Единый государственный экзамен по математике профильного уровня

Приемы решения экономических задач и задач прикладного характера

Морозов В. В.

Москва, 2024

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 4
Банковский вклад 4
Задача 1. 4
Задача 2. 5
Задача 3. 6
Задача 4. 7
Задача 5. 8
Задача 6. 9
Банковский кредит 10
Аннуитетный платеж 10
Задача 7. 10
Задача 8. 11
Дифференцированный платеж 12
Задача 9. 12
Задача 10 13
Другие схемы платежей 14
Задача 11 14
Задача 12 15
Задача 13 17
Задача 14 18
Задача 15 18
Оптимизация процесса 20
Задача 16 20
Задача 17 21
Задача 18 23
Задача 19 24
Задача 20 25
Задача 21 26
Задача 22 27
Задача 23 28
Задача 24 29
Задача 25 31
Задача 26 32

Задача 27.....33
Задача 28.....37
Задача 29.....37
Задача 30.....38
Задача 31.....39
Задача 32.....40
Задача 33.....43
Задача 34.....44
Задача 35.....46
Задача 36.....47
Заключение.....51
Список формул.....53
Список таблиц.....56
Список иллюстраций.....57
Предметный указатель.....58
Список литературы.....59

ВВЕДЕНИЕ

Выпускникам общеобразовательных школ по понятным причинам хочется набрать как можно больше баллов на ЕГЭ по математике профильного уровня. В предлагаемой работе сделана попытка обзора экономических задач этого экзамена. Можно наблюдать использование короткого набора стандартных приемов решения таких задач, а значит у выпускников есть надежда набить руку на схожих задачах по экономике, и почти гарантированно получить 2 дополнительных заслуженных балла. Задачи по экономике (их иногда называют сложные задачи прикладного характера) можно условно разбить на группы:

- Банковский вклад
- Банковский кредит
  - Аннуитетный платеж[1]
  - Дифференцированный платеж[2]
  - Другие схемы платежей
- Оптимизация процессов

Рассмотрим примеры решения задач каждой из этих групп.

БАНКОВСКИЙ ВКЛАД

ЗАДАЧА 1[3].

Вклад планируется открыть на 4 года. Первоначально 1 января вносится целое число миллионов рублей. В конце каждого года вклад увеличивается на 8% по сравнению с его размером в начале года. В начале второго и 4 годов вносится дополнительно 2 и 3 миллиона рублей соответственно. Какую наибольшую сумму можно внести первоначально, если размер вклада после 4 лет не должен превышать 28 млн рублей?

Решение.

Построим математическую модель. Обозначим $p = 1.08; S -$ первоначальный вклад. В таблице представим динамику счета в течение 4 лет.

Таблица 1

Год	Вклад до начисления процентов	Вклад после внесения дополнительных сумм	Вклад в конце года после начисления процентов
0			S
1	S		Sp
2	Sp	$Sp + 2$	$(Sp + 2)p$
3	$(Sp + 2)p$		$(Sp + 2)p^2$
4	$(Sp + 2)p^2$	$(Sp + 2)p^2 + 3$	$((Sp + 2)p^2 + 3)p$

По условию задачи, вклад в конце четвертого года не превосходит 28 млн рублей. Поэтому

Формула 1

$$\big((Sp + 2)p^2 + 3\big)p \leq 28$$

[1] (РБК, 2021)
[2] (РБК, 2021)
[3] (Алексенцев, 2024)

Подставив данное значение p=1.08, получили неравенство

Формула 2

$$\left((1.08S+2)1.08^2+3\right)1.08 \le 28$$

Решаем неравенство.

Формула 3

$$\left((1.08S+2)1.08^2+3\right) \le \frac{28}{1.08} = \frac{7}{0.27}$$

$$(1.08S+2)1.08^2 \le \frac{700}{27} - 3 = \frac{700-81}{27} = \frac{619}{27}$$

$$1.08S+2 \le \frac{6190000}{27*108*108} = \frac{619*625}{27^3}$$

$$1.08S \le \frac{619*625-2*27^3}{27^3}$$

$$S \le \frac{619*625-2*27^3}{27^3*1.08} = \frac{34750900}{27^3*108} = \frac{347509*25}{27^4} = \frac{86.87725}{5.31441}$$

Заметим, что

Формула 4

$$16 \le \frac{86.87725}{5.31441} \le 17$$

$$16 \le \frac{8687725}{531441} \le 17 \text{ так как}$$

$$16*531441 \le 8687725 \le 17*531441$$

Итак, S целое и не превосходит 16.

Ответ. 16 млн.

ЗАДАЧА 2[4].

Иван Иванович помещает свои деньги в банк под проценты на два года. В первый год банк начисляет m% на вклад. После первого года Иван Иванович собирается доложить 5% от текущей суммы вклада. Во второй год банк начисляет n% годовых. Известно, что $n+m=20$. При каком значении n сумма вклада после двух лет будет максимальной?

Решение.

Построим математическую модель. Обозначим S – первоначальный вклад. Учтем, что $m=20-n$. В таблице представим динамику счета в течение 2 лет.

Таблица 2

Год	Вклад о начисления процентов	Вклад после внесения дополнительных сумм	Вклад в конце года после начисления процентов
1	S		$S\left(1+\frac{m}{100}\right)$
2	$S\left(1+\frac{m}{100}\right)$	$S\left(1+\frac{m}{100}\right)*1.05$	$S\left(1+\frac{m}{100}\right)*1.05\left(1+\frac{20-m}{100}\right)$

Вклад в конце года после начисления процентов принимает наибольшее значение.

Формула 5

$$S\left(1+\frac{m}{100}\right)*1.05\left(1+\frac{20-m}{100}\right) \to max$$

[4] (Алексенцев, 2024)

Оптимальное m не зависит от S.

Формула 6

$$\left(1+\frac{m}{100}\right)*1.05\left(1+\frac{20-m}{100}\right)\to max$$

После упрощения:

Формула 7

$$\left(1+\frac{m}{100}\right)*1.05\left(1.2-\frac{m}{100}\right)\to max$$

После замены

Формула 8

$$\frac{m}{100}=x, 0\le x\le 0.2$$

Задача сводится к поиску максимума функции

Формула 9

$$f(x)=(1+x)*1.05(1.2-x)\to max$$

или к поиску максимума функции

Формула 10

$$g(x)=(1+x)(1.2-x)=-x^2+0.2x+1.2\to max$$

В поиске экстремума обойдемся без дифференцирования. Графиком функции $y=f(x)$ является парабола, ветви которой направлены вниз (коэффициент перед квадратичным слагаемым отрицательный). Поэтому наибольшее значение функции достигается в вершине параболы. Находим абсциссу вершины параболы[5].

Формула 11

$$x_0=\frac{-0.2}{-2}=0.1\in[0;0.2]$$

Тогда

Формула 12

$$\frac{m}{100}=0.1; m=10; n=20-m=10$$

Вывод. Если банк будет начислять оба года 10%, то к концу второго года сумма вклада будет максимальной.

Ответ. n=10

ЗАДАЧА 3[6].

По вкладу «А» банк в конце каждого года планирует увеличивать на 10% сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» – увеличивать эту сумму на 8% в первый год и на одинаковое число n% и за второй, и за третий года. Найдите наименьшее значение n, при котором за три года хранения вклад «Б» окажется выгоднее вклада «А» при одинаковых суммах первоначальных взносов.

Решение.

Построим математическую модель. Обозначим S – первоначальный вклад. В таблице представим динамику счета в течение трех лет и по вкладу «А», и по вкладу «Б».

---

[5] (ЯКласс, 2022)

[6] (Алексенцев, 2024)

Таблица 3

Год	Вклад «А»		Вклад «Б»	
	Начало года	Конец года	Начало года	Конец года
1	S	$1{,}1S$	S	$1.08S$
2	$1{,}1S$	$1.21S$	$1.08S$	$1.08S\left(1+\frac{n}{100}\right)$
3	$1.21S$	$1.331S$	$1.08S\left(1+\frac{n}{100}\right)$	$1.08S\left(1+\frac{n}{100}\right)^2$

По условию задачи, вклад «Б» к концу 3 года должен быть выгоднее вклада «А».

Формула 13

$$1.331S < 1.08S\left(1+\frac{n}{100}\right)^2$$

После упрощения:

Формула 14

$$1331 < 1080\left(1+\frac{n}{100}\right)^2$$

$$\frac{1331}{1080} < \left(1+\frac{n}{100}\right)^2$$

Проверим истинность последнего неравенства при различных n

Таблица 4

n	$1+\frac{251}{1080}=\frac{1331}{1080}<\left(1+\frac{n}{100}\right)^2$	Истинность
1	$\frac{1331}{1080}<\frac{10201}{10000}=1.02?$	$False$
…	…	…
10	$\frac{1331}{1080}<1.1^2=1.21?$	$False$
11	$\frac{1331}{1080}<1.11^2=1.2321$	$False$
12	$\frac{1331}{1080}<1.12^2=1.2544$	$True$

Вывод. Наименьшее значение n, при котором за три года хранения вклад «Б» окажется выгоднее вклада «А» равно 12.

Ответ. 12

ЗАДАЧА 4[7].

Вклад планируется открыть на несколько лет. В конце каждого года вклад увеличивается на 8% по сравнению с его размером в начале года. Первоначально 1 января вносится 18 млн рублей. В начале второго года вносится дополнительно 2 млн рублей. На какое минимальное число лет можно открыть вклад, чтобы по истечении срока размер вклада был не менее 28 млн рублей?

Решение.

Представим динамику вклада в табличной форме.

[7] (Алексенцев, 2024)

Таблица 5

Год	Вклад к концу года
0	18
1	$18 * 1{,}08 = 19{,}44$
2	$21{,}44 * 1{,}08 = 23{,}1552$
3	$21{,}44 * 1{,}08^2 = 25{,}007616$
4	$21{,}44 * 1{,}08^3 = 27{,}00822528$
5	$21{,}44 * 1{,}08^4 = 29{,}1688833024$

Вывод. После 4 лет сумма вклада еще не достигла 28 млн рублей. После 5 лет сумма вклада превысила 29 млн рублей. Значит вклад нужно открывать на 5 лет.
Ответ. 5 лет.

ЗАДАЧА 5[8].

Вклад планируется открыть на пять лет. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года. В любое время можно снять часть суммы, однако процент за этот и следующие года составит 1%. Первоначально 1 января вносится целое число миллионов рублей. В начале второго и четвертого годов вносится дополнительно 1 и 4 млн рублей соответственно. В начале третьего или пятого годов (на выбор вкладчика) придется снять 5 млн рублей. Какую наименьшую сумму может внести вкладчик первоначально, если размер вклада после 5 лет должен превышать 28 млн рублей?

Решение.
Построим математическую модель. Обозначим S — первоначальный вклад. Заметим, что чем позже снять 5 млн рублей, тем больше окажется вклад через 5 лет. Учтем этот факт, представляя в таблице динамику счета за 5 лет.

Таблица 6

Год	Вклад в начале года	Вклад после внесения или снятия средств	Вклад после начисления процентов
0			S
1	S		$1.1S$
2	$1.1S$	$1.1S + 1$	$(1.1S + 1)1.1$
3	$(1.1S + 1)1.1$		$(1.1S + 1)1.21$
4	$(1.1S + 1)1.21$	$(1.1S + 1)1.21 + 4$	$((1.1S + 1)1.21 + 4)1.1$
5	$((1.1S + 1)1.21 + 4)1.1$	$((1.1S + 1)1.21 + 4)1.1 - 5$	$(((1.1S + 1)1.21 + 4)1.1 - 5) * 1.01$

По условию задачи, размер вклада после 5 лет должен превышать 28 млн рублей. Поэтому:

Формула 15

$$\Big(\big((1.1S + 1)1.21 + 4\big)1.1 - 5\Big) * 1.01 > 28$$

Обозначим p=1.1. Тогда

[8] (Алексенцев, 2024)

Формула 16

$$\left(\left((pS\ +1)p^2+4\right)p-5\right)*1.01>28$$

После упрощения получаем:

Формула 17

$$\left((p^3S+p^2+4)p-5\right)*1.01>28$$
$$(p^4S+p^3+4p-5)*1.01>28$$
$$1.01p^4S+1.01p^3+1.01*4p-5*1.01>28$$
$$1{,}478741*S+1{,}34431+4.444-5.05>28$$
$$1{,}478741*S+0.73831>28$$
$$1{,}478741*S>27{,}26169$$
$$S>\frac{27{,}26169}{1{,}478741}\approx\frac{54.5}{3}=18.43$$

При этом наименьшее возможное S=19.

Ответ. 19 млн рублей.

ЗАДАЧА 6[9].

Первого апреля Андрей Петрович положил 10 000 рублей на банковский вклад сроком на 1 год с ежемесячным начислением процентов и капитализацией под 21% годовых. Это означает, что первого числа каждого месяца сумма вклада увеличивается на одно и то же количество процентов, рассчитанное таким образом, что за 12 месяцев она увеличивается на 21%. Через сколько месяцев сумма вклада впервые превысит 11 000 рублей?

Решение.

О вкладах с капитализацией можно прочесть здесь[10]. Построим математическую модель. Обозначим сумму вклада $10\ 000\ \text{р} = S$. Ежемесячную процентную ставку обозначим р. Тогда сумма вклада через год составит:

Формула 18

$$S\left(1+\frac{p}{100}\right)^{12}=S*1.21$$

Упрощаем:

Формула 19

$$\left(1+\frac{p}{100}\right)^{6}=1.1$$
$$\frac{p}{100}=1.1^{\frac{1}{6}}-1$$
$$p=100*\left(1.1^{\frac{1}{6}}-1\right)$$

За k месяцев сумма вклада составит

Формула 20

$$10000\left(1+\frac{p}{100}\right)^{k}=10\ 000*1.1^{\frac{k}{6}}$$

По условию задачи сумма вклада за k месяцев должна превзойти 11 000 рублей:

---

[9] (Гущин, 2024)

[10] (ВТБ, 2023)

Формула 21

$$10000\left(1+\frac{p}{100}\right)^{k}=10\,000*1.1^{\frac{k}{6}}>11000$$
$$\left(1+\frac{p}{100}\right)^{k}=1.1^{\frac{k}{6}}>1.1^{1}$$
$$k>6$$

Вывод. Через 7 месяцев сумма вклада впервые превысит 11 000 рублей.
Ответ. 7.

БАНКОВСКИЙ КРЕДИТ

АННУИТЕТНЫЙ ПЛАТЕЖ[11]

ЗАДАЧА 7[12].

Для покупки автомашины Сергей скопил 2 780 000 рублей, поэтому недостающую сумму он взял в банке в кредит под 25% годовых на 3 года. Выплачивать кредит он должен аннуитетными платежами (заемщик каждый год выплачивает одну и ту же сумму, основная часть аннуитетного платежа – проценты, остальные – долг). Сколько процентов от стоимости машины Сергею не хватало на ее приобретение, если известно, что он переплатил по кредиту 655 000 рублей?

Решение.
Построим математическую модель. Обозначим S – сумма кредита, x – ежегодные выплаты банку. Динамика дога представлена в таблице.

Таблица 7

Год	*Долг до начисления %*	*Долг после начисления %*	*Выплаты банку*	*Долг после выплаты*
0				S
1	S	$\frac{5}{4}S$	x	$\frac{5}{4}S-x$
2	$\frac{5}{4}S-x$	$\left(\frac{5}{4}S-x\right)*\frac{5}{4}$	x	$\left(\frac{5}{4}S-x\right)*\frac{5}{4}-x$
3	$\left(\frac{5}{4}S-x\right)*\frac{5}{4}-x$	$\left(\left(\frac{5}{4}S-x\right)*\frac{5}{4}-x\right)*\frac{5}{4}$	x	0

Поскольку через 3 года кредит должен быть погашен полностью (красные ячейки равны), то получаем уравнение:

Формула 22

$$\left(\left(\frac{5}{4}S-x\right)*\frac{5}{4}-x\right)*\frac{5}{4}-x=0$$

Упрощаем и решаем уравнение:

Формула 23

$$\left(\left(\frac{5}{4}\right)^{2}S-\frac{5}{4}x-x\right)*\frac{5}{4}-x=0$$

[11] (РБК, 2021)
[12] (Гущин, 2024)

$$\left(\frac{5}{4}\right)^3 S - \left(\frac{5}{4}\right)^2 x - \frac{5}{4}x - x = 0$$

$$\left(\frac{5}{4}\right)^3 S = x\left(\left(\frac{5}{4}\right)^2 + \frac{5}{4} + 1\right)$$

$$\left(\frac{5}{4}\right)^3 S = 4x\left(\frac{25 + 20 + 16}{16 * 4}\right)$$

$$125S = 4x * 61$$

$$x = \frac{125S}{4 * 61}$$

Заплатили банку за 3 года:

Формула 24

$$3x = \frac{375S}{244}$$

Переплата составила (655 тыс. рублей):

Формула 25

$$3x - S = \frac{375S}{244} - S = S\left(\frac{375 - 244}{244}\right) = S * \frac{131}{244} = 655 \text{ тыс}$$

Решая это уравнение, получаем:

Формула 26

$$S * \frac{131}{244} = 131 * 5 \text{ тыс}$$

$$S * \frac{1}{244} = 5 \text{ тыс}$$

$$S = 244 * 5 = 122 * 10 = 1220 \text{ тыс. рублей}$$

Тогда автомашина стоила

Формула 27

$$2780 + 1220 = 4000 \text{ тыс. рублей} = 4\,000\,000 \text{ рублей}$$

Найдем долю кредита в стоимости автомашины:

Формула 28

$$\frac{S}{4\,000} = \frac{1220}{4000} = \frac{122}{400} = \frac{61}{200} = \frac{30.5}{100} = 0.305 = 30.5\%$$

Ответ. 30,5%.

ЗАДАЧА 8[13].

Для покупки квартиры Алексею не хватало 1 209 600 рублей, поэтому в январе 2015 года он решил взять в банке кредит под 10% годовых на 2 года. Условия пользования кредитом таковы:

- раз в год 15 декабря банк начисляет на оставшуюся сумму долга проценты, то есть долг увеличивается на 10%;
- в период с 16 по 31 декабря Алексей обязан перевести в банк некоторый платеж в x рублей.

Чему должен быть равен x чтобы Алексей выплатил долг равными платежами?

---

[13] (Школково, 2023)

Решение.

Построим математическую модель. Пусть Алексей взял кредит $S = 1\,209\,600$ рублей, обозначим перевод в банк x рублей, r=1.1. Тогда динамика расчетов с банком может быть представлена в таблице.

Таблица 8

Год	*Долг до начисления %*	*Долг после начисления %*	*Выплаты банку*	*Долг после выплаты*
0				S
1	S	rS	x	$rS - x$
2	$rS - x$	$r(rS - x)$	x	$r(rS - x) - x = 0$

Поскольку после двух лет Алексей гасит кредит полностью, то

Формула 29

$$r(rS - x) - x = 0$$

Решаем уравнение.

Формула 30

$$r^2S = x(r + 1)$$

$$x = \frac{r^2S}{r + 1} = \frac{1.21 * 1\,209\,600}{2.1} = 696\,960$$

Вывод. Алексей делает два равных платежа по 696 960 рублей.

Ответ. 696 960.

ДИФФЕРЕНЦИРОВАННЫЙ ПЛАТЕЖ[14]

ЗАДАЧА 9[15].

15 января 2025 года планируется взять кредит в банке на сумму 900 тысяч рублей на 36 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 5% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по 35 (с февраля 2025 года по декабрь 2027 года включительно) долг должен быть на 20 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- 15 января 2028 года кредит должен быть полностью погашен.

Найдите общую сумму выплат после полного погашения кредита.

Решение.

Построим математическую модель. Обозначим суму кредита $S = 900$ тыс; $p = 1.05$; $a = 20$.

Представим динамику счета за 36 месяцев в табличной форме.

[14] (РБК, 2021)

[15] (Гущин, 2024)

Таблица 9

Месяц	*Долг до начисления %*	*Долг после начисления %*	*Выплаты банку*	*Долг после выплаты*
0				S
1	S	Sp	$Sp-(S-a)$	$S-a$
2	$S-a$	$(S-a)p$	$(S-a)p-(S-2a)$	$S-2a$
3	$S-2a$	$(S-2a)p$	$(S-2a)p-(S-3a)$	$S-3a$
4	$S-3a$	$(S-3a)p$	$(S-3a)p-(S-4a)$	$S-4a$
5	$S-4a$	$(S-4a)p$	$(S-4a)p-(S-5a)$	$S-5a$
			…	
35	$S-34a$	$(S-34a)p$	$(S-34a)p-(S-35a)$	$S-35a$
36	$S-35a$	$(S-35a)p$	$(S-35a)p$	0

В таблице ячейки, которые требуется суммировать для получения суммарной выплаты. Для удобства суммирования некоторые значения показаны красным, зеленым, синим и черным цветами. Суммарные выплаты:

Формула 31

$$36Sp-ap(1+2+3+\cdots+35)-35S+a(1+2+3+\cdots+35)=\cdots$$

Используем формулу суммы арифметической прогрессии[16].

Формула 32

$$\ldots=36Sp-ap(18*35)-35S+a(18*35)=\cdots$$

Подставляем известные значения:

Формула 33

$$\begin{gathered}\ldots=36*900*1.05-20*1.05(630)-35*900+20(630)=\\=36*9*105-2*105*63-35*900+20(630)=\\=34020-13230-31500+12600=1890\text{ тыс}=1{,}890\text{ млн}\end{gathered}$$

Вывод. Суммарные выплаты составят 1,89 млн рублей.

Ответ. 1,89 млн рублей.

ЗАДАЧА 10[17].

15 декабря планируется взять кредит в банке на 21 месяц. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по 20-й долг должен быть на 30 тыс. рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- к 15-му числу 21-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма выплат после полного его погашения составит 1 604 тысячи рублей?

Решение.

Построим математическую модель. Обозначим $1.03=k, 30\text{ тыс. рублей}=a$.

Динамика долга представлена в таблице.

---

[16] (Skysmart, 2019)

[17] (Гущин, 2024)

Таблица 10

Месяц	*Начислены %, 1 число*	*Выплаты банку, 2 число*	*Долг после выплаты, 15 число*
0			S
1	kS	$kS-(S-a)$	$S-a$
2	$k(S-a)$	$k(S-a)-(S-2a)$	$S-2a$
3	$k(S-2a)$	$k(S-2a)-(S-3a)$	$S-3a$
4	$k(S-3a)$	$k(S-3a)-(S-4a)$	$S-4a$
5	$k(S-4a)$	$k(S-4a)-(S-5a)$	$S-5a$
…	…	…	…
20	$k(S-19a)$	$k(S-19a)-(S-20a)$	$S-20a$
21	$k(S-20a)$	$k(S-20a)$	0

По условию задачи, суммарные выплаты банку составили 1 604 тыс. рублей:

Формула 34

$$1\,604 = 21kS - 21S - ka(1+2+3+\cdots+20) + a(1+2+3+\cdots+21) = \cdots$$

Упрощаем:

Формула 35

$$\ldots = 21S*0.03 - ka\left(\frac{1+20}{2}*20\right) + a\left(\frac{1+21}{2}*21\right) =$$
$$= 21S*0.03 - ka(210) + a(11*21) =$$
$$= 21S*0.03 + S - 21a - ka(210) + a(11*21)$$
$$1.63S - 189 = 1604$$
$$1.63S = 1793$$

Решаем уравнение:

Формула 36

$$S = \frac{1793}{1.63} = 1100$$

Вывод. Планируется взять в кредит 1 100 тыс. рублей=1,1 млн рублей.

Ответ. 1,1 млн рублей.

ДРУГИЕ СХЕМЫ ПЛАТЕЖЕЙ

ЗАДАЧА 11[18].

В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на 600 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

- в январе 2026, 2027 и 2028 годов долг возрастает на R% по сравнению с концом предыдущего года;
- в январе 2029, 2030 и 2031 годов долг возрастает на 15% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июнь предыдущего года;
- к июлю 2031 года долг должен быть полностью погашен.

Чему равно R, если общая сумма выплат составит 930 тыс. рублей?

[18] (Гущин, 2024)

Решение.

Построим математическую модель. Обозначим сумму вклада $S = 600,\ \ q = 1.15$. Обозначим $r = 1 + \frac{R}{100}$. Представим динамику счета в табличной форме.

Таблица 11

Год	Долг до начисления %	Долг после начисления %	Выплата банку	Долг после выплаты
2025				S
2026	S	rS	$\frac{6rS}{6} - \frac{5S}{6}$	$\frac{5S}{6}$
2027	$\frac{5S}{6}$	$\frac{5rS}{6}$	$\frac{5rS}{6} - \frac{4S}{6}$	$\frac{4S}{6}$
2028	$\frac{4S}{6}$	$\frac{4rS}{6}$	$\frac{4rS}{6} - \frac{3S}{6}$	$\frac{3S}{6}$
2029	$\frac{3S}{6}$	$\frac{3qS}{6}$	$\frac{3qS}{6} - \frac{2S}{6}$	$\frac{2S}{6}$
2030	$\frac{2S}{6}$	$\frac{2qS}{6}$	$\frac{2qS}{6} - \frac{S}{6}$	$\frac{S}{6}$
2031	$\frac{S}{6}$	$\frac{qS}{6}$	$\frac{qS}{6}$	0
Всего			930	

Общая сумма выплат составит (отдельно складываем красные, зеленые и синие слагаемые):

Формула 37

$$\frac{15rS}{6} + Sq - \frac{S}{6}(1 + \cdots + 5) = \frac{19rS}{6} + Sq - \frac{5S}{2} = 930$$

Подставим в равенство известные числа и решим уравнение.

Формула 38

$$15 * r * 100 + 600 * 1.15 - 5 * 300 = 930$$
$$1500r = 930 + 1500 - 6 * 115$$
$$1500r = 1740$$
$$r = \frac{174}{150} = \frac{58}{50} = \frac{116}{100} = 1.16; \quad R = 16\%$$

Вывод. Искомая процентная ставка в первые годы составит 16%.

Ответ. 16.

ЗАДАЧА 12[19].

В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на сумму 800 тыс. рублей на 10 лет. Условия его возврата таковы:

- в январе 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг возрастает на 18% по сравнению с концом предыдущего года;
- в январе 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов долг возрастает на 16% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга;

[19] (Гущин, 2024)

- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июнь предыдущего года;
- к июлю 2035 года долг должен быть полностью погашен.

Найдите общую сумму выплат после полного погашения кредита.

Решение.

Построим математическую модель. Обозначим сумму кредита $S = 800, p = 1.18;$ $q = 1.16$. Тогда динамика счета может быть представлена в табличной форме. Красным цветом показаны выплаты после начисления 18%, синим цветом показаны выплаты после начисления 16%.

Таблица 12

Год	Долг до начисления %	Долг после начисления %	Выплата банку	Долг после выплаты
2025				S
2026	S	pS	$\frac{p10S}{10} - \frac{9S}{10}$	$\frac{9S}{10}$
2027	$\frac{9S}{10}$	$\frac{9Sp}{10}$	$\frac{9Sp}{10} - \frac{8S}{10}$	$\frac{8S}{10}$
2028	$\frac{8S}{10}$	$\frac{8Sp}{10}$	$\frac{8Sp}{10} - \frac{7S}{10}$	$\frac{7S}{10}$
2029	$\frac{7S}{10}$	$\frac{7Sp}{10}$	$\frac{7Sp}{10} - \frac{6S}{10}$	$\frac{6S}{10}$
2030*	$\frac{6S}{10}$	$\frac{6Sp}{10}$	$\frac{6Sp}{10} - \frac{5S}{10}$	$\frac{5S}{10}$
2031	$\frac{5S}{10}$	$\frac{5Sq}{10}$	$\frac{5Sq}{10} - \frac{4S}{10}$	$\frac{4S}{10}$
2032	$\frac{4S}{10}$	$\frac{4Sq}{10}$	$\frac{4Sq}{10} - \frac{3S}{10}$	$\frac{3S}{10}$
2033	$\frac{3S}{10}$	$\frac{3Sq}{10}$	$\frac{3Sq}{10} - \frac{2S}{10}$	$\frac{2S}{10}$
2034	$\frac{2S}{10}$	$\frac{2Sq}{10}$	$\frac{2Sq}{10} - \frac{S}{10}$	$\frac{S}{10}$
2035	$\frac{S}{10}$	$\frac{Sq}{10}$	$\frac{qS}{10}$	0
			$\sum = ?$	

Найдем суммарную выплату.

Формула 39

$$\sum = 4Sp + 1.5Sq - \frac{S}{10}(1 + 2 + \cdots + 9) = 4Sp + 1.5Sq - 4.5S =$$
$$= S(4p + 1.5q - 4.5) = 800(4 * 1.18 + 1.5 * 1.16 - 4.5) = 1568 \text{ тыс. рублей.}$$

Ответ. 1,568 млн рублей.

ЗАДАЧА 13[20].

В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на 5 лет в размере S тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в январе 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг возрастает на 18% по сравнению с концом предыдущего года;
- в июле 2017, 2018 и 2019 годов долг остается равным S тыс. рублей;
- выплаты в 2020 и 2021 годах равны по 360 тыс. рублей;
- к июлю 2021 года долг будет выплачен полностью.

Найдите общую сумму выплат за 5 лет.

Решение.

Построим математическую модель. Обозначим $1.2 = p$. Динамика счета представлена в таблице.

Таблица 13

Год	Долг до начисления %	Долг после начисления %	Выплаты банку	Долг после выплаты
2016				S
2017	S	Sp	$Sp - S = S(1-p) = 0{,}2S$	S
2018	S	Sp	$Sp - S = 0.2S$	S
2019	S	Sp	$Sp - S = 0.2S$	S
2020	S	Sp	360	$Sp - 360$
2021	$Sp - 360$	$(Sp - 360)p$	360	0

Поскольку в 2021 году кредит должен быть погашен полностью (красные ячейки равны), то получаем уравнение:

Формула 40

$$(Sp - 360)p = 360$$

Подставляем известное p=1,2 и решаем уравнение.

Формула 41

$$(1{,}2S - 360)1{,}2 = 360$$
$$1{,}2S - 360 = 300$$
$$1{,}2S = 660$$
$$S = 550$$

Находим общую сумму выплат.

Формула 42

$$0.6S + 720 = 0.6 * 550 + 720 = 55 * 6 + 720 = 330 + 720 = 1050 \text{ тыс. рублей.}$$

Вывод. Общая сумма выплат составит 1,05 млн рублей.

Ответ. 1,05 млн рублей.

[20] (Гущин, 2024)

ЗАДАЧА 14[21].

В июле 2026 года планируется взять кредит на 3 года. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- платежи в 2027 и 2028 годах должны быть по 500 тыс. рублей;
- к июлю 2029 года долг будет выплачен полностью.

Известно, что сумма всех платежей после полного погашения кредита равна 1235,2 тыс. рублей. Какую сумму требуется взять в кредит?

Решение.

Построим математическую модель. Обозначим сумму кредита S тыс. рублей, $p = 1.18$. Динамику долга представим в таблице.

Таблица 14

Год	Долг после начисления %	Выплаты банку	Долг после выплат
2026			S
2027	$1.2S$	500	$1.2S - 500$
2028	$(1.2S - 500)1.2$	500	$(1.2S - 500)1.2 - 500$
2029	$\big((1.2S - 500)1.2 - 500\big)1.2$	235.2	0

По условию задачи третьим платежом выплатили весь долг, (красные ячейки таблицы равны) поэтому

Формула 43

$$\big((1.2S - 500)1.2 - 500\big)1.2 = 235.2$$

Решаем полученное уравнение.

Формула 44

$$\begin{gathered}\big((1.2S - 500)1.2 - 500\big)12 = 2352\\ (1.2S - 500)1.2 - 500 = 196\\ (1.2S - 500)1.2 = 696\\ (1.2S - 500)12 = 6960\\ 1.2S - 500 = 580\\ 1.2S = 1080\\ 6S = 5400\\ S = 900\end{gathered}$$

Вывод. Требуется взять в кредит сумму 900 тыс. рублей.

Ответ. 900 тыс.

ЗАДАЧА 15[22].

15-го декабря планируется взять кредит в банке на сумму 900 тыс. рублей на 11 месяцев. Условия его возврата таковы:

[21] (4ЕГЭ, 2024)

[22] (Гущин, 2024)

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на r% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по 10-й долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- 15-го числа 10-го месяца долг составит 200 тыс. рублей;
- К 15-му числу 11-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Найдите r, если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1 021 тысячу рублей.

Решение.

Составим математическую модель. Обозначим сумму кредита $S = 900$, и $1 + \frac{r}{100} = q$,

Обозначим $\frac{S-200}{10} = A = 70$.

Представим динамику долга в таблице.

Таблица 15

Месяц	Долг после начисления процентов	Выплаты банку	Долг после выплаты банку
Декабрь			$S = 10\left(\frac{S-200}{10}\right) + 200$
Январь 1	qS	$qS - 9A - 200 = ?$ $= q(10A + 200) - 9A - 200$	$9\left(\frac{S-200}{10}\right) + 200$
Февраль 2	$q\left(9\left(\frac{S-200}{10}\right) + 200\right)$	$q(9A + 200) - 8A - 200$	$8\left(\frac{S-200}{10}\right) + 200$
Март 3	$q\left(8\left(\frac{S-200}{10}\right) + 200\right)$	$q(8A + 200) - 7A - 200$	$7\left(\frac{S-200}{10}\right) + 200$
Апрель 4	$q\left(7\left(\frac{S-200}{10}\right) + 200\right)$	$q(7A + 200) - 6A - 200$	$6\left(\frac{S-200}{10}\right) + 200$
Май 5	$q\left(6\left(\frac{S-200}{10}\right) + 200\right)$	$q(6A + 200) - 5A - 200$	$5\left(\frac{S-200}{10}\right) + 200$
Июнь 6	$q\left(5\left(\frac{S-200}{10}\right) + 200\right)$	$q(5A + 200) - 4A - 200$	$4\left(\frac{S-200}{10}\right) + 200$
Июль 7	$q\left(4\left(\frac{S-200}{10}\right) + 200\right)$	$q(4A + 200) - 3A - 200$	$3\left(\frac{S-200}{10}\right) + 200$
Август 8	$q\left(3\left(\frac{S-200}{10}\right) + 200\right)$	$q(3A + 200) - 2A - 200$	$2\left(\frac{S-200}{10}\right) + 200$
Сентябрь 9	$q\left(2\left(\frac{S-200}{10}\right) + 200\right)$	$q(2A + 200) - A - 200$	$\left(\frac{S-200}{10}\right) + 200$
Октябрь 10	$q\left(\left(\frac{S-200}{10}\right) + 200\right)$	$q(A + 200) - 200$	200
Ноябрь 11	$200q$	$200q$	0

Общая сумма выплат составит

Формула 45

$$q(A + 2A + \cdots + 10A) + 200q * 10 + 200q - (A + 2A + 3A + \cdots + 9A) - 200 * 10$$

По условию, общая сумма выплат 1021 тыс. рублей. Поэтому, используя формулу суммы арифметической прогрессии[23], получаем:

Формула 46

$$1021 = qA\left(\frac{1+10}{2} * 10\right) + 200q * 11 - A\left(\frac{1+9}{2} * 9\right) - 200 * 10$$

Решаем полученное уравнение.

Формула 47

$$1021 = 55qA + 200q * 11 - 45A - 2000$$
$$1021 = 55q * 70 + 200q * 11 - 45 * 70 - 2000$$
$$3850q + 2200q = 6171$$
$$6050q = 6171$$
$$q = \frac{6171}{6050} = 1\frac{121}{6050} = 1\frac{11}{550} = 1\frac{1}{50} = 1.02 = 1 + \frac{r}{100}$$

Таким образом, $r = 2\%$.

Ответ. 2.

ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА

ЗАДАЧА 16[24].

Иннокентий является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые станки, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно $9t^3$ часов в неделю, то за эту неделю они производят t станков; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^3 часов в неделю, то за эту неделю они производят t станков. За каждый час работы на каждом из заводов Иннокентий платит рабочему *400* рублей. Необходимо, чтобы за неделю суммарно производилось *20* станков. Какую наименьшую сумму в миллионах рублей придется тратить владельцу заводов еженедельно на оплату труда рабочих?

Решение.

Построим математическую модель.

Таблица 16

	Количество произведенных станков	количество человеко-часов	Затраты на зарплату, р
1й завод	a	$9a^3$	$400 * 9a^3$
2й завод	$b = 20 - a$	b^3	$400b^3$
Всего	$a + b = 20$		$400 * 9a^3 + 400b^3$

Формула 48

$$400 * f(a) = 400 * 9a^3 + 400(20 - a)^3 \to min$$
$$\text{По условию задачи: } a \in [0; 20], a \in \mathbb{Z}$$

Найдем наименьшее значение функции f(a) на отрезке [0;20]. Обозначим:

Формула 49

$$f(a) = 9a^3 + (20 - a)^3 \to min$$

[23] (Skysmart, 2019)

[24] (Алексенцев, 2024)

Используем классический алгоритм поиска экстремума функции на отрезке[25]. Функция f(a) дифференцируема в области определения[26].

Формула 50

$$f'(a) = 27a^2 - 3(20-a)^2 = 3\big(3a-(20-a)\big)(3a+20-a) =$$
$$= 3(4a-20)(2a+20) = 3*4*2(a-5)(a+10) = 16(a-5)(a+10)$$

Очевидно, что, если $a \in [0;5)$, то $f' < 0$, поэтому f убывает на отрезке $[0;5)$. Если $a \in (5;20]$, то $f' > 0$, поэтому f возрастает на отрезке $(5;20]$. Значит, при a=5 затраты на заработную плату минимальны. Найдем эти затраты.

Формула 51

$$400 * f(5) = 400 * 9 * 125 + 400 * 15^3 = 450000 + 1350000 = 1\,800\,000$$

Ответ. 1,8 млн рублей.

ЗАДАЧА 17[27].

Андрей владеет двумя заводами. Если на заводе суммарно трудятся t^2 часов в неделю, то они производят t товаров. Заработная плата рабочего за час работы на первом заводе составляет 200 рублей, а на втором 300 рублей. Андрей хочет выделять на заработную плату рабочим в неделю 2,7 млн рублей и при этом получать наибольшее количество произведенных товаров. Определите, сколько в этом случае должно быть произведено товаров на каждом заводе.

Решение.

Построим математическую модель.

Таблица 17

	Деталей произведено	Человеко-часов	Выделено на заработную плату
1й завод	a	a^2	$200a^2$
2й завод	b	b^2	$300b^2$
всего	$a+b$		$200a^2 + 300b^2 = 2\,700\,000$

Требуется найти наибольшее значение выражения

Формула 52

$$a + b \to max$$

при выполнении условия

Формула 53

$$200a^2 + 300b^2 = 2\,700\,000$$

Выразим одну переменную через другую:

Формула 54

$$2a^2 + 3b^2 = 27\,000$$
$$b^2 = 9\,000 - \frac{2}{3}a^2$$
$$b = \sqrt{9000 - \frac{2}{3}a^2}$$

---

[25] (Фихтенгольц, 2001)

[26] Производную находим, используя дифференцирование степенной функции и дифференцирование композиции функций. Также работают формулы сокращенного умножения.

[27] (Школково, 2023)

Определим возможный диапазон для переменной a.

Формула 55

$$\frac{2}{3}a^2 \le 9000 \to 2a^2 \le 27\,000 \to a^2 \le 13\,500$$

$$a \in [0; 10\sqrt{135}]$$

Целевая функция принимает вид

Формула 56

$$f(a) = a + b = a + \sqrt{9000 - \frac{2}{3}a^2} \to max$$

Найдем наибольшее значение[28] этой функции на отрезке $[0; 10\sqrt{135}]$. Найдем производную целевой функции.

Формула 57

$$f'(a) = 1 - \frac{4a}{2 * 3\sqrt{9000 - \frac{2}{3}a^2}} = 1 - \frac{2a}{3\sqrt{9000 - \frac{2}{3}a^2}}$$

Найдем критические точки, принадлежащие отрезку $[0; 10\sqrt{135}]$.

Формула 58

$$f'(a) = 0 \leftrightarrow 3\sqrt{9000 - \frac{2}{3}a^2} = 2a$$

$$9000 - \frac{6}{9}a^2 = \frac{4}{9}a^2$$

$$9000 = \frac{10}{9}a^2$$

$$8100 = a^2 \to a = 90 \in [0; 10\sqrt{135}]$$

Найдем промежутки монотонности функции.

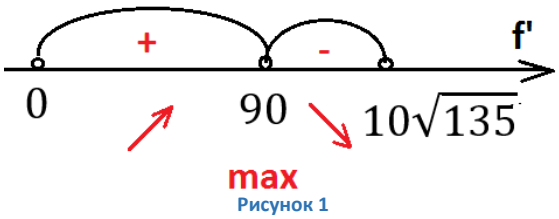


Рисунок 1

Итак, наибольшее значение функции достигается при a=90, тогда

Формула 59

$$b = \sqrt{9000 - \frac{2}{3} * 90^2} = \sqrt{9000 - 5400} = \sqrt{3600} = 60$$

Вывод. Наибольшее количество товаров достигается при a=90 (количество товаров, произведенных на первом заводе) и при b=60 (количество товаров, произведенных на втором заводе). Всего будет произведено 150 единиц товара.

Ответ. 90 единиц товара должно быть произведено на первом заводе и 60 единиц товара должно быть произведено на втором заводе.

[28] (Фихтенгольц, 2001)

ЗАДАЧА 18[29].

В прямоугольной комнате площадью 42 м^2 требуется установить плинтусы по всему периметру. Стоимость 1 м плинтуса составляет 280 р. При каких целых линейных размерах комнаты в метрах затраты на покупку плинтуса будут наименьшими?

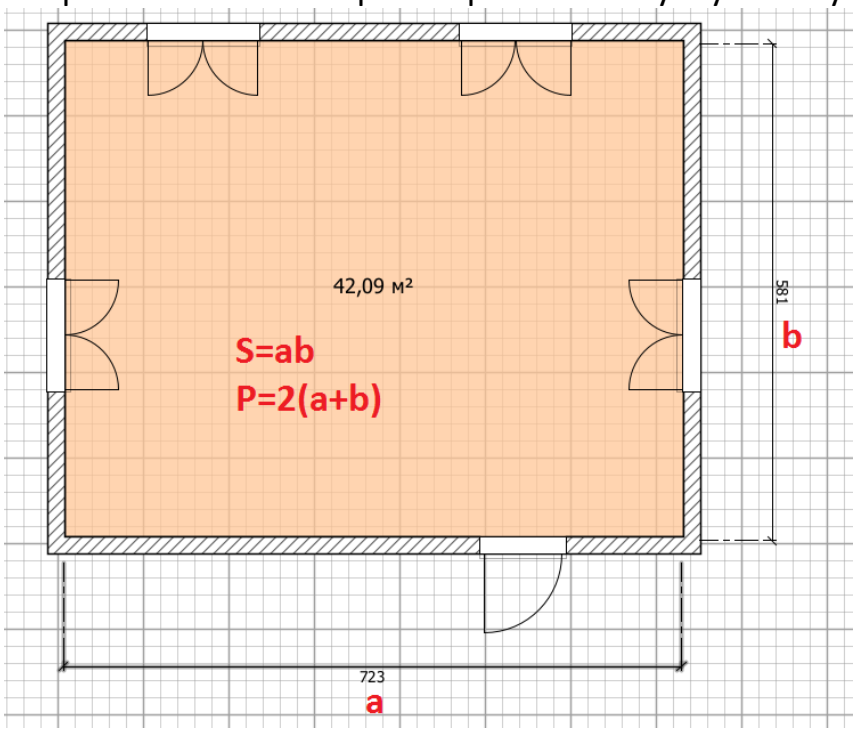




Рисунок 2

Построим математическую модель. Выразим площадь и периметр комнаты через стороны a и b.

Формула 60

$$S = ab = 42$$
$$P = 2(a + b) \to min$$

Выразим одну переменную через другую:

Формула 61

$$b = \frac{42}{a}$$

Тогда целевая функция принимает вид:

Формула 62

$$P = 2(a + b) = 2a + \frac{84}{a} \to min$$

Определим возможный диапазон для переменной a. Очевидно, что a>0. Вместе с тем a может быть сколь угодно большой. Поэтому

Формула 63

$$a \in (0;\ +\infty)$$

Найдем наибольшее значение[30] этой функции на интервале $(0;\ +\infty)$. Найдем производную целевой функции.

Формула 64

$$P'(a) = 2 - \frac{84}{a^2}$$

Найдем критические точки целевой функции.

[29] (Школково, 2023)
[30] (Фихтенгольц, 2001)

Формула 65

$$P' = 0 \to a^2 = 42; a = \sqrt{42}$$

Если $a \in (0; \sqrt{42})$, то $P'(a) < 0$, поэтому P убывает на нтервале $(0; \sqrt{42})$. Если $a > \sqrt{42}$, то $P'(a) > 0$, поэтому P возрастает на промежутке $(\sqrt{42}; +\infty)$.
Следовательно при $a = \sqrt{42}$ периметр наименьший. По условию задачи размеры комнаты должны быть целыми. Наиболее близкие к $\sqrt{42}$ целые значения a – это 6 и 7.

Таблица 18

a	b	P
6	7	$2(6+7) = 26$
7	6	

Ответ. 6 и 7.

ЗАДАЧА 19[31].

Часть денег от суммы 400 млн рублей размещена в банке под 12% годовых, а другая часть инвестирована в производство. При этом через год эффективность инвестирования ожидается в размере 250%, то есть вложенная в производство сумма x млн рублей оборачивается в капитал 2.5x млн рублей. После этого отчисляются деньги на издержки производства, которые задаются квадратичной зависимостью $0.0022x^2$ млн рублей. Разность между капиталом и издержками в производстве облагается налогом в 20%.
Как распределить капитал между банком и производством, чтобы через год получить общую максимальную прибыль от размещения в банк и вложения денег в производство? Сколько млн рублей составит эта прибыль?

Решение.
Построим математическую модель. Обозначим x млн – сумма, вложенная в производство. Тогда в банк будет вложено $400 - x$ млн. Полученные средства через год приведем в таблице:

Таблица 19

Банковский вклад, 12% годовых	Производство: 250%	За вычетом налога 20%
$1.12(400 - x)$	$x * 2.5 - 0.0022x^2$	$(x * 2.5 - 0.0022x^2)0.8$
Всего: $1.12(400 - x) + (x * 2.5 - 0.0022x^2)0.8$		

Прибыль (доход за вычетом вложений) выражается функцией:

Формула 66

$$f(x) = 1.12(400 - x) + (x * 2.5 - 0.0022x^2)0.8 - 400 =$$
$$= -0.00176x^2 + x(2 - 1.12) + 48 =$$
$$= -0.00176x^2 + 0.88x + 48$$

На этот раз в поиске экстремума обойдемся без дифференцирования. Графиком функции $y = f(x)$ является парабола, ветви которой направлены вниз (коэффициент перед квадратичным слагаемым отрицательный). Поэтому наибольшее значение функции достигается в вершине параболы. Находим абсциссу вершины параболы[32].

---

[31] (Школково, 2023)
[32] (ЯКласс, 2022)

Формула 67

$$x_0 = \frac{-0.88}{-2 * 0.00176} = \frac{0.44}{0.00176} = \frac{44000}{176} = \frac{44 * 1000}{4 * 44} = 250$$

Найдем наибольшую прибыль

Формула 68

$$f(250) = 1.12(400 - 250) + (250 * 2.5 - 0.0022 * 62500)0.8 - 400 =$$
$$= 1.12 * 150 + 625(1 - 0.22) * 0.8 - 400 = 168 + 390 = 158$$

Итак, для достижения наибольшей прибыли 158 млн следует вложить в производство 250 млн и вложить в банк 150 млн.

Ответ. Наибольшая возможная прибыль 158 млн.

ЗАДАЧА 20[33].

Строительство нового завода стоит 220 млн рублей. Затраты на производство x тыс. единиц продукции на таком заводе равны $0{,}5x^2 + x + 7$ млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит $px - (0.5x^2 + x + 7)$. Когда завод будет построен, фирма каждый год будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. В первый год после постройки цена на продукцию $p = 9$ тыс. рублей за единицу. Каждый следующий год цена увеличивается на 1 тыс. рублей за единицу. За сколько лет окупится строительство завода?

Решение.

Построим математическую модель. Эта модель уже частично подарена нам в условии задачи. Выясним, при каком значении x годовая прибыль фирмы при цене p наибольшая.

Формула 69

$$px - \left(\frac{x^2}{2} + x + 7\right) \to max$$

После упрощения:

Формула 70

$$-\left(\frac{x^2}{2} + (1 - p)x + 7\right) \to max$$

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + (1 - p)x + 7 \to min$$

В поиске экстремума обойдемся без дифференцирования. Графиком функции $y = f(x)$ является парабола, ветви которой направлены вверх (коэффициент перед квадратичным слагаемым положительный). Поэтому наименьшее значение функции достигается в вершине параболы. Находим абсциссу вершины параболы[34].

Формула 71

$$x_{max} = \frac{p - 1}{2 * \frac{1}{2}} = p - 1 \geq 8$$

При этом наибольшая годовая прибыль при цене p становится равна:

---

[33] (Алексенцев, 2024)

[34] (ЯКласс, 2022)

Формула 72

$$p(p-1)-\left(\frac{(p-1)^2}{2}+(p-1)+7\right)$$

Упростим выражение для максимальной годовой прибыли при цене p:

Формула 73

$$p^2-p-\frac{p^2}{2}+p-\frac{1}{2}-p+1-7=\frac{p^2}{2}-p-\frac{13}{2}=\frac{p^2-2p-13}{2}=\frac{(p-1)^2-14}{2}$$

Рассмотрим динамику прибыли за несколько первых лет.

Таблица 20

Год	P	Годовая прибыль $\frac{(p-1)^2-14}{2}$	Суммарная прибыль
1	*9*	$\frac{64-14}{2}=25$	$25<220$
2	*10*	$\frac{81-14}{2}=33.5$	$25+33.5=58.5<220$
3	*11*	$\frac{100-14}{2}=43$	$58.5+43=101.5<220$
4	*12*	$\frac{121-14}{2}=53.5$	$101.5+53.5=155<220$
5	*13*	$\frac{144-14}{2}=65$	$155+65=220$
6	*14*	$\frac{169-14}{2}=77.5$	

Вывод. Завод окупиться ровно через 5 лет, после этого начнет приносить прибыль.

Ответ. 5 лет.

ЗАДАЧА 21[35].

У фермера есть два поля, каждое площадью 6 га. На каждом поле можно выращивать картофель, морковь и свеклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 410 ц/га и на втором тоже 410 ц/га. Урожайность моркови на первом поле составляет 370 ц/га, а на втором 430 ц/га. Урожайность свеклы на первом поле составляет 320 ц/га, а на втором 460 ц/га. Фермер может продавать картофель по цене 3000 рублей за центнер, морковь по цене 3500 рублей за центнер, а свеклу по цене 4000 рублей за центнер. Какой наибольший доход (в млн рублей) может получить фермер?

Решение.

Построим математическую модель. Обозначения площадей, отводимых под культуры, приведем в таблице:

Таблица 21

Площади, га	Картофель	Морковь	Свекла
1 поле	a	b	$6-a-b$
2 поле	c	d	$6-c-d$

Тогда вес каждой культуры на каждом поле принимает вид:

[35] (Алексенцев, 2024)

Таблица 22

Вес	Картофель	Морковь	Свекла
1 поле	$410a$	$370b$	$320(6-a-b)$
2 поле	$410c$	$430d$	$460(6-c-d)$

Поэтому прибыль от каждой культуры на каждом поле принимает вид:

Таблица 23

Прибыль	Картофель	Морковь	Свекла
1 поле	$410a*3000$	$370b*3500$	$320(6-a-b)*4000$
2 поле	$410c*3000$	$430d*3500$	$460(6-c-d)*4000$

Рассмотрим прибыль с 1 поля:

Формула 74

$$1230000a+1295000b+1280000(6-a-b)\to max$$

После упрощения, прибыль с 1 поля:

Формула 75

$$1230a+1295b+1280(6-a-b)\to max$$
$$7680-50a+15b\to max$$

Очевидно, что прибыль с 1 поля максимальна, если вычитается поменьше, а прибавляется побольше:

Формула 76

$$b=6;a=0$$

Вывод: на первом поле выгодно сажать только морковь. При этом максимальная прибыль с 1 поля равна $7680+15*6=7770$ тыс.

Теперь рассмотрим прибыль со 2 поля:

Формула 77

$$1230000c+1505000d+1840000(6-c-d)\to max$$
$$1230c+1505d+1840(6-c-d)\to max$$
$$11040-610c-335d\to max$$

Очевидно, что прибыль со второго поля максимальна, если вычитается поменьше, а прибавляется побольше. Тогда c=d=0, то есть второе поле полностью отводится под свеклу. При этом наибольшая прибыль от второго поля равна 11 040 тыс.

Итоговое распределение прибыли от культур:

Таблица 24

Прибыль	Картофель	Морковь	Свекла
1 поле	0	$370*6*3500=$ $=7770$ тыс.	0
2 поле	0	0	$460*6*4000=$ $=11\,040$ тыс.

Общая максимальная прибыль для фермера составит:

$$7770000+11040000=18\,810\,000 \text{ рублей}$$

Ответ. 18,81 млн.

ЗАДАЧА 22[36].

Строительство нового завода стоит 78 млн рублей. Затраты на производство x тыс. единиц продукции на таком заводе равны $0{,}5x^2+2x+6$ млн рублей в год. Если продукцию завода продать по p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы в млн

[36] (Алексенцев, 2024)

рублей за 1 год составит $px-(0{,}5x^2+2x+6)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении р строительство завода окупится не более чем за 3 года?

Решение.

Построим математическую модель. Эта модель уже частично подарена нам в условии задачи. Выясним, при каком значении х годовая прибыль фирмы при цене р наибольшая.

Формула 78

$$px-\frac{x^2}{2}-2x-6=-\frac{x^2}{2}+(p-2)x-6\to max$$

Иными словами,

Формула 79

$$f(x)=\frac{x^2}{2}-(p-2)x+6\to min$$

В поиске экстремума обойдемся без дифференцирования. Графиком функции $y=f(x)$ является парабола, ветви которой направлены вверх (коэффициент перед квадратичным слагаемым положительный). Поэтому наименьшее значение функции достигается в вершине параболы. Находим абсциссу вершины параболы[37].

Формула 80

$$x_{max}=\frac{p-2}{2*\frac{1}{2}}=p-2\geq 0; p\geq 2$$

Находим эту наибольшую прибыль за 1 год:

Формула 81

$$-\frac{x^2}{2}+(p-2)x-6\Big|_{x=p-2}=-\frac{(p-2)^2}{2}+(p-2)(p-2)-6=\frac{(p-2)^2}{2}-6$$

За три года наибольшая прибыль составит

Формула 82

$$\left(\frac{(p-2)^2}{2}-6\right)*3=78=3*26$$

Решая это уравнение, получаем:

Формула 83

$$\frac{(p-2)^2}{2}-6=26$$

$$\frac{(p-2)^2}{2}=32;\quad p-2=8\to p=10$$

Вывод. При р=10 строительство завода окупится за 3 года?

Ответ. 10.

ЗАДАЧА 23[38].

Производство х тысяч единиц продукции обходится в $q=3x^2+x+6$ миллионов рублей в год. При цене р тыс. рублей за единицу годовая прибыль от продажи этой продукции (в млн рублей) составляет $px-q$. При каком наименьшем значении р

[37] (ЯКласс, 2022)

[38] (Гущин, 2024)

через 11 лет суммарная прибыль может составить не менее 66 млн рублей при некотором значении x?

Решение.

Построим математическую модель. Выразим прибыль от продаж за 1 год:

Формула 84

$$y(x) = px - q = px - 3x^2 - x - 6 = -3x^2 + (p-1)x - 6$$

В поиске экстремума обойдемся без дифференцирования. Графиком функции $y = y(x)$ является парабола, ветви которой направлены вниз (коэффициент перед квадратичным слагаемым отрицательный). Поэтому наименьшее значение функции достигается в вершине параболы. Находим абсциссу вершины параболы[39].

Формула 85

$$x_0 = -\frac{p-1}{-6} = \frac{p-1}{6}$$

Находим максимальную годовую прибыль:

Формула 86

$$y(x_0) = -3\left(\frac{p-1}{6}\right)^2 + (p-1)\frac{p-1}{6} - 6 = -\frac{(p-1)^2}{12} + \frac{2(p-1)^2}{12} - 6 = \\ = \frac{(p-1)^2}{12} - 6$$

Поскольку за 11 лет прибыль должна составить не менее 66 млн рублей, то годовая максимальная прибыль должна быть не менее 6 млн рублей.

Формула 87

$$\frac{(p-1)^2}{12} - 6 \geq 6$$

Решаем это неравенство.

Формула 88

$$\frac{(p-1)^2}{12} \geq 12$$
$$(p-1)^2 \geq 144$$
$$|p-1| \geq 12$$
$$p - 1 \geq 12 \; or \; p - 1 \leq -12$$

По смыслу задачи, p положительное. Значит $p \geq 13$.

Вывод. Наименьшее p, при котором через 11 лет суммарная прибыль может составить не менее 66 млн рублей равно 13.

Ответ. 13.

ЗАДАЧА 24[40].

Вадим владеет двумя заводами в разных городах. За t^2 часов изготавливается t товаров. Рабочие первого завода получают 200 рублей в час, рабочие второго завода – 300 рублей в час. Недельный бюджет Вадима на оплату труда рабочих – 1 200 000 рублей. Какое максимальное количество товаров смогут произвести оба завода за одну неделю?

---

[39] (ЯКласс, 2022)

[40] (Гущин, 2024)

Решение.

Пстроим математическую модель.

Таблица 25

	Человеко-часов	Произведено товаров	Оплата труда
1й завод	a^2	a	$200a^2$
2й завод	b^2	b	$300b^2$
всего		$a+b$	$200a^2+300b^2=1\,200\,000$

Получили задачу на поиск условного экстремума[41]: при ограничении

Формула 89

$$200a^2+300b^2=1\,200\,000$$

требуется наибольшее значение функции

Формула 90

$$f(a,b)=a+b\to max$$

Используя ограничение, выразим одну переменную через другую, и подставим в целевую функцию:

Формула 91

$$200a^2=1\,200\,000-300b^2$$
$$a^2=6000-1.5b^2$$
$$a=\sqrt{6000-1.5b^2}$$
$$f(b)=\sqrt{6000-1.5b^2}+b\to max$$

Определим возможный диапазон для переменной b.

Формула 92

$$6000-1.5b^2\geq 0$$
$$6000\geq 1.5b^2$$
$$b^2\leq\frac{6000}{1.5}=\frac{12000}{3}=4000;$$
$$0\leq b\leq\sqrt{4000}=20\sqrt{10}$$
$$b\in[0;20\sqrt{10}]$$

Найдем наибольшее значение[42] этой функции на отрезке $[0;20\sqrt{10}]$. Найдем производную целевой функции.

Формула 93

$$f'(b)=1-\frac{3b}{2\sqrt{6000-1.5b^2}}$$

Найдем критические точки, принадлежащие отрезку $[0;20\sqrt{10}]$.

Формула 94

$$f'(b)=0\ \leftrightarrow\ 2\sqrt{6000-1.5b^2}=3b$$
$$\sqrt{6000-1.5b^2}=1.5b$$
$$6000-1.5b^2=2.25b^2$$
$$6000=3.75b^2$$
$$b=40\in[0;20\sqrt{10}]$$

Определим знаки производной на интервалах $[0;40)$и $(40;20\sqrt{10}]$. Заметим, что $50\in[0;20\sqrt{10}]$, так как $2500<4000$.

---

[41] (Википедия, 2021)

[42] (Фихтенгольц, 2001)

Формула 95

$$f'(50) = 1 - \frac{150}{2\sqrt{6000 - 15 * 250}} =$$

$$= 1 - \frac{150}{2\sqrt{2250}} < 1 - \frac{150}{2\sqrt{2304}} = 1 - \frac{150}{2 * 48} = 1 - \frac{75}{48} < 0$$

Значит, на отрезке $(40; 20\sqrt{10}]$ функция убывает.

Формула 96

$$f'(0) = 1 > 0$$

Поэтому, на отрезке $[0; 40)$ функция возрастает. В точке $b = 40$ достигается максимум. Найдем значение a, если $b = 40$.

Формула 97

$$a = \sqrt{6000 - 1.5b^2} = \sqrt{6000 - 1.5 * 1600} = \sqrt{3600} = 60$$

Вывод. Наибольшее возможное количество произведенных товаров

Формула 98

$$a + b = 40 + 60 = 100$$

Ответ. 100.

ЗАДАЧА 25[43].

У фермера есть два комбайна. Оба комбайна используются для уборки зерновых, но второй комбайн более современный. В результате, если первый комбайн работает m^2 часов, то за то время он собирает 8m тонн зерновых; если второй комбайн работает m^2 часов, то за то время он собирает 15m тонн зерновых. За каждый час работы фермер платит каждому комбайнеру 200 рублей. Фермер готов выделять 20 000 рублей на оплату труда комбайнеров. Какое наибольшее количество тонн зерновых можно собрать за эти деньги с помощью двух комбайнов?

Решение.

Построим математическую модель. Обозначим время работы старого комбайна m часов, время работы нового комбайна n часов. С помощью таблицы строим задачу на поиск экстремума на отрезке.

Таблица 26

Комбайны	Время	Платим комбайнерам	Соберем зерновых, т
Старый	m	$200m$	$8\sqrt{m}$
Новый	n	$200n$	$15\sqrt{n}$
		$200(m+n) = 20000$ $m + n = 100$ $n = 100 - m$	$8\sqrt{m} + 15\sqrt{n} \to max$ $f(m) = 8\sqrt{m} + 15\sqrt{100 - m} \to max$ $m \in [0; 100]$

Найдем наибольшее значение[44] этой функции на отрезке $[0; 100]$. Найдем производную целевой функции.

Формула 99

$$f'(m) = \frac{8}{2\sqrt{m}} - \frac{15}{2\sqrt{100 - m}}$$

Найдем критические точки, принадлежащие отрезку $[0; 100]$.

---

[43] (Гущин, 2024)

[44] (Фихтенгольц, 2001)

Формула 100

$$f'(m) = 0 \Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{m}} = \frac{15}{2\sqrt{100-m}}$$
$$8\sqrt{100-m} = 15\sqrt{m}$$
$$64(100-m) = 225m$$
$$6400 - 64m = 225m$$
$$6400 = (225+64)m$$
$$6400 = 289m$$
$$m = \frac{6400}{289} \in [0;100]$$

Подставляем найденную критическую точку $\frac{6400}{289}$ и края отрезка (функция, непрерывная на замкнутом ограниченном отрезке принимает на нем наибольшее и наименьшее значения)[45]:

Формула 101

$$f(0) = 150$$
$$f(100) = 80$$
$$f\left(\frac{6400}{289}\right) = 8 * \frac{80}{17} + 15\sqrt{100 - \frac{6400}{289}} = \frac{640}{17} + 15 * \frac{150}{17} = \frac{640+2250}{17} =$$
$$= \frac{2890}{17} = 170 > 150$$

Таким образом, наибольшее значение целевой функции равно 170 и достигается при

Формула 102

$$m = \frac{6400}{289};\ \sqrt{m} = \frac{8}{17}$$

Тогда

Формула 103

$$\sqrt{n} = \sqrt{100 - \frac{6400}{289}} = \sqrt{\frac{28900-6400}{289}} = \frac{150}{17}$$

Вывод. Наибольшее количество тонн зерновых, которое можно собрать за эти деньги с помощью двух комбайнов равно 170 тонн.

Ответ. 170.

ЗАДАЧА 26[46].

Планируется построить новый завод, который ежегодно будет выпускать x тыс. единиц продукции, причем затраты на производство этого количества продукции составят $0{,}25x^2 + 5x$ млн рублей в год. Кроме того, планируется, что транспортные расходы на доставку продукции до места реализации составят $x + 24$ млн рублей в год. После продажи продукции (x тыс. единиц) по цене p тыс. рублей (где p – целое число) за единицу ежегодная прибыль завода (в млн рублей) составит разность между полученной суммой денег и суммарных затрат по производству продукции и транспортных расходов. При каком наименьшем значении p строительство завода

[45] (STYDYLIB, 2024)
[46] (Гущин, 2024)

окупится не более, чем за 6 лет, если расходы по его строительству оцениваются в размере 150 млн рублей?

Решение.

Построим математическую модель. От продажи родукции за 6 лет получим в рублях:

Формула 104

$$6xp * 10^6$$

Затраты на производство и транспортные расходы в рублях за 6 лет составит:

Формула 105

$$10^6 * 6(0.25x^2 + 5x + x + 24)$$

Поэтому прибыль за 6 лет составит

Формула 106

$$6xp * 10^6 - 10^6 * 6(0.25x^2 + 5x + x + 24)$$

Завод окупится за 6 лет, если

Формула 107

$$6xp * 10^6 - 10^6 * 6(0.25x^2 + 5x + x + 24) - 150 * 10^6 \geq 0$$

Получили неравенство второй степени.

Формула 108

$$6xp - 6(0.25x^2 + 6x + 24) - 150 \geq 0$$
$$-1.5x^2 - 36x + 6xp - 294 \geq 0$$
$$-1.5x^2 - (36 - 6p)x - 294 \geq 0$$
$$-3x^2 - (72 - 12p)x - 588 \geq 0$$
$$-x^2 - (24 - 4p)x - 196 \geq 0$$

Решаем неравенство методом интервалов[47]:

Формула 109

$$-x^2 - (24 - 4p)x - 196 = 0$$
$$x^2 - (4p - 24)x + 196 = 0$$
$$D = (4p - 24)^2 - 4 * 196 =$$
$$= 16(p - 6)^2 - 4 * 4 * 49 = 16((p - 6)^2 - 49) \geq 0$$
$$(p - 6)^2 \geq 7^2$$
$$|p - 6| \geq 7$$
$$p - 6 \geq 7 \; or \; p - 6 \leq -7$$
$$p \geq 13 \; or \; p \leq -1$$

Вывод. Наименьшее значение p (цена за единицу продукции, целое количество тысяч) равно 13.

Ответ. p=13 тыс.

ЗАДАЧА 27[48].

Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят t^2 тыс. рублей в конце года t (t=1; 2; …). В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счет в банке, при этом в конце каждого следующего года сумма на счете будет увеличиваться на 25%. В конце какого года пенсионному фонду следует продать ценные бумаги, чтобы в конце двадцатого года сумма на его счете была наибольшей?

---

[47] (Яковлев, 2024)

[48] (Школково, 2023)

Решение.

Построим математическую модель. Пусть в годы 1, 2, 3, … k пенсионный фонд владеет ценными бумагами, в годы k+1, k+2, … k+p=20 средства, вырученные за ценные бумаги, держит на счету в банке (20-k лет деньги лежат в банке). Тогда накопленные за 20 лет средства пенсионного фонда равны:

Формула 110

$$f(k) = k^2 * \left(\frac{5}{4}\right)^{20-k} \rightarrow max$$

Требуется найти наибольшее значение этой функции на отрезке $[0; 20]$. Поскольку k целое, то найдем значения целевой функции при k=0, 1, 2, …, 20.

Таблица 27

k	$f(k) = k^2 * \left(\frac{5}{4}\right)^{20-k}$
0	0
1	69,38894
2	222,0446
3	399,6803
4	568,4342
5	710,5427
6	818,5452
7	891,3048
8	931,3226
9	942,9641
10	931,3226
11	901,5203
12	858,3069
13	805,8548
14	747,6807
15	686,6455
16	625
17	564,4531
18	506,25
19	451,25
20	400

По результатам вычислений построим диаграмму.

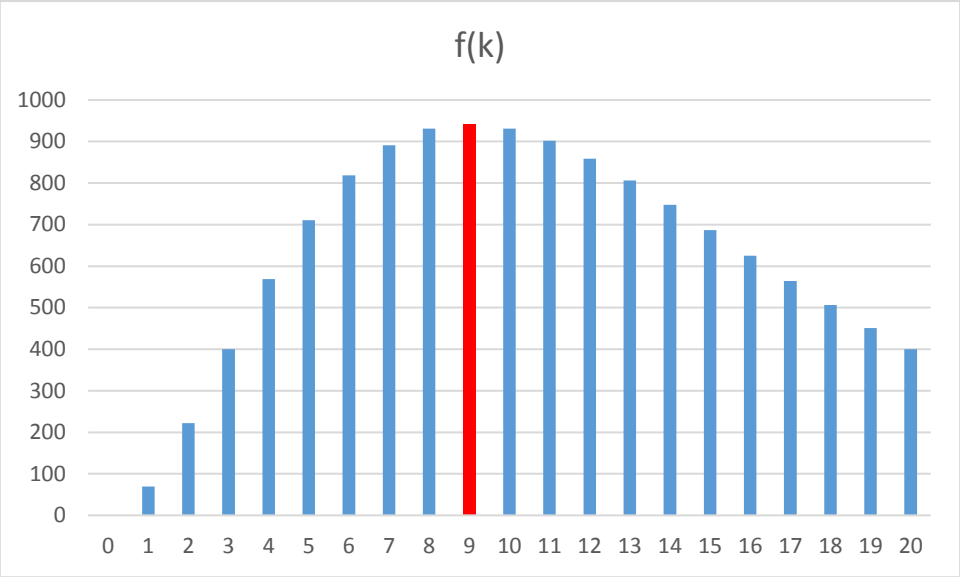


Рисунок 3

Таким образом, наибольшее значение целевой функции достигается при k=9. Заметим, что если читатель скептически смотрит на вычисление двадцати одного значения целевой функции вручную, то к этому же результату можно подойти с помощью дифференциального исчисления.

Найдем наибольшее значение[49] целевой функции на отрезке $[0; 20]$. Найдем производную целевой функции.

Формула 111

$$f' = 2k * \left(\frac{5}{4}\right)^{20-k} - k^2 * \left(\frac{5}{4}\right)^{20-k} * \ln\left(\frac{5}{4}\right) = k\left(\frac{5}{4}\right)^{20-k}\left(2 - k * \ln\left(\frac{5}{4}\right)\right)$$

Найдем критические точки, принадлежащие отрезку $[0; 20]$.

Формула 112

$$2 = k * \ln\left(\frac{5}{4}\right)$$

$$k = \frac{2}{\ln 1.25}$$

Из огня да в полымя: как на экзамене без калькулятора вручную вычислить это значение хотя бы приблизительно?! Выход есть: разложение функции $y = \ln(1 + x)$ в ряд[50]. Продифференцируем эту функцию и представим ее в виде суммы бесконечной бывающей геометрической прогрессии[51].

Формула 113

$$\ln'(1 + q) = \frac{1}{1 + q} = 1 - q + q^2 - q^3 + q^4 + \cdots$$

Конечно, формула верна только если знаменатель геометрической прогрессии по модулю не превосходит 1. Значит

Формула 114

$$\ln'(1 + x) = \frac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \cdots$$

Находим первообразную и получаем:

[49] (Фихтенгольц, 2001)
[50] (Пискунов, 1985)
[51] (Фоксфорд, 2024)

Формула 115

$$\ln(1+x) = C + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

Практическая ценность этой формулы для вычисления значений логарифма ничтожна, ведь мы пока не знаем С. К счастью, С можно найти, подставив в предыдущую формулу $x = 0$.

Формула 116

$$0 = \ln(1+0) = C + 0 + \cdots$$

Отсюда, $C = 0$, и, следовательно,

Формула 117

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots, \text{где} |x| < 1.$$

Заметим в скобках, что при $x = 1$ формула все равно верна, и

Формула 118

$$\ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

Приступаем к вычислению $\ln 1.25$.

$$\ln\frac{5}{4} = \ln\left(1 + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64*3} - \frac{1}{1024} + \cdots =$$

$$\approx \frac{3*256}{1024*3} - \frac{3*32}{1024*3} + \frac{16}{1024*3} - \frac{3}{1024*3} = \frac{768 - 96 + 16 - 3}{3072} = \frac{685}{3072}$$

Тогда

Формула 119

$$k = \frac{2}{\ln 1.25} \approx 2 * \frac{3072}{685} = 8{,}969343065693430656934306569343065693431$$

Заметим, что погрешность составляет не более 0,001, такая точность нас вполне устроит для поиска целого k. Выбираем наилучшее k из 9 или 8.

$$f(9) = 81 * \left(\frac{5}{4}\right)^{11}$$

$$f(8) = 64 * \left(\frac{5}{4}\right)^{12}$$

Сравним эти значения

$$81 * \left(\frac{5}{4}\right)^{11} \text{ и } 64 * \left(\frac{5}{4}\right)^{12}$$

$$81 \text{ и } 64 * \frac{5}{4}$$

$$81 > 80$$

$$f(9) = 81 * \left(\frac{5}{4}\right)^{11} > 64 * \left(\frac{5}{4}\right)^{12} = f(8)$$

Вывод. В конце девятого года пенсионному фонду следует продать ценные бумаги, чтобы в конце двадцатого года сумма на его счете была наибольшей.

Ответ. 9.

ЗАДАЧА 28[52].

В первые классы поступает 45 человек: 20 мальчиков и 25 девочек. Их распределили по двум классам: в одном должно получиться 22 человека, в другом – 23. После распределения посчитали процент девочек в каждом классе и полученные числа сложили. Каком должно быть распределение по классам, чтобы полученная сумма была наибольшей?

Решение.

Построим математическую модель. Пусть в 1А классе количество девочек x человек. Тогда структура распределения учащихся по классам представим в таблице.

Таблица 28

Классы	*Мальчики*	*Девочки*	*Доля девочек*
1А	$22-x$	x	$\frac{x}{22}$
1Б	$23-(25-x)=x-2$	$25-x$	$\frac{25-x}{23}$
Всего	20	25	$\frac{x}{22}+\frac{25-x}{23}\to \max$

По смыслу задачи, $0 \le x \le 22$.

Найдем максимум функции на отрезке $[0;22]$:

Формула 120

$$f(x)=\frac{x}{22}+\frac{25-x}{23}=\frac{25}{23}+\frac{x}{22}-\frac{x}{23}=\frac{25}{23}+\frac{x}{22*23}\to max$$

Очевидно, что функция f(x) возрастает, и наибольшее значение функция принимает при $x=22$. Тогда окончательная структура распределения учащихся по классам представим в таблице.

Таблица 29

Классы	*Мальчики*	*Девочки*	*Доля девочек*
1А	0	22	1
1Б	20	3	$\frac{3}{23}$
Всего	20	25	$1+\frac{3}{23}=\frac{26}{23}$

Ответ. Для того, чтобы сумма процентов девочек была наибольшей, нужно, чтобы 1А класс состоял только из девочек (22 человека), а в 1Б классе должно быть 20 мальчиков и 3 девочки.

ЗАДАЧА 29[53].

В распоряжении начальника имеется бригада рабочих в составе 24 человек. Их нужно распределить на день на два объекта. Если на первом объекте работает t человек, то их суточная зарплата составляет $4t^2$ у.е. Если на втором объекте работает t человек, то их суточная зарплата составляет t^2 у.е. Как нужно распределить на эти объекты

[52] (Гущин, 2024)
[53] (Гущин, 2024)

бригаду рабочих, чтобы выплаты на их суточную зарплату оказались наименьшими? Сколько у.е. в этом случае придется заплатить рабочим?

Решение.

Построим математическую модель. Пусть в первой бригаде x человек. Тогда представим распределение рабочих по бригадам и их заработную плату представим в таблице.

Таблица 30

	Человек	Заработная плата, у. е.
1 бригада	x	$4x^2$
2 бригада	$24-x$	$(24-x)^2$
Всего	24	$4x^2+(24-x)^2 \to \min$

По смыслу задачи, $0 \le x \le 24$.

Найдем максимум функции на отрезке $[0;24]$:

Формула 121

$$f(x)=4x^2+(24-x)^2=4x^2+(24-x)^2=5x^2-48x+576 \to min$$

В поиске экстремума обойдемся без дифференцирования. Графиком функции $y=f(x)$ является парабола, ветви которой направлены вверх (коэффициент перед квадратичным слагаемым положительный). Поэтому наименьшее значение функции достигается в вершине параболы. Находим абсциссу вершины параболы[54].

Формула 122

$$x_0=\frac{48}{10}=4.8$$

По смыслу задачи x целое, не будем же мы приглашать на объект полтора землекопа, поэтому наилучшее значение x следует искать среди 4 или 5.

Формула 123

$$f(4)=64+400=464; \quad f(5)=100+361=461, f(5)<f(4)$$

Значит, на первый объект следует отправить 5 человек, а на второй – 19 человек. При этом суточная зарплата составит

$$4x^2+(24-x)^2|_{x=5}=100+361=461$$

Ответ. Распределение по бригадам 5 и 19 человек, заработная плата 461 у.е.

ЗАДАЧА 30[55].

Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят 10t тыс. рублей в конце года t (t=1; 2; …). В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счет в банке, при этом в конце каждого следующего года сумма на счете будет увеличиваться в 1+r раз. Пенсионный фонд хочет продать ценные бумаги в конце такого года, чтобы в конце 25 года сумма на его счете была наибольшей. Расчеты показали, что ценные бумаги нужно продавать строго в конце двадцать первого года. При каких положительных значениях r это возможно?

---

[54] (ЯКласс, 2022)

[55] (Алексенцев, 2024)

Решение.

Построим математическую модель. Пусть t – номер года. Допустим, что пока пенсионный фонд не торопится продавать ценные бумаги. Рассмотрим в таблице стоимость ценных бумаг и коэффициент, во сколько раз в очередном году стоимость ценных бумаг возросла.

Таблица 31

Год	*Стоимость ценных бумаг*	*Коэффициент роста стоимости*
1	10	
2	20	$\frac{20}{10} = 2$
3	30	$\frac{30}{20} = 1{,}5$
…	…	…
$t-1$	$10(t-1)$	$\frac{t-1}{t-2}$
t	$10t$	$\frac{t}{t-1}$
…	…	…
21	210	$\frac{21}{20} > 1+r$
22	220	$\frac{22}{21} < 1+r$
…	…	…

Видим, что коэффициенты с ростом номера года убывают, сначала коэффициенты больше чем 1+r, поэтому в банк средства от проданных ценных бумаг нести не выгодно. По условию задачи после 21 года держать ценные бумаги становится невыгодно, поэтому

Формула 124

$$\frac{22}{21} < 1+r < \frac{21}{20}$$

Решаем неравенство:

Формула 125

$$\frac{1}{21} < r < \frac{1}{20}$$

Ответ. $\frac{1}{21} < r < \frac{1}{20}$.

ЗАДАЧА 31[56].

Компания изготавливает и продает изделия. Если одно изделие стоит 2000 рублей, то реализуется 1000 штук изделий. При снижении средней цены одного изделия на 50 рублей объемы реализации возрастают на 50 штук. При какой цене фирма получит максимальный доход и каково его значение?

Решение.

Построим математическую модель. Пусть цена одного изделия $2000 - 50x$ рублей.

[56] (Школково, 2023)

Тогда вследствие снижения цены спрос увеличился, и продано $1000 + 50x$ единиц товара. Поэтому прибыль составила

Формула 126

$$f(x) = (2000 - 50x)(1000 + 50x) = -2500x^2 + 50000x + 2000000 \to max$$

Поскольку цена не может быть отрицательной, и по смыслу задачи цена не выше 2000 рублей, то

Формула 127

$$0 \le x \le 40$$

Свели задачу на поиск максимума квадратичной функции на отрезке.

В поиске экстремума обойдемся без дифференцирования. Графиком функции $y = f(x)$ является парабола, ветви которой направлены вниз (коэффициент перед квадратичным слагаемым отрицательный). Поэтому наибольшее значение функции достигается в вершине параболы. Находим абсциссу вершины параболы[57].

Формула 128

$$x_0 = \frac{-50\,000}{-5000} = 10 \in [0; 40]$$

Найдем значение функции f(x) при x=10.

Формула 129

$$f(10) = (2000 - 500)(1000 + 500) = 2\,250\,000 \text{ рублей.}$$

Вывод. Наибольший доход составит 2,25 млн рублей при оптимальной цене 1 500 рублей за единицу товара.

Ответ. Наилучшая цена 1500 р. 2,25 млн рублей наибольший возможный доход.

ЗАДАЧА 32[58].

В двух областях есть по 20 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 10 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,2 кг алюминия или 0,2 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда.

Обе области поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 1 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом области договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

Решение.

Построим математическую модель. Пусть в первой области добывают 0,2a кг алюминия или 0,2b кг никеля. Пусть во второй области добывают x кг алюминия и y кг никеля. Оформим структуру добычи и использование трудовых ресурсов в таблице.

---

[57] (ЯКласс, 2022)

[58] (Школково, 2023)

Таблица 32

	Алюминий	Никель	Затрачено человеко-часов
1 область	$0{,}2a$	$0{,}2b$	$a+b=20*10$
2 область	x	y	$x^2+y^2=20*10$
Всего	$x+0.2a$	$y+0.2b$	400
	$2(x+0.2a)\to max$		

По условию задачи алюминия и никеля в сплав входит поровну, поэтому

Формула 130

$$x+0.2a=y+0.2b$$

Получили задачу на поиск условного экстремума[59]:

$$2(x+0.2a)\to max$$

При условии

Формула 131

$$\begin{cases} a+b=200 \\ x^2+y^2=200 \\ x+0.2a=y+0.2b \end{cases}$$

Решим систему из двух последних уравнений, рассматривая x и y как переменные (a и b – известные числа), используя метод подстановки.

Формула 132

$$\begin{cases} x^2+y^2=200 \\ x-0.2(b-a)=y \end{cases}$$

$$2x^2-\frac{2}{5}x(b-a)+\frac{1}{25}(b-a)^2-200=0$$

$$x^2-\frac{1}{5}x(b-a)+\frac{1}{50}(b-a)^2-100=0$$

$$x^2-\frac{1}{5}x(200-2a)+\frac{1}{50}(200-2a)^2-100=0$$

$$D=\frac{(200-2a)^2}{25}-4\left(\frac{1}{50}(200-2a)^2-100\right)=\cdots$$

Обозначим для простоты

Формула 133

$$(200-2a)^2=t$$

Тогда

Формула 134

$$D=\frac{t}{25}-4\left(\frac{1}{50}t-100\right)=400-\frac{t}{25}=\frac{10000-40000+800a-4a^2}{25}=$$
$$=\frac{-30000+800a-4a^2}{25}=\frac{4}{25}(-a^2+200a-7500)$$

При каких a $D\geq 0$? Решим неравенство методом интервалов:

Формула 135

$$-a^2+200a-7500\geq 0$$

Найдем корни трехчлена.

$$\mathcal{D}=40000+4*7500=70000=\left(100\sqrt{7}\right)^2$$

$$a_{1,2}=\frac{-200\mp 100\sqrt{7}}{-2}=100\pm 50\sqrt{7}$$

[59] (Википедия, 2021)

Заметим, что a_1 отрицательное. Решением последнего неравенства является

Формула 136

$$0 \leq a \leq 100 + 50\sqrt{7}$$

При этом условии квадратное уравнение

Формула 137

$$x^2 - \frac{1}{5}x(200 - 2a) + \frac{1}{50}(200 - 2a)^2 - 100 = 0$$

Имеет хотя бы один корень. Находим его.

Формула 138

$$x_{1,2} = \frac{\frac{1}{5}(200 - 2a) \pm \frac{2}{5}\sqrt{(-a^2 + 200a - 7500)}}{2} =$$
$$= \frac{1}{5}(100 - a) \pm \frac{1}{5}\sqrt{(-a^2 + 200a - 7500)} =$$
$$= \frac{1}{5}(100 - a) + \frac{1}{5}\sqrt{(-a^2 + 200a - 7500)} =$$
$$= \frac{1}{5}\left(100 - a + \sqrt{(-a^2 + 200a - 7500)}\right)$$

Формируем целевую функцию.

Формула 139

$$x + 0.2a = \frac{1}{5}\left(100 - a + \sqrt{(-a^2 + 200a - 7500)}\right) + \frac{1}{5}a =$$
$$= \frac{1}{5}\left(100 + \sqrt{(-a^2 + 200a - 7500)}\right) \to max$$

Экстремум этой функции достигается, если

Формула 140

$$f(a) = -a^2 + 200a - 7500 \to max$$

В поиске экстремума обойдемся без дифференцирования. Графиком функции $y = f(a)$ является парабола, ветви которой направлены вниз (коэффициент перед квадратичным слагаемым отрицательный). Поэтому наибольшее значение функции достигается в вершине параболы. Находим абсциссу вершины параболы[60].

Формула 141

$$a_0 = -\frac{200}{-2} = 100 \to \ b = 200 - 100 = 100$$

Значит, в первой области добывают 20 кг алюминия и 20 кг никеля.

Рассмотрим структуру добычи во второй области: при а=100

Формула 142

$$-a^2 + 200a - 7500|_{a=100} = -10000 + 20000 - 7500 = 2500$$
$$x|_{a=100} = \frac{1}{5}\left(100 - a + \sqrt{(-a^2 + 200a - 7500)}\right)$$
$$= \frac{1}{5}\left(100 - 100 + \sqrt{2500}\right) = \frac{50}{5} = 10 \to y = 10$$

Наибольшее количество сплава

$$2(x + 0.2a) = 2(x + 0.2 * 100) = 2(10 + 20) = 60$$

Ответ. 60.

[60] (ЯКласс, 2022)

ЗАДАЧА 33[61].

В распоряжении прораба имеется бригада рабочих в составе 26 человек. Их нужно распределить на строительство двух частных домов, находящихся в разных городах. Если на строительстве первого дома работает t человек, то их суточная зарплата составляет $3t^2$ денежных единиц. Если на строительстве второго дома работает t человек, то их суточная зарплата составляет $4t^2$ денежных единиц. Дополнительные суточные накладные расходы, то есть транспорт, питание и тому подобное, обходятся в 4 денежных единицы в расчёте на одного рабочего при строительстве первого дома и в 3 денежных единицы при строительстве второго дома.

Как нужно распределить на эти объекты рабочих бригады, чтобы все выплаты на их суточное содержание, то есть суточная зарплата и суточные накладные расходы, оказались наименьшими? Сколько денежных единиц в сумме при таком распределении составят все суточные затраты, то есть зарплата и накладные расходы?

Решение.

Построим математическую модель. Пусть на строительстве первого дома работает t человек. Тогда затраты трудовых и финансовых ресурсов можно представить в таблице.

Таблица 33

	Человек	ЗП	Затраты
1й дом	t	$3t^2$	$4t$
2й дом	$26-t$	$4(26-t)^2$	$3(26-t)$
Всего	26	$f(t)=4(26-t)^2+3t^2+4t+3(26-t)\to\min$	

По смыслу задачи $t\in[0;26]$.

Упрощаем целевую функцию:

Формула 143

$$f(t)=4(676-52t+t^2)+3t^2+4t+78-3t=$$
$$=7t^2-207t+2782\to min$$

В поиске экстремума обойдемся без дифференцирования. Графиком функции $y=f(t)$ является парабола, ветви которой направлены вверх (коэффициент перед квадратичным слагаемым положительный). Поэтому наименьшее значение функции достигается в вершине параболы. Находим абсциссу вершины параболы[62].

Формула 144

$$t_0=\frac{207}{14}=14\frac{11}{14}$$

По смыслу задачи t – целое. Поэтому наименьшее значение целевой функции достигается либо при t=14, либо при t=15.

$$f(14)=7*196-207*14+2782=1256$$
$$f(15)=7*225-207*15+2782=1252<1256$$
$$1252=f(15)<f(14)=1256$$

Вывод. На строительство первого дома следует отправить 15 человек. Тогда на строительство второго дома нужно отправить 26–15=11 человек. При этом

[61] (Школково, 2023)

[62] (ЯКласс, 2022)

минимальные затраты на зарплату и накладные расходы составят 1252 денежных единицы.
Ответ. на 1й дом 15 человек и 11 человек на 2 дом. 1252 денежных единиц.

ЗАДАЧА 34[63].

На трех заводах выпускают одинаковую продукцию. Известно, что если на заводе в течение месяца будут трудиться t рабочих, то первый завод выпустит $3t^2$ единиц продукции, а второй и третий по t^2 единиц. Заработная плата на первом заводе для одного рабочего составляет 40 тыс. рублей в месяц, на втором заводе – 20 тыс. рублей в месяц, на третьем – 30 тыс. рублей в месяц. Также известно, что на втором заводе рабочих вдвое меньше, чем на первом, а суммарное число рабочих на трех заводах равно 40. Определите, какое наибольшее количество единиц продукции может быть выпущено на заводах за месяц, учитывая, что общий бюджет на зарплаты составил не более 1 400 000 рублей.

Решение.
Построим математическую модель. Пусть на втором заводе работает t рабочих. Тогда затраченные трудовые и финансовые расхода и распределение выпущенной продукции можно представить в таблице.

Таблица 34

	Рабочих	*Выпущено продукции*	*Заработная плата*
1й завод	$2t$	$12t^2$	$80\,000t \geq 0$
2й завод	t	t^2	$20\,000\,t \geq 0$
3й завод	$40-3t$	$(40-3t)^2$	$30000(40-3t) \geq 0$
Всего	40	$\sum \to \max$	$100\,000t + 30000(40-3t) \leq 1\,400\,000$

По условию задачи, бюджет на зарплаты составил не более 1 400 000 рублей, поэтому

Формула 145

$$\begin{cases} 100\,000t + 30000(40-3t) \leq 1\,400\,000 \\ t \geq 0 \\ 40-3t \geq 0 \end{cases}$$

Решим первое неравенство системы

Формула 146

$$10t + 3(40-3t) \leq 140$$
$$10t + 120 - 9t \leq 140$$
$$0 \leq t \leq 20$$

Решим третье неравенство системы.

Формула 147

$$3t \leq 40; t \leq \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$$

Окончательно: $t \in \left[0; 13\frac{1}{3}\right]$.

Получили задачу на поиск экстремума на отрезке $\left[0; 13\frac{1}{3}\right]$:

---

[63] (Школково, 2023)

Формула 148

$$f(t) = 12t^2 + t^2 + (40 - 3t)^2 \to max$$
$$f(t) = 22t^2 - 240t + 1600 \to max$$

Ветви параболы направлены вверх, значит, максимум функции достигается в одном из концов отрезка, учтем также, что по смыслу задачи t целое.

$$f(0) = 1600; f(13) = 22 * 169 - 240 * 13 + 1600 = 2198.$$
$$1600 = f(0) < f(13) = 2198$$

Для убедительности можно рассмотреть таблицу значений целевой функции.

Таблица 35

t	*f(t)*
0	1600
1	1382
2	1208
3	1078
4	992
5	950
6	952
7	998
8	1088
9	1222
10	1400
11	1622
12	1888
13	2198

По данным таблиц построим столбчатую диаграмму:

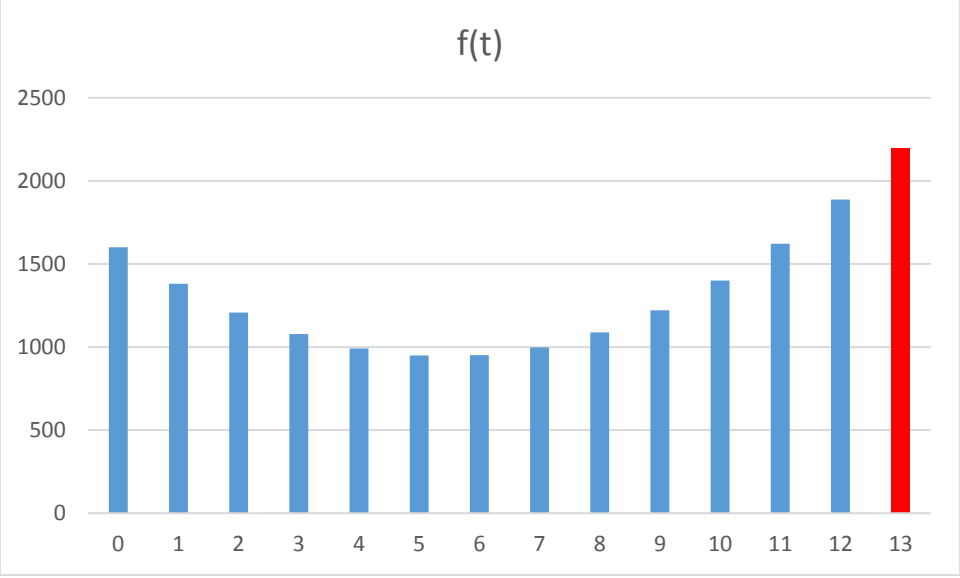


Рисунок 4

Вывод. Наибольшее количество продукции (2198 единиц) будет выпущено, если на первом заводе будут трудиться 26 рабочих, на втором заводе – 13 рабочих, на третьем заводе – 40-3*13=1 рабочий.

Ответ. 2198.

ЗАДАЧА 35[64].

Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят 10t тыс. рублей в конце года t (t=1; 2; …). В конце любого года может продать ценные бумаги и положить деньги на счет в банке, при этом в конце каждого следующего года сумма на счете будет увеличиваться на 24%. В конце какого года пенсионному фонду следует продать ценные бумаги, чтобы в конце двадцатого года сумма на его счете была наибольшей?

Решение.

Построим математическую модель.

Построим математическую модель. Пусть t – номер года до которого включительно пенсионный фонд не торопится продавать ценные бумаги. Рассмотрим в таблице стоимость ценных бумаг и коэффициент, во сколько раз в очередном году стоимость ценных бумаг возросла.

Таблица 36

Год	Стоимость ценных бумаг	Коэффициент роста стоимости
1	10	
2	20	$\frac{20}{10}=2$
3	30	$\frac{30}{20}=1{,}5$
…	…	…
$t-1$	$10(t-1)$	$\frac{t-1}{t-2}$
t	$10t$	$\frac{t}{t-1}>\frac{124}{100}$
$t+1$	$10(t+1)$	$\frac{t+1}{t}<\frac{124}{100}$

Видим, что коэффициенты с ростом номера года убывают, сначала коэффициенты больше чем 1+r, поэтому в банк средства от проданных ценных бумаг нести не выгодно. По условию задачи после 20 года держать ценные бумаги становится невыгодно, поэтому

Формула 149

$$\begin{cases}\frac{t}{t-1}>\frac{124}{100}\\ \frac{t+1}{t}<\frac{124}{100}\end{cases}$$

Решим первое неравенство системы.

Формула 150

$$1+\frac{1}{t-1}=\frac{t}{t-1}>\frac{124}{100}=1+\frac{24}{100}$$

$$\frac{1}{t-1}>\frac{24}{100}$$

$$t-1<\frac{100}{24}=\frac{25}{6}=4\frac{1}{6}$$

[64] (Алексенцев, 2024)

$$t < 5\frac{1}{6}$$

Решим второе неравенство системы.

Формула 151

$$1 + \frac{1}{t} = \frac{t+1}{t} < \frac{124}{100} = 1 + \frac{24}{100}$$

$$\frac{1}{t} < \frac{24}{100}$$

$$t > \frac{100}{24} = \frac{25}{6} = 4\frac{1}{6}$$

Итак, t целое и

Формула 152

$$4\frac{1}{6} < t < 5\frac{1}{6},$$

откуда следует, что t=5.

Вывод. В конце 5 года пенсионному фонду следует продать ценные бумаги, чтобы в конце двадцатого года сумма на его счете была наибольшей

Ответ. 5.

ЗАДАЧА 36[65].

Завод выпускает фруктовые компоты в двух видах тары – стеклянной и жестяной. Производственные мощности завода позволяют выпускать в день 90 центнеров компотов в стеклянной таре или 80 центнеров в жестяной таре. Для выполнения условий ассортимента, которые предъявляются торговыми сетями, продукции в каждом из видов тары должно быть выпущено не менее 20 центнеров. В таблице приведены себестоимость и отпускная цена завода за 1 центнер продукции для обоих видов тары.

Таблица 37

Вид тары	*Себестоимость, 1ц*	*Отпускная цена, 1 ц*
Стеклянная	1 500 р.	2 100 р.
Жестяная	1 100 р.	1 750 р.

Предполагается, что вся продукция завода находит спрос (реализуется без остатка). Найдите максимально возможную прибыль завода за один день (прибылью называется разница между отпускной стоимостью всей продукции и ее себестоимостью).

Решение.

Построим математическую модель. Обозначим x центнеров компота делается в стеклянной таре, y центнеров компота делается в жестяной таре. Тогда

Формула 153

$$20 \le x \le 90;\ 20 \le y \le 80$$

Множество точек с координатами $(x; y)$ заметают на плоскости прямоугольную область.

---

[65] (Алексенцев, 2024)

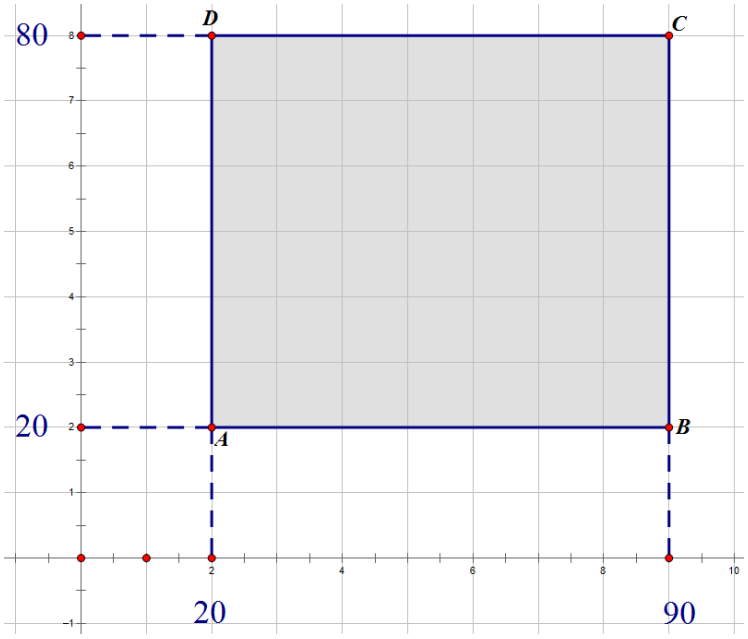


Рисунок 5

По условию задачи, производственные мощности завода позволяют выпускать в день 90 центнеров компотов в стеклянной таре или 80 центнеров в жестяной таре.

Получаем цепочку рассуждений:

$$\text{На } 90 \text{ ц в стекле} - \text{требуется } 1 \text{ производственная мощность завода,}$$

$$\text{На } 1 \text{ ц в стекле} - \text{требуется } \frac{1}{90} \text{ производственной мощности завода.}$$

Аналогично:

$$\text{На } 80 \text{ ц в жести} - \text{требуется } 1 \text{ производственная мощность завода,}$$

$$\text{На } 1 \text{ ц в жести} - \text{требуется } \frac{1}{80} \text{ производственной мощности завода.}$$

Значит, на производство x центнеров компота в стекле + y центнеров компота в жести требуется

Формула 154

$$\frac{x}{90} + \frac{y}{80} \text{ мощности завода,}$$

которая, возможно, потратится не вся. Поэтому

Формула 155

$$\frac{x}{90} + \frac{y}{80} \leq 1$$

Это неравенство определяет на плоскости область ниже прямой

Формула 156

$$\frac{x}{90} + \frac{y}{80} = 1$$

Очевидно, что прямая проходит через точки с координатами $(90; 0)$ и $(0; 80)$.

Построим область на плоскости, определяемую системой неравенств (синий треугольник PQA):

Формула 157

$$\begin{cases} 20 \leq x \leq 90 \\ 20 \leq y \leq 80 \\ \frac{x}{90} + \frac{y}{80} \leq 1 \end{cases}$$

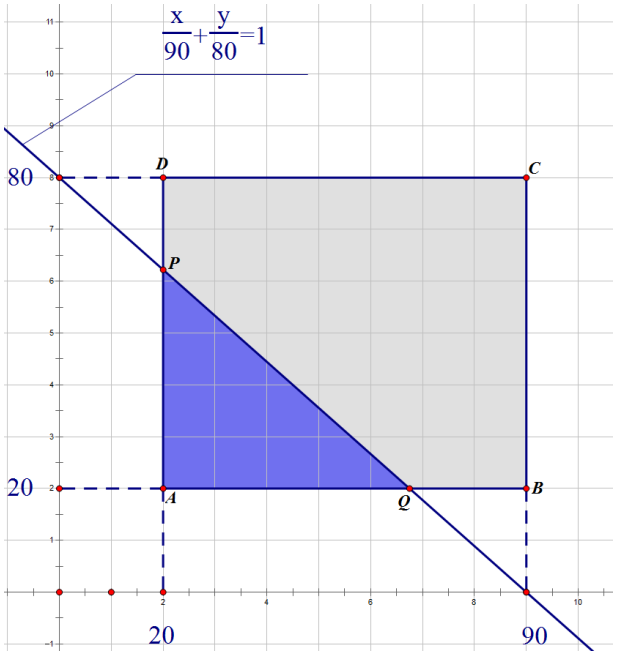


Рисунок 6

То есть, точки с координатами $(x; y)$, где x центнеров компота закатано в стекло и y центнеров – в жести, бегают по треугольной области PQA, залитой синим цветом. При такой структуре производства прибыль p составит:

Формула 158

$$p(x) = (2\,100 - 1\,500)x + (1\,750 - 1\,100)y = \\ = 600x + 650y = const \rightarrow \max$$

Таким образом, на многоугольной области определена некоторая линейная функция, у которой нужно найти наибольшее значение. Это типичная задача линейного программирования[66]. Эту константу надо выбрать так, чтобы прямая $600x + 650y = const$ пересекала область, и при этом константа была наибольшей. Константа тем больше, чем прямая дальше от начала координат.

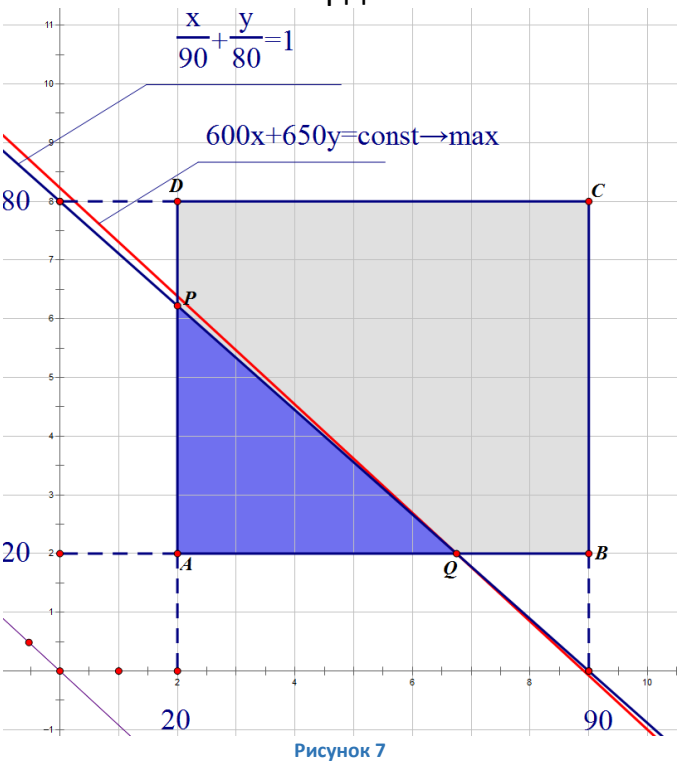


Рисунок 7

[66] (Леонова, 2017)

На чертеже видно, что наибольшее значение целевой функции достигается в точке Q, координаты которой еще предстоит найти. График целевой функции при наибольшей константе на чертеже показан красным цветом.

Но сложность в том, что красная прямая проходит почти параллельно отрезку PQ, а значит построить ее на экзамене точно довольно затруднительно. К счастью, можно использовать идею, что линейная функция, определенная на многоугольной области (или на многогранной области в пространствах большей размерности) принимает наибольшее или наименьшее значения в вершинах многоугольника (или многогранника). Этот многоугольник или многогранник, кстати, называется симплексом.

Найдем координаты точек P и Q.

Формула 159

$$P:\ \frac{20}{90}+\frac{y}{80}=1\rightarrow\frac{y}{80}=\frac{7}{9};\quad y=\frac{560}{9}=62\qquad P(20;62)$$

$$Q:\ \frac{x}{90}+\frac{20}{80}=1\rightarrow\frac{x}{90}=\frac{3}{4}\rightarrow x=\frac{270}{4}=67.5\quad Q(67.5;20)$$

Не смущаемся, что координаты не целые, ведь количество центнеров компота может быть дробным. Найдем значения целевой функции в точках P и Q.

Формула 160

$$p(P)=600*20+650*62=12000+40300=52\ 300$$

$$p(Q)=600*67.5+650*20=53\ 500$$

Подтверждаем, что

Формула 161

$$53\ 500=p(Q)>p(P)=52\ 300$$

Вывод. Максимально возможная прибыль завода за один день составит 53 500 рублей, для достижения такой прибыли в стеклянной таре следует произвести 67,5 центнеров компота, а в жестяной таре – 20 центнеров компота.

Ответ. 53 500.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрим критерии оценивания экономических задач и задач оптимизации.

Таблица 38

Критерии оценивания выполнения этого задания	*Баллы*
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

1 балл выставляется в тех случаях, когда сюжетное условие задачи верно сведено к решению математической (арифметической, алгебраической, функциональной, геометрической) задачи, но именно к решению, а не к отдельному равенству, набору уравнений, уравнению, задающему функцию, и т.п. Предъявленный текст должен включать описание того, как построена модель.

В статистическом отчете[67] о результатах выполнения ЕГЭ-2023 приводятся типичные ошибки при решении задания № 16:

- Ошибки при составлении модели (единый 10-летний период вместо двух периодов по 5 лет, равные выплаты вместо равномерного уменьшения долга, подмена суммы выплаты долгом на начало периода или суммой, на которую уменьшается тело долга);
- Умножение на r вместо r/100;
- Неверно озаглавлены столбцы таблицы;
- Вычислительные ошибки, неверные преобразования.

В среднем с экономической задачей в 2023 году справились 26,63% выпускников.

В том же документе приводятся рекомендации для учителей[68]. Необходимо формировать у обучающихся следующие навыки и умения:

- смысловое чтение;
- выполнение вычислений и преобразований;
- работа по алгоритмам;
- самоконтроль;
- самооценка;
- моделирование различных ситуаций на языке математики.

Рекомендации для учащихся[69]. Необходимо:

- изучать курс математики полностью, независимо от выбора уровня экзамена;
- выполнять домашнее задание к каждому уроку как по вновь изучаемому материалу, так и по материалу на повторение;
- посещать элективный курс по нужным вам темам;
- работать самостоятельно над пробелами, если они есть;

[67] (Панкратьев, 2023)
[68] (Панкратьев, 2023)
[69] (Панкратьев, 2023)

- заниматься математикой дополнительно каждый день (30–60 минут), отрабатывая проблемный материал, особенно геометрию;
- записывать решение полностью, писать разборчиво, не очень мелко, слова не сокращать;
- использовать без доказательства только те факты, которые есть в УМК, допущенных Министерством просвещения;
- проходить мониторинг в течение года для понимания уровня подготовленности.

СПИСОК ФОРМУЛ

Формула 1.....4
Формула 2.....5
Формула 3.....5
Формула 4.....5
Формула 5.....5
Формула 6.....6
Формула 7.....6
Формула 8.....6
Формула 9.....6
Формула 10.....6
Формула 11.....6
Формула 12.....6
Формула 13.....7
Формула 14.....7
Формула 15.....8
Формула 16.....9
Формула 17.....9
Формула 18.....9
Формула 19.....9
Формула 20.....9
Формула 21.....10
Формула 22.....10
Формула 23.....10
Формула 24.....11
Формула 25.....11
Формула 26.....11
Формула 27.....11
Формула 28.....11
Формула 29.....12
Формула 30.....12
Формула 31.....13
Формула 32.....13
Формула 33.....13
Формула 34.....14
Формула 35.....14
Формула 36.....14
Формула 37.....15
Формула 38.....15
Формула 39.....16
Формула 40.....17
Формула 41.....17
Формула 42.....17

Формула 43 18
Формула 44 18
Формула 45 19
Формула 46 20
Формула 47 20
Формула 48 20
Формула 49 20
Формула 50 21
Формула 51 21
Формула 52 21
Формула 53 21
Формула 54 21
Формула 55 22
Формула 56 22
Формула 57 22
Формула 58 22
Формула 59 22
Формула 60 23
Формула 61 23
Формула 62 23
Формула 63 23
Формула 64 23
Формула 65 24
Формула 66 24
Формула 67 25
Формула 68 25
Формула 69 25
Формула 70 25
Формула 71 25
Формула 72 26
Формула 73 26
Формула 74 27
Формула 75 27
Формула 76 27
Формула 77 27
Формула 78 28
Формула 79 28
Формула 80 28
Формула 81 28
Формула 82 28
Формула 83 28
Формула 84 29
Формула 85 29
Формула 86 29

Формула 87 29
Формула 88 29
Формула 89 30
Формула 90 30
Формула 91 30
Формула 92 30
Формула 93 30
Формула 94 30
Формула 95 31
Формула 96 31
Формула 97 31
Формула 98 31
Формула 99 31
Формула 100 32
Формула 101 32
Формула 102 32
Формула 103 32
Формула 104 33
Формула 105 33
Формула 106 33
Формула 107 33
Формула 108 33
Формула 109 33
Формула 110 34
Формула 111 35
Формула 112 35
Формула 113 35
Формула 114 35
Формула 115 36
Формула 116 36
Формула 117 36
Формула 118 36
Формула 119 36
Формула 120 37
Формула 121 38
Формула 122 38
Формула 123 38
Формула 124 39
Формула 125 39
Формула 126 40
Формула 127 40
Формула 128 40
Формула 129 40
Формула 130 41

Формула 131 41
Формула 132 41
Формула 133 41
Формула 134 41
Формула 135 41
Формула 136 42
Формула 137 42
Формула 138 42
Формула 139 42
Формула 140 42
Формула 141 42
Формула 142 42
Формула 143 43
Формула 144 43
Формула 145 44
Формула 146 44
Формула 147 44
Формула 148 45
Формула 149 46
Формула 150 46
Формула 151 47
Формула 152 47
Формула 153 47
Формула 154 48
Формула 155 48
Формула 156 48
Формула 157 48
Формула 158 49
Формула 159 50
Формула 160 50
Формула 161 50

СПИСОК ТАБЛИЦ

Таблица 1 4
Таблица 2 5
Таблица 3 7
Таблица 4 7
Таблица 5 8
Таблица 6 8
Таблица 7 10
Таблица 8 12
Таблица 9 13
Таблица 10 14

Таблица 11 15
Таблица 12 16
Таблица 13 17
Таблица 14 18
Таблица 15 19
Таблица 16 20
Таблица 17 21
Таблица 18 24
Таблица 19 24
Таблица 20 26
Таблица 21 26
Таблица 22 27
Таблица 23 27
Таблица 24 27
Таблица 25 30
Таблица 26 31
Таблица 27 34
Таблица 28 37
Таблица 29 37
Таблица 30 38
Таблица 31 39
Таблица 32 41
Таблица 33 43
Таблица 34 44
Таблица 35 45
Таблица 36 46
Таблица 37 47
Таблица 38 51

СПИСОК ИЛЛЮСТРАЦИЙ

Рисунок 1 22
Рисунок 2 23
Рисунок 3 35
Рисунок 4 45
Рисунок 5 48
Рисунок 6 49
Рисунок 7 49

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

абсцисса вершины параболы 6, 24, 25, 28, 29, 38, 40, 42, 43
Аннуитетный платеж 4, 10
Вклад 4, 5, 7, 8
геометрическая прогрессия 35, 59
динамика счета 4, 5, 6, 8, 12, 15
дифференцирование 6, 24, 25, 28, 29, 38, 40, 42, 43
Дифференцированный платеж 4, 12
задача линейного программирования 49
капитализация 9
кредит .. 2, 4, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19
критические точки 22, 30, 31, 35
математическая модель .. 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 23, 24, 25, 26, 28, 29, 30, 31, 33, 34, 37, 38, 39, 40, 43, 44, 46, 47
метод интервалов 33, 41
первоначальный вклад 4, 5, 6, 8
первообразная 35
погрешность 36
производная 22, 23, 30, 31, 35
промежутки монотонности 22
процентная ставка 9
симплекс 50
сумма арифметической прогрессии ... 13, 20
суммарная прибыль 29
целевая функция 22, 23, 30, 31, 32, 34, 35, 43, 45, 50
Целевая функция 22
целевую функцию 30, 42, 43
человеко-часы 20, 40, 41
экстремум 6, 21, 24, 25, 28, 29, 30, 31, 38, 40, 41, 42, 43, 44

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

4ЕГЭ 4ЕГЭ [В Интернете]. - 2024 г.. - 11 Июль 2024 г.. - https://4ege.ru/.
Skysmart Арифметическая прогрессия: свойства и формулы [В Интернете] // Skysmart. - 2019 г.. - 10 Июль 2024 г.. - https://skysmart.ru/articles/mathematic/arifmeticheskaya-progressiya.
STYDYLIB Свойства функций, непрерывных на замкнутом отрезке [В Интернете] // STUDYLIB. - 2024 г.. - 11 Июль 2024 г.. - https://studylib.ru/doc/367104/1.-svojstva-funkcij--nepreryvnyh-na-zamknutom-otrezke..
Алексенцев Юрий Михайлович Математический портал Mathm [https://www.mathm.ru/index.html]. - Москва : [б.н.], 2024 г..
Википедия Условный экстремум [В Интернете] // Википедия. - 2021 г.. - 10 Июль 2024 г.. - https://ru.wikipedia.org/wiki/Условный_экстремум.
ВТБ Что такое капитализация по вкладу [В Интернете] // ВТБ. - 15 Март 2023 г.. - 10 Июль 2024 г.. - https://www.vtb.ru/articles/chto-takoe-kapitalizaciya-po-vkladu/.
Гущин Дмитрий Дмитриевич [В Интернете]. - 2024 г.. - 09 Июль 2024 г.. - https://math-ege.sdamgia.ru/?redir=1.
Леонова Л. Н. Задачи литнейного программирования и методы их решения. Учебно-методическое пособие [В Интернете] / ред. Новикова Н. П.. - 2017 г.. - 13 Июнь 2024 г.. - https://nizrp.narod.ru/metod/kafpriklmatiif/15.pdf.
Панкратьев Антон Евгеньевич Результаты ГИА-2023 и планируемые изменения КИМ ЕГЭ 2024 по предмету "Математика" [В Интернете] // rcoi.mcko.ru. - 2023 г.. - 13 Июнь 2024 г.. - http://rcoi.mcko.ru/resources/upload/RichFilemanager/documents/2023-2024/sov_vebinar/Форсайт-сессия_ЕГЭ_по_математике_МЦКО_2023.pdf.
Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов [Книга]. - Москва : [б.н.], 1985. - Т. 2 : стр. 288-290.
РБК Аннуитетный платеж по ипотеке: особенности и подводные камни [В Интернете] // РБК. - 2021 г.. - 09 Июль 2024 г.. - https://realty.rbc.ru/news/60198d4b9a79473f5bd02824.
РБК Дифференцированный платеж по ипотеке: что надо знать [В Интернете] // РБК. - 2021 г.. - 10 Июль 2024 г.. - https://realty.rbc.ru/news/60199d7a9a79474477ba4021.
Фихтенгольц Григорий Михайлович Курс дифференциального и интегрального исчисления [Книга] / ред. Флоринский А. А.. - Санкт-Петербург : ФИЗМАТЛИТ, 2001. - Т. 1.
Фоксфорд Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии [В Интернете] // Фоксфорд. - 2024 г.. - 12 Июль 2024 г.. - https://foxford.ru/wiki/matematika/summa-beskonechnoj-geometricheskoj-progressii?utm_referrer=https%3A%2F%2Fyandex.ru%2F.
Школково Каталог заданий по ЕГЭ - Математика [В Интернете] // Школково. - 2023 г.. - 08 Июль 2024 г.. - https://3.shkolkovo.online/catalog?SubjectId=1.
ЯКласс Вершина параболы [В Интернете] // Якласс. - 2022 г.. - 09 Июль 2024 г.. - https://www.yaklass.ru/p/algebra/8-klass/kvadratichnaia-funktciia-y-ax-funktciia-y-k-x-11012/kvadratichnaia-funktciia-y-ax-bx-c-9108/re-92d9d602-f9c6-43f6-8f78-6f80b2c8227a.

Яковлев Игорь Вячеславович Метод интервалов [В Интернете] // math us. - 2024 г.. - 11 Июль 2024 г.. - https://mathus.ru/math/metod-intervalov.pdf.