{175}{4}$.

Ответ: $(10,5 - 0,24a)$ кг, $a \in \left[29\dfrac{1}{6}; 43\dfrac{3}{4} \right]$.

11. Концентрации спирта в трех растворах образуют геометрическую прогрессию. Если смешать первый, второй и третий растворы в отношении 2 : 3 : 4, то получится раствор, содержащий 32% спирта. Если смешать эти растворы в отношении 3 : 2 : 1, то получится раствор, содержащий 22% спирта. Какова доля спирта в каждом растворе?

Решение. Пусть первый раствор содержит x%, второй — y%, а третий — z% спирта. При первом перемешивании смешали 2 кг первого раствора, 3 кг второго и 4 кг третьего и получили раствор, содержащий 32% спирта. Заполним таблицу по этим условиям:

	α	M, кг	m, кг
1-й раствор	x %, или $0,01x$	2	$0,02x$
2-й раствор	y%, или $0,01y$	3	$0,03y$
3-й раствор	z% или $0,01z$	4	$0,04z$
Смесь	32%, или 0,32	9	$0,32 \cdot 9$

Составим уравнение:

$$0,02\,x + 0,03y + 0,04z = 9 \cdot 0,32,\ 2x + 3y + 4z = 288.$$

При втором перемешивании смешали 3 кг первого раствора, 2 кг второго и 1 кг третьего раствора и получили раствор, содержащий 22% спирта. Заполним таблицу по этим условиям:

	α	M, кг	m, кг
1-й раствор	x%, или $0,01x$	3	$0,03x$
2-й раствор	y%, или $0,01y$	2	$0,02y$
3-й раствор	z%, или $0,01z$	1	$0,01z$
Смесь	22%, или 0,22	6	$0,22 \cdot 6$

Составим уравнение:

$$0{,}03x + 0{,}02y + 0{,}01z = 6 \cdot 0{,}22,\ 3x + 2y + z = 132.$$

Так как x, y, z образуют геометрическую прогрессию, то $y^2 = xz$. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 288, \\ 3x + 2y + z = 132, \\ y^2 = xz. \end{cases}$$

Из первых двух уравнений выразим y и z через x. Получим: $y = -2x + 48$ и $z = x + 36$. Так как $y > 0$, то $-2x + 48 > 0$ и $x < 24$. Подставив в уравнение $y^2 = xz$ найденные выражения для y и z, получим уравнение $(48 - 2x)^2 = x \cdot (x + 36)$.

$$x^2 - 76x + 768 = 0.\ x_1 = 12,\ x_2 = 64.$$

$x = 64$ не удовлетворяет условию.

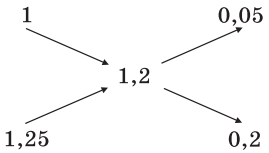
Если $x = 12$, то $y = 24$, а $z = 48$.

Ответ: в первом — 12%, во втором — 24%, в третьем — 48%.

12. (*С 6-го класса.*) Индийский чай дороже грузинского на 25%. В каких пропорциях нужно смешать индийский чай с грузинским, чтобы получить чай, который дороже грузинского на 20%?

Решение. Если индийский чай дороже грузинского на 25%, то значит, индийский чай дороже грузинского в 1,25 раза. Чай, который мы хотим получить при смешивании, дороже грузинского на 20%, то есть дороже в 1,2 раза.

Решим задачу по правилу «креста». Составим схему:



Значит, в смеси содержится 0,05, или $\frac{1}{20}$, часть грузинского чая и 0,2, или $\frac{1}{5}$, часть индийского. Следовательно, отношение массы индийского чая к массе грузинского равно $\frac{1}{5} : \frac{1}{20} = 4 : 1$.

Ответ: 4 : 1.

13. (*С 6-го класса.*) Из веществ A и B приготовили две смеси. В первой смеси отношение масс веществ A и B равно 5 : 1, а во второй — 9 : 2.

а) Сколько килограммов вещества B содержится в первой смеси, если ее масса 102 кг?

б) Сколько килограммов вещества A содержится в смеси, приготовленной из 102 кг первой и 176 кг второй смеси?

Решение. а) Пусть массы веществ равны m_A и m_B. По условию $m_A : m_B = 5 : 1$, откуда $m_A = 5x$, а $m_B = x$. Составим уравнение $5x + x = 102$. Следовательно, $x = 17$. Значит, вещества A в первой смеси $17 \cdot 5 = 85$ кг.

б) В 102 кг первой смеси содержится 85 кг вещества A и 17 кг вещества B. Найдем массу вещества A в 176 кг второй смеси. Составим и решим уравнение: $9k + 2k = 176$, откуда $k = 16$. Значит, в 176 кг второй смеси содержится $9 \cdot 16 = 144$ кг вещества A. Всего в смеси содержится $85 + 144 = 229$ кг вещества A.

Ответ: а) 85 кг; б) 229 кг.

14. (*С 7-го класса.*) Первый раствор содержит 20%, а второй 60% азотной кислоты. Из них приготовили две смеси. Для приготовления смесей взяли две одинаковые порции второго раствора и добавили к ним 15 кг и 5 кг первого раствора соответственно. Какова масса порции второго раствора, если известно, что доля воды во второй смеси в 2 раза больше доли кислоты в первой?

Решение. Пусть для приготовления смесей взяли x кг второго раствора кислоты. Тогда масса первой смеси $(15 + x)$ кг, а кислоты в ней содержится $(15 \cdot 0{,}2 + 0{,}6x)$ кг. Доля кислоты в первой смеси равна $\alpha_1 = \dfrac{3 + 0{,}6x}{15 + x}$.

Масса второй смеси $(x + 5)$ кг, а воды в ней содержится $(0{,}4x + 5 \cdot 0{,}8)$ кг. Доля воды во второй смеси равна $\alpha_2 = \dfrac{0{,}4x + 4}{x + 5}$.

По условию задачи $2\alpha_1 = \alpha_2$. Подставив найденные выражения α_1 и α_2, получим уравнение: $2 \cdot \dfrac{3 + 0{,}6x}{15 + x} = \dfrac{0{,}4x + 4}{x + 5}$.

$(3 + 0{,}6x)\cdot(x + 5) = (15 + x)\cdot(0{,}2x + 2)$, $0{,}4x^2 + x - 15 = 0$.

$$2x^2 + 5x - 75 = 0, \ x_1 = 5 \text{ и } x_2 = -\frac{30}{4}.$$

x_2 — не подходит, так как объем не может быть отрицательным.

Ответ: 5 кг.

15. (*С 8-го класса.*) Один сплав, состоящий из двух металлов, содержит их в отношении 1 : 2, а другой — в отношении 2 : 3. Сколько частей каждого сплава нужно взять, чтобы получить сплав, содержащий эти металлы в отношении 17 : 27?

Решение. Пусть нужно взять x частей первого сплава и y частей второго. В x частях первого сплава будет $\frac{x}{3}$ частей одного металла и $\frac{2x}{3}$ другого. В y частях второго сплава будет $\frac{2y}{5}$ и $\frac{3y}{5}$ частей одного и другого металла.

Составим уравнение по условию задачи: $\frac{\frac{x}{3}+\frac{2y}{5}}{\frac{2x}{3}+\frac{3y}{5}}=\frac{17}{27}$.

Умножив числитель и знаменатель левой дроби на 15, получим уравнение $\frac{5x+6y}{10x+9y}=\frac{17}{27}$, откуда получим:

$$135x + 162y = 170x + 153y,\ 35x = 9y,\ \frac{x}{y}=\frac{9}{35}.$$

Ответ: 9 частей первого и 35 частей второго.

16. (*С 8-го класса.*) В первый сосуд, емкостью 6 л, налито 4 л 70%-го раствора спирта, во второй сосуд такого же объема налито 3 л 90%-го раствора спирта. Сколько литров раствора спирта нужно перелить из второго сосуда в первый, чтобы в первом сосуде получился p%-й раствор спирта? При каких значениях p задача имеет решение?

Решение: Пусть из второго сосуда в первый перелили a л раствора. Тогда в первом сосуде стало $(a + 4)$ л смеси, а так как $4 + a \le 6$, то $a \le 2$.

Чистого спирта в первом сосуде стало $(0,7 \cdot 4 + 0,9 \cdot a)$ л, или $\frac{p}{100}\cdot(a+4)$ л. Составим уравнение: $(0,7\cdot 4+0,9\cdot a)=\frac{p}{100}\cdot(a+4)$.

Откуда получим: $a \cdot (90 - p) = 4p - 280$, или $a=\frac{4p-280}{90-p}$.

Так как по смыслу задачи $0 < a \le 2$ и $70 < p < 90$, то получим двойное неравенство $0 < 4p - 280 \le 2(90 - p)$, равносильное системе:

$$\begin{cases} 4p-280>0, \\ 4p-280\le 2(90-p), \end{cases} \begin{cases} p>70, \\ p\le 76\frac{2}{3}, \end{cases} \text{ или } 70<p<76\frac{2}{3}.$$

Ответ: $\frac{4p-280}{90-p}$ л, $p\in\left(70;\,76\frac{2}{3}\right]$.

Задачи на переливание

При решении этих задач еще раз следует напомнить учащимся, что выполняются следующие допущения: «закон сохранения масс» и «закон сохранения объемов», как для всей смеси, так и для каждого из ее компонентов. При этом следует считать, что плотности растворов изменяются незначительно и примерно равны плотности воды, то есть растворы сильно разбавлены, или наоборот, мы имеем дело с сильно концентрированными растворами и разбавляем их незначительно, но тогда плотность раствора близка к плотности основного вещества.

1. (*С 7-го класса.*) В первой кастрюле был 1 л кофе, а во второй — 1 л молока. Из второй кастрюли в первую перелили 0,13 л молока и хорошо размешали. После этого из первой кастрюли во вторую перелили 0,13 л смеси. Чего больше: молока в кофе или кофе в молоке?

Решение. 1) В первой кастрюле стало 1,13 л смеси, в которой молоко составило $\frac{0{,}13}{1{,}13}=\frac{13}{113}$, а кофе — $1-\frac{13}{113}=\frac{100}{113}$.

2) Во второй кастрюле осталось 0,87 л молока и добавили 0,13 смеси, в которой кофе было $0{,}13\cdot\frac{100}{113}=\frac{13}{113}$.

Ответ: одинаково.

2. (*С 7-го класса.*) В первой кастрюле был один литр кофе, а во второй — один литр молока. Из первой кастрюли во вторую перелили 0,51 л кофе и хорошо размешали. После этого из второй кастрюли в первую перелили 0,51 л смеси. Чего больше: молока в кофе или кофе в молоке?

Ответ: одинаково.

3. (*С 7-го класса.*) В сосуде объемом 10 л содержится 20%-й раствор соли. Из сосуда вылили 2 л раствора и долили 2 л воды, после чего раствор перемешали. Эту процедуру повторили еще один раз. Определите концентрацию соли после первой и после второй процедуры.

Решение. 1) Найдем начальную массу соли:

$$m_0 = 0{,}01\alpha_0 V = 0{,}2\cdot 10 = 2 \text{ кг}.$$

2) После первой процедуры, соли осталось

$$m_1 = m_0 - 0{,}01\alpha \cdot 2 = 2 - 0{,}2 \cdot 2 = 1{,}6 \text{ кг},$$

а ее концентрация после добавления 2 л воды стала равной

$$\alpha_1 = \frac{m_1}{10} = \frac{1{,}6}{10} = 0{,}16, \text{ или } 16\%.$$

3) После второй процедуры масса соли, оставшейся в растворе, стала равна

$$m_2 = m_1 - 0{,}16 \cdot 2 = 1{,}6 - 0{,}32 = 1{,}28 \text{ кг}.$$

После добавления воды концентрация стала $\alpha_2 = \frac{m_2}{10} = \frac{1{,}28}{10} = 0{,}128,$ или 12,8%.

Ответ: 16%, 12,8%.

4. (*С 8-го класса.*) Из сосуда емкостью 54 л, наполненного кислотой, вылили несколько литров кислоты и долили столько же литров воды, потом вылили столько же литров смеси. Тогда в смеси, оставшейся в сосуде, оказалось 24 л кислоты. Сколько литров кислоты вылили в первый раз?

Решение. Пусть в первый раз вылили x л кислоты, тогда в сосуде осталось $(54 - x)$ л кислоты, и после добавления воды доля кислоты в растворе стала равна $\frac{54-x}{54}$.

Во второй раз из сосуда вылили x л смеси, в которых содержалось $\frac{54-x}{54} \cdot x$ л кислоты. Значит, за два раза вылили $\left(x + \frac{54-x}{54} \cdot x \right)$ л, или $54 - 24 = 30$ л кислоты.

Составим и решим уравнение:

$$x + \frac{54-x}{54} \cdot x = 30, \; x^2 - 108x + 1620 = 0, \; x_1 = 18, \; x_2 = 90.$$

x_2 не удовлетворяет условию задачи $(90 > 54)$.

Ответ: 18 л.

5. (*С 8-го класса.*) Баллон емкостью 8 л наполнен кислородно-азотной смесью, причем кислород составляет 16% смеси. Из баллона выпускают некоторой объем смеси, после чего дополняют баллон азотом и вновь выпускают такой же объем смеси, после чего опять дополняют сосуд азотом. В результате в баллоне осталось 9% кислорода. Сколько литров смеси выпустили из баллона в первый раз?

Решение. Предположим, что каждый раз выпускали x л смеси и дополняли баллон x л азота. После первого выпуска смеси в баллоне осталось $(8 - x) \cdot 0{,}16$ л кислорода, а его концентрация стала равна $\frac{(8-x)\cdot 0{,}16}{8} = (8-x)\cdot 0{,}02$. После второго выпуска x л смеси в баллоне осталось $(8 - x)$ л смеси с концентрацией кислорода, равной $(8 - x) \cdot 0{,}02$. Концентрация кислорода на этом этапе равна $\frac{(8-x)^2\cdot 0{,}02}{8}$. Составим уравнение: $\frac{(8-x)^2\cdot 0{,}02}{8} = 0{,}09$, откуда $(8 - x)^2 = 36$, то есть $x_1 = 2$, $x_2 = 14$.

x_2 не удовлетворяет условию задачи, так как $x < 8$.

Ответ: 2 л.

6. В сосуде находится A г p%-го раствора соли. Из сосуда выливают a г раствора и наливают столько же литров воды, после чего раствор перемешивают. Эта процедура повторяется n раз. Какова доля соли после n перемешиваний?

Решение. Обратим внимание учащихся на то, что объем раствора не меняется, а содержание соли и ее концентрация с каждым разом уменьшаются. Например, после первого переливания в сосуде останется соли

$$m_1 = 0{,}01p \cdot A - 0{,}01p \cdot a = 0{,}01p(A - a) \text{ г}$$

и ее концентрация станет равной $\alpha_1 = \frac{0{,}01p(A-a)}{A}$.

После второго переливания в сосуде останется соли

$$m_2 = \frac{0{,}01p(A-a)}{A}\cdot A - \frac{0{,}01p(A-a)}{A}\cdot a = \frac{0{,}01p(A-a)^2}{A} \text{ г},$$

ее концентрация станет равной $\alpha_2 = \frac{0{,}01p(A-a)^2}{A^2}$.

Аналогично рассуждая, получим, что после третьего переливания, масса оставшейся соли равна $m_3 = \frac{0{,}01p(A-a)^3}{A^2}$ г, а её концентрация $\alpha_3 = \frac{0{,}01p(A-a)^3}{A^3}$. Следовательно, после n переливаний масса соли станет равна $m_n = \frac{0{,}01p(A-a)^n}{A^{n-1}}$ г, а ее концентрация $\alpha_n = \frac{0{,}01p(A-a)^n}{A^n}$.

Ответ: $\alpha_n = \frac{0{,}01p(A-a)^n}{A^n}$.

7. В сосуде находится A кг чистого спирта. Из него отливают a кг спирта и наливают a кг воды. После перемешивания получившейся смеси, с ней производят такие же действия несколько раз. Сколько спирта останется в сосуде после n переливаний и какова будет доля спирта в получившейся смеси?

Решение. Начальная концентрация спирта равна 100%, или 1.

После первого переливания масса спирта будет равна $m_1 = (A - a)$ кг, а его концентрация будет равна $\alpha_1 = \dfrac{A-a}{A}$.

После второго переливания

$$m_2 = m_1 - \frac{A-a}{A}\cdot a = A - a\cdot\frac{A-a}{A}\cdot a = \frac{(A-a)^2}{A} \text{ кг},$$

а концентрация $\alpha_2 = \dfrac{(A-a)^2}{A^2}$.

После третьего переливания

$$m_3 = m_2 - \frac{(A-a)^2}{A^2}\cdot a = \frac{(A-a)^2}{A} - \frac{(A-a)^2}{A^2}\cdot a = \frac{(A-a)^3}{A^2} \text{ кг},$$

а концентрация $\alpha_3 = \dfrac{(A-a)^3}{A^3}$.

Значит, после n-го переливания масса спирта будет равна $m_n = \dfrac{(A-a)^n}{A^{n-1}}$ кг, а его концентрация

$$\alpha_n = \frac{(A-a)^n}{A^n}, \text{ или } \alpha_n = \left(1 - \frac{a}{A}\right)^n.$$

Ответ: $\dfrac{(A-a)^n}{A^{n-1}}$ кг, $\left(1-\dfrac{a}{A}\right)^n$.

8. (*С 9-го класса.*) Из сосуда, наполненного 20 л спирта, отливают 1 л спирта и наливают 1 л воды. После перемешивания отливают 1л смеси и наливают 1 л воды, так поступают 10 раз. Сколько спирта останется в сосуде после десяти отливаний?

Решение. Применим формулу $m_n = \dfrac{(A-a)^n}{A^{n-1}}$, где $n = 10$, $A = 20$, $a = 1$. Получим:

$$m_{10} = \frac{(20-1)^{10}}{20^{10-1}} = \frac{19^{10}}{20^9} = \left(\frac{19}{20}\right)^{19}\cdot 19 \approx 0,377\cdot 19 \approx 7,17 \text{ л}.$$

Ответ: 7,17 л.

9. (*С 9-го класса.*) Из полного бака, содержащего 729 кг кислоты, отлили a кг кислоты и долили бак водой. После перемешивания снова отлили a кг раствора и долили бак водой. После шестикратного повторения процедуры раствор в баке стал содержать 64 кг кислоты. Сколько килограммов раствора отливали каждый раз?

Ответ: 243 кг.

10. (*С 9-го класса.*) Сколько килограммов чистого спирта останется в сосуде, если из 50 кг 80%-го водного раствора спирта 20 раз отлили по 1 кг раствора, каждый раз добавляя 1 кг воды?

Решение. Применим формулу $\alpha_n = \dfrac{0,01p(A-a)^n}{A^n}$, где $A = 50$, $p = 80$, $n = 20$. Получим:

$$\alpha_{20} = \frac{80\cdot(50-1)^{20}}{100\cdot 50^{20}} = 0,8\cdot 0,98^{20} = 0,8\cdot 0,68 = 0,534.$$

Найдем массу спирта: $m = \alpha_n \cdot M = 0,534 \cdot 50 \approx 26,7$ кг.

Ответ: 26,7 кг.

Задачи на повышение концентрации

1. (*С 6-го класса.*) Сплав массой 36 кг содержит 45% меди. Сколько меди нужно добавить, чтобы новый сплав содержал 60% меди?

Решение. 45% — это 0,45,

$36 \cdot 0,45 = 16,2$ кг меди содержится в данном сплаве.

Пусть масса меди, которую надо добавить в сплав, равна x кг, тогда $(36 + x)$ кг — масса сплава после добавления меди, а масса меди в новом сплаве $(16,2 + x)$ кг. Зная, что медь в новом сплаве составила 60%, составим и решим уравнение: $16,2 + x = (36 + x) \times$ $\times$ 0,6, $0,4x = 5,4$, откуда $x = 13,5$.

Ответ: 13,5 кг.

2. (*С 7-го класса.*) 40 кг солевого раствора разлили в два сосуда так, что во втором сосуде оказалось на 2 кг соли больше, чем в первом сосуде. Если во второй сосуд добавить 1 кг соли, то масса соли в нем будет в 2 раза больше, чем в первом сосуде. Найдите массу раствора, находящегося в первом сосуде.

Решение. Пусть доля соли в исходном растворе равна α, а в первом сосуде было x кг раствора, во втором — y кг. Тогда в первом

сосуде содержалось αx кг соли, а во втором — αy кг соли. Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y=40, \\ \alpha y-\alpha x=2, \\ \alpha y+1=2\alpha x, \end{cases} \quad \begin{cases} y=40-x, \\ \alpha y=\alpha x+2, \\ \alpha y=2\alpha x-1, \end{cases} \quad \begin{cases} y=40-x, \\ \alpha x=3, \\ \alpha y=5, \end{cases} \quad \begin{cases} y=40-x, \\ \dfrac{y}{x}=\dfrac{5}{3}, \end{cases}$$

откуда получим: $40-x=\dfrac{5}{3}x$, $\dfrac{8}{3}x=40$, то есть $x=15$.

Ответ: 15 кг.

3. (*С 7-го класса.*) Сплав меди с серебром содержит серебра на 1845 г больше, чем меди. Если к нему добавить $\dfrac{1}{3}$ массы серебра, содержащегося в сплаве, то получится новый сплав, содержащий 83,5% серебра. Какова масса сплава и процентное содержание серебра в нем?

Решение. Пусть в сплаве содержится x г серебра. Заполним таблицу по условию задачи:

		m, г	M, г	α (серебра)
1-й сплав	серебро	x	$2x-1845$	$\dfrac{x}{2x-1845}$
	медь	$x-1845$		
2-й сплав	серебро	$x+\dfrac{1}{3}x$	$2\dfrac{1}{3}-1845$	83,5%, или 0,835
	медь	$x-1845$		

Составим и решим уравнение:

$$\frac{x+\frac{1}{3}x}{2\frac{1}{3}x-1845}=0,835, \quad \frac{4x}{7x-3\cdot 1845}=\frac{835}{1000}, \quad 4000x=5845x-3\cdot 1845\cdot 835,$$

$$x=\frac{3\cdot 1845\cdot 835}{1845}, \quad x=2505.$$

Масса сплава: $2\cdot 2505-1845=3165$ г.

Процентное содержание серебра в сплаве: $\dfrac{2505}{3165}\cdot 100\approx 79,1\%$.

Ответ: 3165 г, 79,1%.

4. (*С 7-го класса.*) Сплав меди и цинка содержал меди на 640 г больше, чем цинка. После того как из сплава выделили $\dfrac{6}{7}$ содержащейся в нем меди и 60% цинка, масса сплава оказалась равной 200 г. Какова была масса исходного сплава?

Решение: Пусть в сплаве было x г цинка и $(x + 640)$ г меди. Зная, что в сплаве осталась $\frac{1}{7}$ часть содержащейся в нем меди и 40%, или $\frac{2}{5}$ части, цинка, составим и решим уравнение:

$$\frac{1}{7}(x+640)+\frac{2}{5}x=200,\ 19x = 3800,\ x = 200.$$

Значит, цинка было 200 г, а меди $(200 + 640) = 840$ г, и масса сплава $200 + 840 = 1040$ г, или 1 кг 40 г.

Ответ: 1 кг 40 г.

5. Слили два раствора серной кислоты и получили смесь массой 10 кг. Определите массу каждого раствора, вошедшего в смесь, если в первом растворе содержалось 800 г серной кислоты, а во втором — 600 г, концентрация первого раствора была на 10% больше, чем концентрация второго раствора.

Решение. Заполним таблицу по условию задачи:

	M, кг	m, кг	α
1-й раствор	x	0,8	$\frac{0,8}{x}\cdot 100\%$
2-й раствор	y	0,6	$\frac{0,6}{y}\cdot 100\%$
Смесь	10	1,4	

Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y=10, \\ \frac{80}{x}-\frac{60}{y}=10, \end{cases} \begin{cases} x+y=10, \\ 8y-6x=xy, \end{cases} \begin{cases} y=10-x, \\ 8(10-x)-6x=x(10-x). \end{cases}$$

Решим полученное уравнение системы:

$$x^2 - 24x + 80 = 0,\ x_1 = 4,\ x_2 = 20.$$

x_2 не удовлетворяет условию задачи $(x < 10)$.

Значит, первый раствор имел массу 4 кг, а второй $10 - 4 = 6$ кг.

Ответ:4 кг и 6 кг.

6. (*С 8-го класса.*) Имеется два сплава меди. Содержание меди в первом сплаве на 40% меньше, чем во втором. Из них получили новый сплав, содержащий 36% меди. Определите содержание меди в исходных сплавах, если известно, что в первом было 6 кг меди, а во втором — 12 кг.

Решение. Заполним таблицу по условию задачи:

	m, кг	α	M, кг
1-й сплав	6	x%, или $0{,}01x$	$\frac{6}{0{,}01x}$
2-й сплав	12	$(x+40)$%, или $0{,}01(x+40)$	$\frac{12}{0{,}01(x+40)}$
Смесь	18	36%, или 0,36	$\frac{18}{0{,}36}$

Составим и решим уравнение:

$$\frac{18}{0{,}36}=\frac{6}{0{,}01x}+\frac{12}{0{,}01(x+40)},\quad \frac{1}{12}=\frac{1}{x}+\frac{2}{x+40},\quad x^2+4x-480=0.$$

$$\frac{D}{4}=4+480=484.\quad x_{1;2}=-2\pm 22,\ x_1=20,\ x_2=-24.$$

x_2 не удовлетворяет условию задачи ($x>0$).

Значит, в первом сплаве было 20% меди, а во втором — 60%.

Ответ: 20%, 60%.

7. (*С 8-го класса.*) В сплаве олова и меди содержалось 11 кг меди. После того как в сплав добавили 7,5 кг олова, концентрация олова повысилось на 33%. Какова первоначальная масса сплава?

Решение. Пусть первоначальная масса сплава x кг, в нем содержалось 11 кг меди и $(x-11)$ кг олова. Заполним таблицу по условию задачи:

	M, кг	m (олова), кг	α, %
Было	x	$x-11$	$\frac{x-11}{x}\cdot 100$
Стало	$x+7{,}5$	$x-11+7{,}5=$ $=x-3{,}5$	$\frac{x-3{,}5}{x+7{,}5}\cdot 100$

Составим и решим уравнение:

$$\frac{x-3{,}5}{x+7{,}5}\cdot 100-\frac{x-11}{x}\cdot 100=33,$$

$$100x(x-3{,}5)-100(x+7{,}5)(x-11)=33x(x+7{,}5),$$

$$22x^2+165x-5500=0.\ D=27\,225+484\,000=511\,225.$$

$$x_{1;2}=\frac{-165\pm 715}{44};\quad x_1=\frac{-165+715}{44}=12{,}5;$$

$x_2<0$, что не удовлетворяет условию задачи ($x>0$). Значит, первоначальная масса сплава 12,5 кг.

Ответ: 12,5 кг.

СОДЕРЖАНИЕ

Вступление 3
Различные способы решения задач 4
Задачи на понижение концентрации 8
Задачи на «высушивание» 12
Задачи на смешивание растворов разных концентраций 16
Задачи на переливание 24
Задачи на повышение концентрации 28