«УТВЕРЖДАЮ»
Директор
ФГБНУ «Федеральный институт
педагогических измерений»

_____ О.А. Решетникова
«_12_» _ноября_ 2026 г.

«СОГЛАСОВАНО»
Председатель
Научно-методического совета
ФГБНУ «ФИПИ» по математике

_____ Д.В. Ливанов
«_12_» _ноября_ 2026 г.

Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Демонстрационный вариант контрольных измерительных материалов единого государственного экзамена 2027 года по математике

Профильный уровень

подготовлен Федеральным государственным бюджетным научным учреждением

«ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ»

Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Пояснения к демонстрационному варианту контрольных измерительных материалов единого государственного экзамена 2027 года по МАТЕМАТИКЕ

Профильный уровень

При ознакомлении с демонстрационным вариантом контрольных измерительных материалов (КИМ) единого государственного экзамена (ЕГЭ) 2027 г. следует иметь в виду, что задания, включённые в него, не отражают всех элементов содержания, которые будут проверяться с помощью вариантов КИМ в 2027 г. Полный перечень элементов содержания, которые могут контролироваться на едином государственном экзамене 2027 г., приведён в кодификаторе проверяемых требований к результатам освоения основной образовательной программы среднего общего образования и элементов содержания для проведения единого государственного экзамена по математике.

В демонстрационном варианте представлены конкретные примеры заданий, не исчерпывающие всего многообразия возможных формулировок заданий на каждой позиции варианта экзаменационной работы.

Назначение демонстрационного варианта заключается в том, чтобы дать возможность любому участнику ЕГЭ и широкой общественности составить представление о структуре будущих КИМ, количестве заданий, об их форме и уровне сложности.

Приведённые критерии оценки выполнения заданий с развёрнутым ответом, включённые в этот вариант, дают представление о требованиях к полноте и правильности записи развёрнутого ответа.

В демонстрационном варианте представлено по несколько примеров заданий на некоторых позициях экзаменационной работы. В реальных вариантах экзаменационной работы на каждой позиции будет предложено только одно задание.

Эти сведения позволят выпускникам выработать стратегию подготовки к ЕГЭ в 2027 г.

© 2027 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

Демонстрационный вариант контрольных измерительных материалов единого государственного экзамена 2027 года по МАТЕМАТИКЕ

Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.

КИМ Ответ: -0,8 | -0,8 | Бланк

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

При выполнении работы разрешается использовать линейку.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, чтобы ответ на каждое задание в бланках ответов № 1 и № 2 был записан под правильным номером.

Желаем успеха!

Справочные материалы

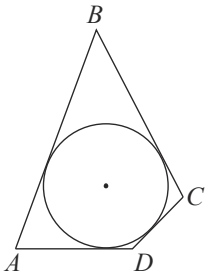
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

© 2027 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

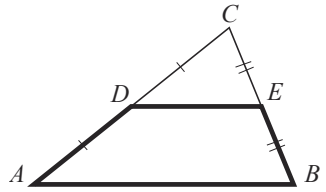
1 В четырёхугольник $ABCD$, периметр которого равен 22, вписана окружность, $AB = 8$. Найдите длину стороны CD.



Ответ: _____.

ИЛИ

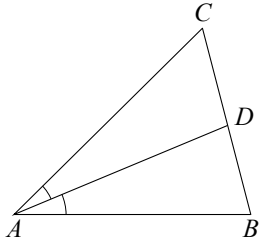
Площадь треугольника ABC равна 60, DE — средняя линия, параллельная стороне AB. Найдите площадь трапеции $ABED$.



Ответ: _____.

ИЛИ

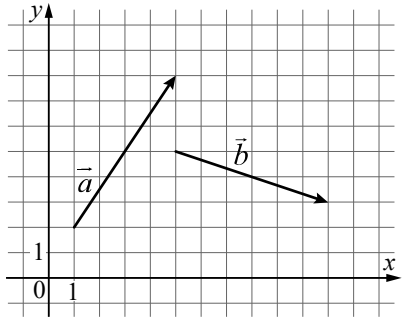
В треугольнике ABC угол C равен 54°, AD — биссектриса, угол BAD равен 23°. Найдите величину угла ADB. Ответ дайте в градусах.



Ответ: _____.

© 2027 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

2 На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найдите скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}$.



Ответ: _____.

ИЛИ

Даны векторы $\vec{a}(2;2)$ и $\vec{b}(2;-2)$. Найдите длину вектора $7\vec{a}+\vec{b}$.

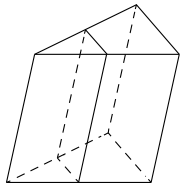
Ответ: _____.

ИЛИ

Даны векторы $\vec{a}(5;3)$ и $\vec{b}(4;-6)$. Найдите скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

Ответ: _____.

3 Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Площадь боковой поверхности отсечённой треугольной призмы равна 18. Найдите площадь боковой поверхности исходной призмы.

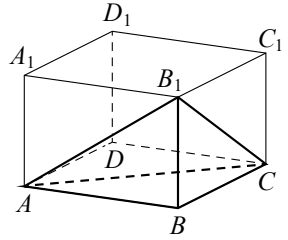


Ответ: _____.

© 2027 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

ИЛИ

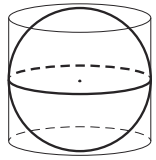
В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $AB=9$, $BC=6$, $AA_1=5$. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, B_1.



Ответ: _____.

ИЛИ

Цилиндр, объём которого равен 18, описан около шара. Найдите объём шара.



Ответ: _____.

4 В сборнике билетов по химии всего 80 билетов, в 56 из них встречается вопрос по теме «Углеводороды». Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику **не достанется** вопрос по теме «Углеводороды».

Ответ: _____.

ИЛИ

Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 20 пассажиров, равна 0,94. Вероятность того, что окажется меньше 15 пассажиров, равна 0,56. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 15 до 19 включительно.

Ответ: _____.

ИЛИ

В соревнованиях по толканию ядра участвуют спортсмены из четырёх стран: 14 из Аргентины, 10 из Бразилии, 15 из Парагвая и 11 из Уругвая. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, выступающий первым, окажется из Бразилии.

Ответ: _____.

© 2027 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

5 Стрелок стреляет по одному разу в каждую из четырёх мишеней. Вероятность попадания в мишень при каждом отдельном выстреле равна 0,9. Найдите вероятность того, что стрелок попадёт в две первые мишени и не попадёт в две последние.

Ответ: _____.

ИЛИ

Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,2. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля качества. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,95. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,05. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная батарейка будет забракована системой контроля.

Ответ: _____.

ИЛИ

При выпечке хлеба производится контрольное взвешивание свежей буханки. Известно, что вероятность того, что её масса окажется меньше 810 г, равна 0,96. Вероятность того, что масса буханки окажется больше 790 г, равна 0,82. Найдите вероятность того, что масса буханки окажется больше 790 г, но меньше 810 г.

Ответ: _____.

© 2027 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

6 Найдите корень уравнения $4^{x-4}=64$.

Ответ: _____.

ИЛИ

Найдите корень уравнения $\sqrt{99-7x}=6$.

Ответ: _____.

ИЛИ

Найдите корень уравнения $\log_8(5x+47)=3$.

Ответ: _____.

7 Найдите значение выражения $\dfrac{3\sin 164^\circ}{\sin 82^\circ \cdot \sin 8^\circ}$.

Ответ: _____.

ИЛИ

Найдите значение выражения $\log_{0,6}50-\log_{0,6}18$.

Ответ: _____.

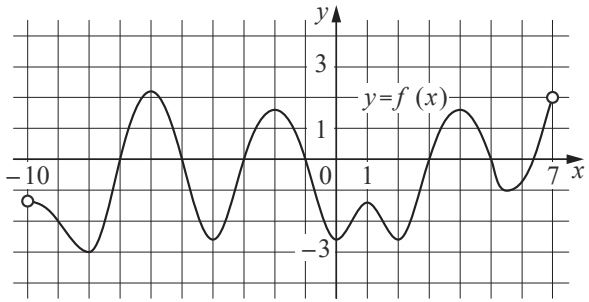
ИЛИ

Найдите значение выражения $25^{2\sqrt{8}+3}\cdot 5^{-3-4\sqrt{8}}$.

Ответ: _____.

© 2027 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

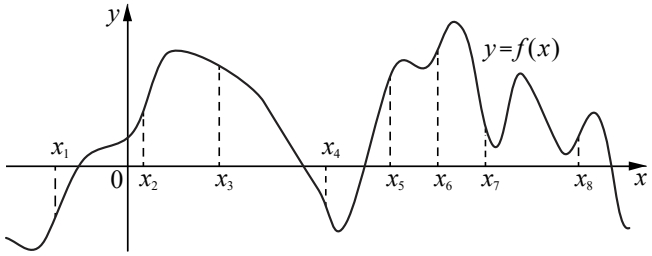
8 На рисунке изображён график $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-10;7)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-2;6]$.



Ответ: _____.

ИЛИ

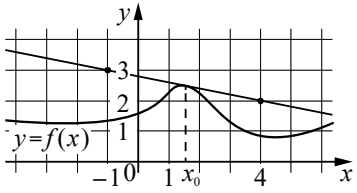
На рисунке изображён график функции $y=f(x)$. На оси абсцисс отмечено восемь точек: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8. Найдите количество отмеченных точек, в которых производная функции $f(x)$ отрицательна.



Ответ: _____.

ИЛИ

На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ: _____.

© 2027 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

9 Автомобиль, движущийся со скоростью $v_0=15$ м/с, начал торможение с постоянным ускорением $a=2$ м/с^2. За t секунд после начала торможения он прошёл путь $S=v_0t-\frac{at^2}{2}$ (м). Определите время, прошедшее с момента начала торможения, если известно, что за это время автомобиль проехал 36 метров. Ответ дайте в секундах.

Ответ: _____.

ИЛИ

В телевизоре ёмкость высоковольтного конденсатора $C=8\cdot10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключён резистор с сопротивлением $R=5\cdot10^6$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0=56$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (в киловольтах) за время (в секундах), определяемое выражением $t=\alpha RC\log_2\frac{U_0}{U}$, где $\alpha=1{,}5$ — постоянная. Определите напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло 180 секунд. Ответ дайте в киловольтах.

Ответ: _____.

ИЛИ

Автомобиль разгоняется на прямолинейном участке шоссе с постоянным ускорением a (в км/ч^2). Скорость v (в км/ч) вычисляется по формуле $v=\sqrt{2la}$, где l — пройденный автомобилем путь (в км). Найдите ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав 0,3 км, развить скорость 120 км/ч. Ответ дайте в км/ч^2.

Ответ: _____.

© 2027 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

10 Два велосипедиста одновременно отправились в 90-километровый пробег. Первый ехал со скоростью, на 5 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 3 часа раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, пришедшего к финишу первым. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____.

ИЛИ

Смешав 45%-ный и 97%-ный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 62%-ный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50%-ного раствора той же кислоты, то получили бы 72%-ный раствор кислоты. Сколько килограммов 45%-ного раствора использовали для получения смеси?

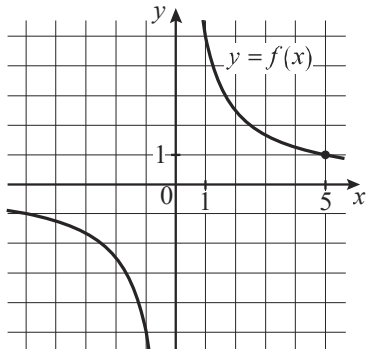
Ответ: _____.

ИЛИ

Заказ на изготовление 112 деталей первый рабочий выполняет на 1 час быстрее, чем второй. Сколько деталей за час изготавливает второй рабочий, если известно, что первый за час изготавливает на 2 детали больше?

Ответ: _____.

11 На рисунке изображён график функции вида $f(x)=\frac{k}{x}$. Найдите значение $f(10)$.

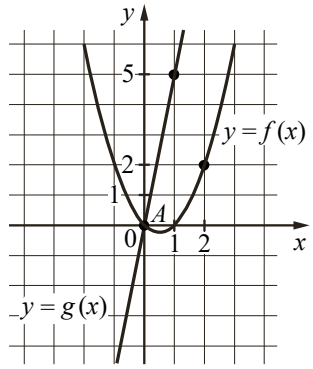


Ответ: _____.

© 2027 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

ИЛИ

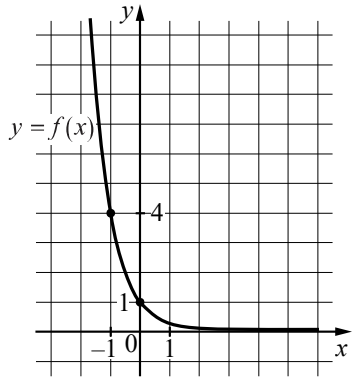
На рисунке изображены графики функций $f(x)=ax^2+bx+c$ и $g(x)=kx$, пересекающиеся в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.



Ответ: _____.

ИЛИ

На рисунке изображён график функции вида $f(x)=a^x$. Найдите значение $f(-3)$.



Ответ: _____.

© 2027 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

12 Найдите точку максимума функции $y = 9 \cdot \ln(x-4) - 9x - 7$.

Ответ: _____.

ИЛИ

Найдите точку максимума функции $y = (x+8)^2 \cdot e^{3-x}$.

Ответ: _____.

ИЛИ

Найдите точку максимума функции $y = x^3 + 27x^2 + 11$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

© 2027 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\cos 2x + \sqrt{2}\cos(x+\pi) + 1 = 0$.

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

ИЛИ

а) Решите уравнение $4\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) + 2\sqrt{2}\cos(\pi - x) = 2$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{17\pi}{2}; 10\pi\right]$.

14 В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ точки M и K — середины боковых рёбер SA и SD соответственно.
а) Докажите, что прямые BC и MK параллельны.
б) Найдите объём пирамиды $MABF$, если $AB = 12$, а угол между плоскостью BMC и плоскостью основания пирамиды $SABCDEF$ равен 30°.

ИЛИ

В правильном тетраэдре $ABCD$ все рёбра равны 6. На рёбрах AB и AD отмечены точки M и K соответственно так, что $AM = AK = 4$.
а) Докажите, что плоскость CMK делит тетраэдр $ABCD$ на два многогранника, объёмы которых относятся как $5:4$.
б) Найдите косинус угла между прямой AC и плоскостью CMK.

15 Решите неравенство $2^{\log_2(\log_2 x)} + \log_4^2 x - 3 \le 0$.

ИЛИ

Решите неравенство $\frac{2 \cdot 8^{x-1}}{2 \cdot 8^{x-1} - 1} \ge \frac{3}{8^x - 1} + \frac{8}{64^x - 5 \cdot 8^x + 4}$.

© 2027 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

16 В июле 2027 года планируется взять кредит на десять лет в размере 800 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг будет возрастать на r % по сравнению с концом предыдущего года (r — целое число);
– с февраля по июнь каждого года необходимо оплатить одним платежом часть долга;
– в июле 2028, 2029, 2030, 2031 и 2032 годов долг должен быть на какую-то одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
– в июле 2032 года долг должен составить 200 тыс. рублей;
– в июле 2033, 2034, 2035, 2036 и 2037 годов долг должен быть на другую одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
– к июлю 2037 года долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что сумма всех платежей после полного погашения кредита будет равна 1480 тыс. рублей. Найдите r.

ИЛИ

15 декабря 2027 года планируется взять кредит в банке на сумму A млн рублей на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3 % по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо одним платежом оплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
– к 15 декабря 2029 года кредит должен быть полностью погашен.

Чему равно A, если общая сумма платежей в 2029 году составит 17 925 тыс. рублей?

17 Окружность с центром O касается боковых сторон AB и BC равнобедренного остроугольного треугольника ABC и его высоты CH.

а) Докажите, что $\angle OAC = 45°$.

б) Найдите длину отрезка BC, если $BO = 1$ и $AC = 6$.

ИЛИ

Окружность с центром в точке O касается сторон угла с вершиной N в точках A и B. Отрезок BC — диаметр этой окружности.

а) Докажите, что прямая AC параллельна биссектрисе угла ANB.

б) Найдите длину отрезка NO, если известно, что $AC = 10$ и $AB = 24$.

© 2027 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

18 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 4x - y + a = 0, \\ 2|y| - x^2 + 4x = 0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

ИЛИ

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$ax^4 - 2x^3 + \left(a^3 - a\right)x^2 - \left(2a^2 - 2\right)x = -ax^3 + 2x^2 - \left(a^3 - a\right)x + 2a^2 - 2$$

имеет ровно два различных корня.

19 На столе лежит некоторое количество карточек, часть из которых синего цвета, а остальные красного (есть хотя бы по одной карточке каждого цвета). На каждой карточке написано целое число. На карточках синего цвета написаны различные числа, делящиеся на 5, а на карточках красного цвета написаны различные чётные числа (при этом некоторые числа могут быть написаны дважды: один раз на синей карточке и один раз на красной карточке). Все числа на карточках больше −120.

Оказалось, что наибольшее число, написанное на красной карточке, равно удвоенному количеству синих карточек, а наибольшее число, написанное на синей карточке, равно количеству красных карточек.

а) Может ли на столе лежать ровно шесть карточек?

б) Может ли число красных карточек на столе быть на 90 больше числа синих карточек на столе?

в) Какое наибольшее количество карточек может лежать на столе?

ИЛИ

Есть 16 монет по 2 рубля и 29 монет по 5 рублей.

а) Можно ли этими монетами набрать сумму 175 рублей?

б) Можно ли этими монетами набрать сумму 176 рублей?

в) Какое наименьшее количество монет, каждая по 1 рублю, нужно добавить, чтобы иметь возможность набрать любую целую сумму от 1 рубля до 180 рублей включительно?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

© 2027 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

Система оценивания экзаменационной работы по математике (профильный уровень)

Правильное выполнение каждого из заданий 1–12 оценивается 1 баллом. Задание считается выполненным верно, если ответ записан в той форме, которая указана в инструкции по выполнению задания, и полностью совпадает с эталоном ответа.

Номер задания	Правильный ответ		
	Пример 1	Пример 2	Пример 3
1	3	45	77
2	12	20	2
3	36	45	12
4	0,3	0,38	0,2
5	0,0081	0,23	0,78
6	7	9	93
7	6	–2	125
8	1	3	–0,2
9	3	7	24 000
10	15	15	14
11	0,5	6	64
12	5	–6	–18

© 2027 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

Решения и критерии оценивания выполнения заданий с развёрнутым ответом

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным; все возможные случаи должны быть рассмотрены. **Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается 0 баллов.**

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках, входящих в федеральный перечень учебников, допущенных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

13 а) Решите уравнение $\cos 2x + \sqrt{2}\cos(x+\pi) + 1 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

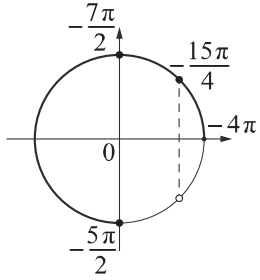
Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде:

$2\cos^2 x - 1 + \sqrt{2}(-\cos x) + 1 = 0$; $2\cos^2 x - \sqrt{2}\cos x = 0$; $\cos x \cdot \left(2\cos x - \sqrt{2}\right) = 0$.

Значит, $\cos x = 0$, откуда $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, или $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, откуда $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, или $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.



Получим числа: $-\frac{15\pi}{4}$; $-\frac{7\pi}{2}$; $-\frac{5\pi}{2}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{4} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$;

б) $-\frac{15\pi}{4}$; $-\frac{7\pi}{2}$; $-\frac{5\pi}{2}$.

© 2027 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

ИЛИ

а) Решите уравнение $4\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+2\sqrt{2}\cos(\pi-x)=2$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{17\pi}{2};\,10\pi\right]$.

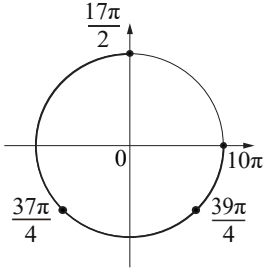
Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$4\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-2\sqrt{2}\cos x=2,\ 2\sqrt{2}\cos x-2\sqrt{2}\sin x-2\sqrt{2}\cos x=2,$$

$$-2\sqrt{2}\sin x=2.$$

Значит, $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, откуда $x=-\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$, или $x=-\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.



б) С помощью числовой окружности найдём корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{17\pi}{2};\,10\pi\right]$.

Получим числа: $\frac{37\pi}{4};\,\frac{39\pi}{4}$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z};\ -\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$;

б) $\frac{37\pi}{4};\,\frac{39\pi}{4}$.

© 2027 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

14 В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ точки M и K — середины боковых рёбер SA и SD соответственно.

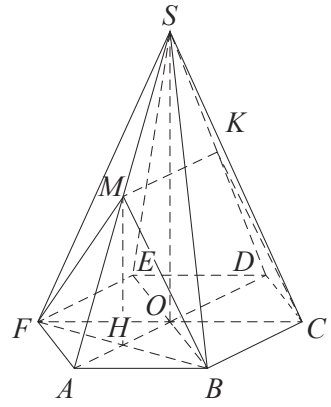
а) Докажите, что прямые BC и MK параллельны.

б) Найдите объём пирамиды $MABF$, если $AB=12$, а угол между плоскостью BMC и плоскостью основания пирамиды $SABCDEF$ равен 30°.

Решение.

а) В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ диагональ AD параллельна стороне BC.

Отрезок MK — средняя линия треугольника ASD, параллельная стороне AD. Следовательно, прямые BC и MK параллельны.



б) Пусть O — центр правильного шестиугольника $ABCDEF$, а H — точка пересечения диагоналей параллелограмма $BAFO$, тогда H — середина диагонали AO, значит, MH — средняя линия треугольника SOA, параллельная стороне SO. Следовательно, отрезок MH — высота пирамиды $MABF$.

Центр O описанной около треугольника BFC окружности лежит на его стороне FC, поэтому $\angle FBC=90°$. Таким образом, прямая BC перпендикулярна прямым MH и BF, значит, прямая BC перпендикулярна плоскости BMF. Плоскость основания пирамиды $SABCDEF$ пересекается с плоскостью BMC по прямой BC, следовательно, $\angle MBF=30°$. Значит,

$$MH=BH\cdot\operatorname{tg}30°=\frac{1}{2}BF\cdot\operatorname{tg}30°=\frac{1}{2}AB\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=6.$$

Площадь S_{ABF} треугольника ABF равна $\frac{1}{2}AB\cdot AF\cdot\sin\angle BAF=36\sqrt{3}$.

Следовательно, объём пирамиды $MABF$ равен

$$\frac{1}{3}MH\cdot S_{ABF}=72\sqrt{3}.$$

Ответ: б) $72\sqrt{3}$.

© 2027 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, но при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*3*

ИЛИ

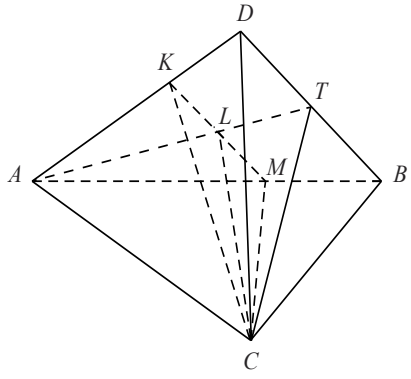
В правильном тетраэдре $ABCD$ все рёбра равны 6. На рёбрах AB и AD отмечены точки M и K соответственно так, что $AM = AK = 4$.

а) Докажите, что плоскость CMK делит тетраэдр $ABCD$ на два многогранника, объёмы которых относятся как $5:4$.

б) Найдите косинус угла между прямой AC и плоскостью CMK.

Решение.

а) Плоскость CMK делит тетраэдр $ABCD$ на четырёхугольную пирамиду $CBMKD$ с вершиной C и треугольную пирамиду $CMAK$ с той же вершиной. Основания этих пирамид лежат в плоскости ABD, значит, высоты этих пирамид совпадают. Следовательно, объёмы этих пирамид относятся так же, как площади их оснований: четырёхугольника $BMKD$ и треугольника MAK.



Поскольку $AM : MB = AK : KD = 2:1$, прямые MK и BD параллельны, а треугольники MAK и BAD подобны с коэффициентом подобия $\frac{2}{3}$. Значит, площади этих треугольников относятся как $4:9$. Треугольник BAD состоит из треугольника MAK и трапеции $BMKD$. Значит, площадь трапеции $BMKD$

© 2027 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

составляет $\frac{5}{9}$ площади треугольника BAD, а площади трапеции $BMKD$ и треугольника MAK относятся как $5:4$, следовательно, объёмы многогранников $CBMKD$ и $CMAK$ относятся как $5:4$.

б) Пусть T — середина отрезка BD, а L — точка пересечения AT и MK. Тогда AT и CT — высоты равносторонних треугольников ABD и CBD соответственно. Значит, плоскость ACT перпендикулярна прямой BD, а значит, и прямой MK, лежащей в плоскости CMK. Следовательно, плоскости ACT и CMK перпендикулярны, поэтому искомый угол равен углу ACL.

В треугольнике ACT:

$$AT = CT = BC \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3};\ AL = \frac{AM}{AB} \cdot AT = 2\sqrt{3};$$

$$\cos\angle TAC = \frac{AC}{2AT} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

В треугольнике ACL:

$$CL = \sqrt{AC^2 + AL^2 - 2AC \cdot AL \cdot \cos\angle LAC} = 2\sqrt{6}.$$

Следовательно,

$$\cos\angle ACL = \frac{AC^2 + CL^2 - AL^2}{2AC \cdot CL} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Ответ: б) $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, но при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*3*

© 2027 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

15 Решите неравенство $2^{\log_2(\log_2 x)}+\log_4^2 x-3\le 0$.

Решение.

Выражение в левой части неравенства определено при $\log_2 x>0$, то есть при $x>1$. При выполнении этого ограничения неравенство принимает вид:

$$\log_2 x+0{,}25\cdot\log_2^2 x-3\le 0;\ (\log_2 x+6)\cdot(\log_2 x-2)\le 0.$$

Значение выражения $\log_2 x+6$ положительно при всех допустимых значениях x. Следовательно,

$$\log_2 x-2\le 0,$$

откуда $x\le 4$. Учитывая ограничение, получаем: $1<x\le 4$.

Ответ: $(1;4]$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки 4, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

© 2027 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

ИЛИ

Решите неравенство $\dfrac{2\cdot 8^{x-1}}{2\cdot 8^{x-1}-1}\ge\dfrac{3}{8^x-1}+\dfrac{8}{64^x-5\cdot 8^x+4}$.

Решение.

Пусть $t=8^x$, тогда неравенство примет вид:

$$\frac{t}{t-4}\ge\frac{3}{t-1}+\frac{8}{t^2-5t+4};\ \frac{t^2-t}{(t-1)(t-4)}-\frac{3t-12}{(t-1)(t-4)}-\frac{8}{(t-1)(t-4)}\ge 0;$$

$$\frac{t^2-4t+4}{(t-1)(t-4)}\ge 0;\ \frac{(t-2)^2}{(t-1)(t-4)}\ge 0,$$

откуда $t<1$; $t=2$; $t>4$.

При $t<1$ получим: $8^x<1$, откуда $x<0$.

При $t=2$ получим: $8^x=2$, откуда $x=\dfrac{1}{3}$.

При $t>4$ получим: $8^x>4$, откуда $x>\dfrac{2}{3}$.

Решение исходного неравенства: $x<0$; $x=\dfrac{1}{3}$; $x>\dfrac{2}{3}$.

Ответ: $(-\infty;0);\ \dfrac{1}{3};\ \left(\dfrac{2}{3};+\infty\right)$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки $\frac{1}{3}$, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

© 2027 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

16 В июле 2027 года планируется взять кредит на десять лет в размере 800 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг будет возрастать на r % по сравнению с концом предыдущего года (r — целое число);
– с февраля по июнь каждого года необходимо оплатить одним платежом часть долга;
– в июле 2028, 2029, 2030, 2031 и 2032 годов долг должен быть на какую-то одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
– в июле 2032 года долг должен составить 200 тыс. рублей;
– в июле 2033, 2034, 2035, 2036 и 2037 годов долг должен быть на другую одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
– к июлю 2037 года долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что сумма всех платежей после полного погашения кредита будет равна 1480 тыс. рублей. Найдите r.

Решение.

По условию долг (в тыс. рублей) по состоянию на июль должен уменьшаться следующим образом:

$$800;\ 680;\ 560;\ 440;\ 320;\ 200;\ 160;\ 120;\ 80;\ 40;\ 0.$$

Пусть $k=1+\dfrac{r}{100}$. Тогда последовательность размеров долга (в тыс. рублей) по состоянию на январь такова:

$$800k;\ 680k;\ 560k;\ 440k;\ 320k;\ 200k;\ 160k;\ 120k;\ 80k;\ 40k.$$

Следовательно, платежи (в тыс. рублей) должны быть следующими:

$$800k-680;\ 680k-560;\ 560k-440;\ 440k-320;\ 320k-200;$$
$$200k-160;\ 160k-120;\ 120k-80;\ 80k-40;\ 40k.$$

Значит, сумма всех платежей (в тыс. рублей) будет составлять:

$$5(560k-440)+5(120k-80)=3400k-2600.$$

Получаем: $3400k-2600=1480$, откуда $k=1{,}2$ и $r=20$.

Ответ: 20.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

© 2027 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

ИЛИ

15 декабря 2027 года планируется взять кредит в банке на сумму A млн рублей на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3 % по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо одним платежом оплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
– к 15 декабря 2029 года кредит должен быть полностью погашен.

Чему равно A, если общая сумма платежей в 2029 году составит 17 925 тыс. рублей?

Решение.

По условию долг перед банком по состоянию на 15-е число каждого месяца должен уменьшаться на $\dfrac{1000A}{24}=\dfrac{125A}{3}$ тыс. рублей, следовательно, по состоянию на 15 декабря 2028 года и на 15-е число каждого месяца 2029 года долг (в тыс. рублей) должен уменьшаться до нуля следующим образом:

$$500A;\ \frac{1375A}{3};\ \frac{1250A}{3};\ \ldots;\ \frac{250A}{3};\ \frac{125A}{3};\ 0.$$

Первого числа каждого месяца 2029 года долг возрастает на 3 %, значит, последовательность размеров долга (в тыс. рублей) по состоянию на 1-е число такова:

$$1{,}03\cdot 500A;\ 1{,}03\cdot\frac{1375A}{3};\ \ldots;\ 1{,}03\cdot\frac{250A}{3};\ 1{,}03\cdot\frac{125A}{3}.$$

Следовательно, платежи (в тыс. рублей) должны быть следующими:

$$\frac{125A}{3}+15A;\ \frac{125A}{3}+13{,}75A;\ \ldots;\ \frac{125A}{3}+2{,}5A;\ \frac{125A}{3}+1{,}25A.$$

Всего следует выплатить в 2029 году

$$12\cdot\frac{170A+128{,}75A}{2\cdot 3}=597{,}5A \text{ тыс. рублей,}$$

откуда $597{,}5A=17\,925$; $A=30$.

Ответ: 30.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

© 2027 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

17 Окружность с центром O касается боковых сторон AB и BC равнобедренного остроугольного треугольника ABC и его высоты CH.

а) Докажите, что $\angle OAC = 45°$.

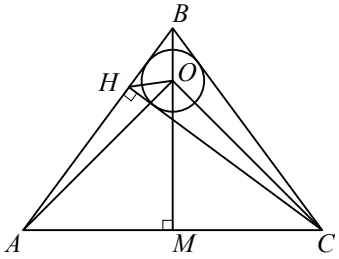
б) Найдите длину отрезка BC, если $BO = 1$ и $AC = 6$.

Решение.

а) Пусть $\angle BAC = \angle BCA = \alpha$. Тогда:

$\angle ABC = 180° - \angle BAC - \angle BCA = 180° - 2\alpha$;

$\angle BCH = 180° - \angle HBC - \angle BHC = 2\alpha - 90°$.



Поскольку CO — биссектриса угла $\angle BCH$, $\angle BCO = \dfrac{\angle BCH}{2} = \alpha - 45°$, значит, $\angle ACO = \angle ACB - \angle BCO = 45°$.

Луч HO — биссектриса прямого угла $\angle BHC$, значит: $\angle BHO = \angle CHO = 45°$; $\angle AHO = 135°$.

Таким образом, сумма углов AHO и ACO четырёхугольника $AHOC$ равна 180°, а значит, около него можно описать окружность. Следовательно, $\angle OAC = \angle OHC = 45°$.

б) Поскольку около четырёхугольника $AHOC$ можно описать окружность, получаем: $\angle AOC = \angle AHC = 90°$. Пусть точка M — середина отрезка AC. Тогда отрезок OM является медианой прямоугольного треугольника AOC, проведённой к гипотенузе, значит, $OM = \dfrac{1}{2}AC = 3$.

Отрезок BM — медиана равнобедренного треугольника ABC, а значит, BM является его высотой и биссектрисой, то есть центр O окружности, вписанной в треугольник CBH, лежит на отрезке BM. Таким образом, $BM = BO + OM = 4$.

Следовательно, по теореме Пифагора имеем:

$$BC = \sqrt{BM^2 + MC^2} = \sqrt{BM^2 + \frac{AC^2}{4}} = 5.$$

Ответ: б) 5.

© 2027 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

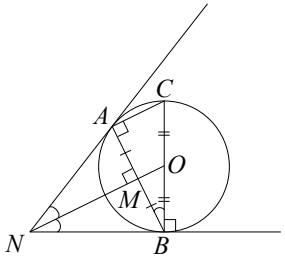
Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, но при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*3*

© 2027 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

ИЛИ

Окружность с центром в точке O касается сторон угла с вершиной N в точках A и B. Отрезок BC — диаметр этой окружности.
а) Докажите, что прямая AC параллельна биссектрисе угла ANB.
б) Найдите длину отрезка NO, если известно, что $AC=10$ и $AB=24$.

Решение.
а) Треугольник ANB равнобедренный с основанием AB. Следовательно, биссектриса NO угла ANB перпендикулярна прямой AB.
Угол BAC опирается на диаметр окружности. Значит, этот угол прямой. Биссектриса угла ANB параллельна прямой AC, поскольку обе эти прямые перпендикулярны прямой AB.



б) Обозначим точку пересечения отрезков AB и NO через M. Тогда M — середина AB, а MO — средняя линия треугольника ABC. Значит: $MB=\frac{AB}{2}=12$, $MO=\frac{AC}{2}=5$. Следовательно, по теореме Пифагора $OB=\sqrt{OM^2+MB^2}=13$.
Прямоугольные треугольники MOB и BON подобны с коэффициентом подобия $\frac{OB}{OM}=\frac{13}{5}$, откуда получим: $ON=\frac{OB}{OM}\cdot OB=\frac{169}{5}$.

Ответ: б) $\frac{169}{5}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, но при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*3*

© 2027 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

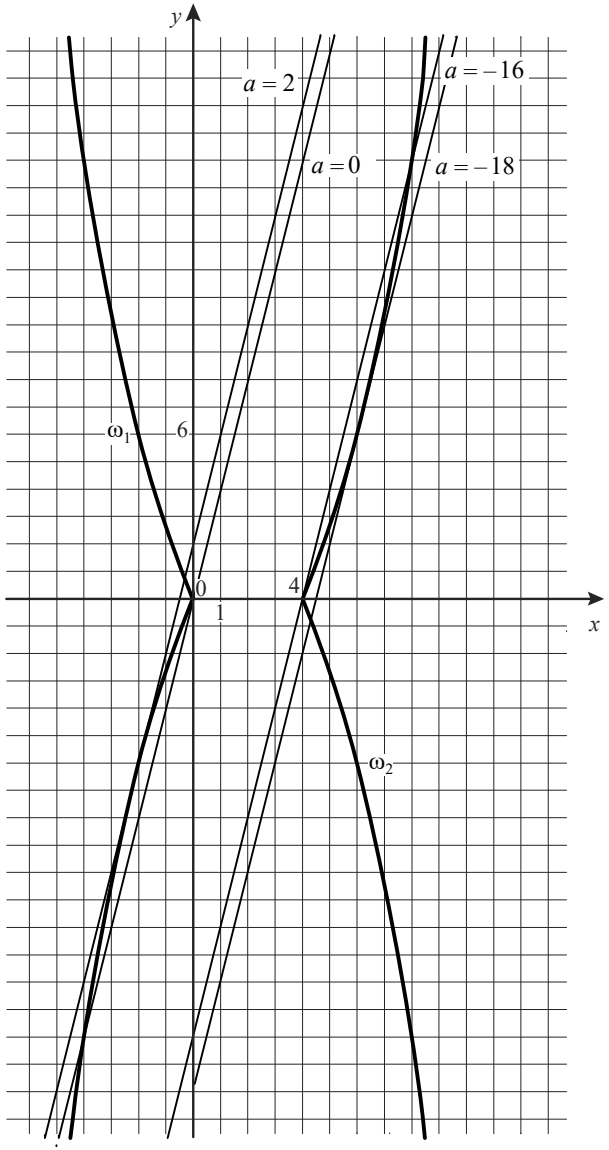
18 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}4x-y+a=0,\\ 2|y|-x^2+4x=0\end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Решение.
Уравнение $4x-y+a=0$ задаёт для каждого значения a на плоскости Oxy прямую l, параллельную прямой $y=4x$ (или совпадающую с ней).
Уравнение $2|y|-x^2+4x=0$ задаёт на плоскости Oxy множество точек, представляющее собой объединение частей ω_1 параболы $y=\frac{1}{2}(x-2)^2-2$, соответствующих $y\geq 0$ (при $x\leq 0$ и при $x\geq 4$), и частей ω_2 параболы $y=-\frac{1}{2}(x-2)^2+2$, соответствующих $y<0$ (при $x<0$ и при $x>4$).
Рассмотрим расположение прямой l и частей параболы ω_1.
При $a=0$ прямая проходит через концевую точку $(0;0)$, при $a=-16$ — через концевую точку $(4;0)$.
Найдём значение a, при котором прямая $y=4x+a$ и парабола $2y-x^2+4x=0$ касаются, то есть имеют ровно одну общую точку. В этом случае уравнение $4x+a=\frac{x^2-4x}{2}$ должно иметь единственный корень. Запишем это уравнение в виде $x^2-12x-2a=0$, дискриминант этого квадратного уравнения $D=144+8a$. При условии $D=0$, которое выполнено при $a=-18$, уравнение имеет единственный корень $x=6$. Значит, касание прямой и параболы происходит при $a=-18$, причём точка касания имеет координаты $(6;6)$. Эта точка принадлежит одновременно части параболы ω_1 и прямой l.
При $a<-18$ общих точек у прямой l и частей параболы ω_1 нет.
При $a>-18$ прямая l и парабола $2y-x^2+4x=0$ имеют две общие точки, их абсциссы $6-\sqrt{36+2a}$ и $6+\sqrt{36+2a}$.
При $-16<a<0$ число $6-\sqrt{36+2a}$ принадлежит промежутку $(0;4)$, поэтому соответствующая точка пересечения не принадлежит части параболы ω_1.
Таким образом, l и ω_1 имеют две общие точки при $a\geq 0$, одну общую точку при $-16<a<0$, две общие точки при $-18<a\leq -16$, одну общую точку при $a=-18$ и не имеют общих точек при $a<-18$.
Рассмотрим расположение прямой l и частей параболы ω_2.

© 2027 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки



Найдём значение a, при котором прямая $y=4x+a$ и парабола $2y+x^2-4x=0$ касаются, то есть имеют ровно одну общую точку. В этом случае уравнение $4x+a=\dfrac{-x^2+4x}{2}$ должно иметь единственный корень. Запишем это уравнение

© 2027 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

в виде $x^2+4x+2a=0$, дискриминант этого квадратного уравнения $D=16-8a$. При условии $D=0$, которое выполнено при $a=2$, уравнение имеет единственный корень $x=-2$. Значит, касание прямой и параболы происходит при $a=2$, причём точка касания имеет координаты $(-2;-6)$. Эта точка принадлежит одновременно части параболы ω_2 и прямой l.

При $a>2$ общих точек у прямой l и частей параболы ω_2 нет.

При $a<2$ прямая l и парабола $2y+x^2-4x=0$ имеют две общие точки, их абсциссы $-2-\sqrt{4-2a}$ и $-2+\sqrt{4-2a}$.

При $-16\le a\le 0$ число $-2+\sqrt{4-2a}$ принадлежит отрезку $[0;4]$, поэтому соответствующая точка пересечения не принадлежит части параболы ω_2. Таким образом, l и ω_2 имеют две общие точки при $a<-16$, одну общую точку при $-16\le a\le 0$, две общие точки при $0<a<2$, одну общую точку при $a=2$ и не имеют общих точек при $a>2$.

Таким образом, найдено четыре граничных значения параметра: $a=-18$ (система уравнений имеет три решения), $a=-16$ (три решения), $a=0$ (три решения), $a=2$ (три решения).

Система уравнений имеет ровно два решения при $a<-18$, при $-16<a<0$, а также при $a>2$.

Ответ: $a<-18$; $-16<a<0$; $a>2$.

Критерии оценивания выполнения задания	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением точек $a=-18$, $a=-16$, $a=0$ и / или $a=2$	3
С помощью верного рассуждения получен один из промежутков $(-\infty;-18)$, $(-16;0)$ и / или $(2;+\infty)$ множества значений a, возможно, с включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения частей парабол и прямых (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*

© 2027 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

ИЛИ

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$ax^4-2x^3+\left(a^3-a\right)x^2-\left(2a^2-2\right)x=-ax^3+2x^2-\left(a^3-a\right)x+2a^2-2$$

имеет ровно два различных корня.

Решение.

Преобразуем уравнение:

$$(x+1)\cdot\left(ax^3-2x^2+\left(a^3-a\right)x-2a^2+2\right)=0;$$

$$(x+1)\cdot\left(ax^3-2x^2+a^3x-2a^2-ax+2\right)=0;$$

$$(x+1)\cdot\left(x^2+a^2-1\right)\cdot(ax-2)=0.$$

Следовательно, уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l}x=-1,\\ax=2,\\x^2=1-a^2.\end{array}\right.$$

При $a=-2$ исходное уравнение имеет единственный корень -1, при $a=-1$ оно имеет три различных корня: -2, -1 и 0, при $a=1$ тоже три различных корня: -1, 0 и 2, поэтому эти значения a не удовлетворяют условию задачи. При $a=0$ исходное уравнение имеет ровно два различных корня: 1 и -1, что соответствует условию задачи. Если $-1<a<1$ и $a\neq 0$, то уравнение $x^2=1-a^2$ имеет два различных корня: $\sqrt{1-a^2}$ и $-\sqrt{1-a^2}$, отличных от -1, поэтому условия задачи не выполнены. Наконец, если $a<-2$, $-2<a<-1$ или $a>1$, то исходное уравнение имеет ровно два различных корня: -1 и $\frac{2}{a}$.

Ответ: $a<-2$; $-2<a<-1$; $a=0$; $a>1$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением значения $a=-1$ и/или значения $a=1$	3
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением значения $a=-2$ и/или исключением значения $a=0$ и, возможно, включением значений $a=-1$ и/или $a=1$, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Задача верно сведена к исследованию совокупности уравнений	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*

© 2027 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

19 На столе лежит некоторое количество карточек, часть из которых синего цвета, а остальные красного (есть хотя бы по одной карточке каждого цвета). На каждой карточке написано целое число. На карточках синего цвета написаны различные числа, делящиеся на 5, а на карточках красного цвета написаны различные чётные числа (при этом некоторые числа могут быть написаны дважды: один раз на синей карточке и один раз на красной карточке). Все числа на карточках больше -120.

Известно, что наибольшее число, написанное на красной карточке, равно удвоенному количеству синих карточек, а наибольшее число, написанное на синей карточке, равно количеству красных карточек.

а) Может ли на столе лежать ровно шесть карточек?

б) Может ли число красных карточек на столе быть на 90 больше числа синих карточек на столе?

в) Какое наибольшее количество карточек может лежать на столе?

Решение.

а) Если на синей карточке написано число 5, а на пяти красных карточках написаны числа -6, -4, -2, 0 и 2, то условия задачи выполнены.

б) Если на столе s синих карточек и $(s+90)$ красных карточек, то наибольшее число, написанное на красной карточке, не меньше $2(s+90)-120=2s+60$. Это число не может быть равно удвоенному количеству синих карточек.

в) Пусть на синих карточках написано s чисел, наибольшее из которых равно a, а на красных карточках написано k чисел, наибольшее из которых равно b. Тогда выполнены условия: $a\geq 5s-120$, $b\geq 2k-120$, $a=k$, $b=2s$, откуда получаем систему неравенств:

$$\left\{\begin{array}{l}5s-120\leq k,\\2k-120\leq 2s;\end{array}\right.\quad\left\{\begin{array}{l}5s-120\leq k,\\k-60\leq s.\end{array}\right.$$

Следовательно, $5s-120\leq s+60$, откуда $s\leq 45$, а $k\leq 105$. Таким образом, на столе может лежать не больше 150 карточек.

Покажем, что на столе может лежать ровно 150 карточек. Если на 45 синих карточках написаны числа -115, -110, …, 105, а на 105 красных карточках написаны числа -118, -116, …, 90, то условия задачи выполнены.

Ответ: а) да; б) нет; в) 150.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте *в* и обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а* и *б* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *в*	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*

© 2027 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

ИЛИ

Есть 16 монет по 2 рубля и 29 монет по 5 рублей.
а) Можно ли этими монетами набрать сумму 175 рублей?
б) Можно ли этими монетами набрать сумму 176 рублей?
в) Какое наименьшее количество монет, каждая по 1 рублю, нужно добавить, чтобы иметь возможность набрать любую целую сумму от 1 рубля до 180 рублей включительно?

Решение.
а) Если взять 29 монет по 5 рублей и 15 монет по 2 рубля, то получится набрать сумму 175 рублей.
б) Чтобы набрать сумму 176 рублей, нужно чётное количество монет достоинством 5 рублей. Значит, этих монет не больше 28, а сумма их номиналов не превосходит 140 рублей. Таким образом, при помощи монет достоинством 2 рубля нужно набрать не меньше 36 рублей, что невозможно, поскольку при помощи монет по 2 рубля можно набрать не больше 32 рублей.
в) Заметим, что любая сумма, которую можно набрать при помощи имеющихся монет, не превосходит 177 рублей. Следовательно, чтобы набрать 180 рублей, нужно добавить ещё не меньше трёх монет достоинством 1 рубль.
Покажем, что если к имеющимся монетам добавить три монеты по 1 рублю, то можно набрать любую сумму до 180 рублей включительно. Для любой требуемой суммы S возьмём наибольшее количество монет по 5 рублей так, чтобы сумма их номиналов не превосходила S. Тогда останется взять ещё некоторое количество монет на сумму S_1, не превосходящую 35 рублей. Теперь возьмём наибольшее количество монет по 2 рубля так, чтобы сумма их номиналов не превосходила S_1. Тогда останется взять ещё некоторое количество монет на сумму от 0 до 3 рублей. Это можно сделать при помощи монет достоинством 1 рубль.
Ответ: а) да; б) нет; в) 3.

Критерии оценивания выполнения задания	**Баллы**
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте *в* и обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а* и *б* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *в*	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*

© 2027 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

В соответствии с Порядком проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования (приказ Минпросвещения России и Рособрнадзора от 04.04.2023 № 233/552, зарегистрирован Минюстом России 15.05.2023 № 73314)

«81. Проверка экзаменационных работ включает в себя:

1) проверку и оценивание предметными комиссиями ответов на задания КИМ для проведения ЕГЭ с развёрнутым ответом <…>, в том числе устных ответов, в соответствии с критериями оценивания по соответствующему учебному предмету, разработка которых организуется Рособрнадзором[1]. <…>

По результатам первой и второй проверок эксперты независимо друг от друга выставляют первичные баллы за каждый ответ на задания КИМ для проведения ЕГЭ с развёрнутым ответом. <…>

В случае существенного расхождения в первичных баллах, выставленных двумя экспертами, назначается третья проверка. Существенное расхождение в первичных баллах определено в критериях оценивания по соответствующему учебному предмету, разработка которых организуется Рособрнадзором.

Эксперту, осуществляющему третью проверку, предоставляется информация о первичных баллах, выставленных экспертами, ранее проверявшими экзаменационную работу».

Существенными считаются следующие расхождения.

1. Расхождение между баллами, выставленными двумя экспертами за выполнение любого из заданий 13–19, составляет 2 или более балла. В этом случае третий эксперт проверяет только те ответы на задания, которые были оценены со столь существенным расхождением.

2. Расхождение между суммами баллов, выставленных двумя экспертами за выполнение заданий 13–19, составляет 3 или более балла. В этом случае третий эксперт проверяет ответы на все задания работы.

3. Расхождение в результатах оценивания двумя экспертами ответа на одно из заданий 13–19 заключается в том, что один эксперт указал на отсутствие ответа на задание, а другой выставил за выполнение этого задания ненулевой балл. В этом случае третий эксперт проверяет только ответы на задания, которые были оценены со столь существенным расхождением.

4. Ситуации, в которых один эксперт указал на отсутствие ответа в экзаменационной работе, а второй эксперт выставил нулевой балл за выполнение этого задания, не являются ситуациями существенного расхождения в оценивании.

[1] Часть 14 статьи 59 Федерального закона от 29.12.2012 № 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации».

© 2027 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки