ПАРАЛЛЕЛОГРАММ ВАРИНЬОНА РЕШАЕТ ЗАДАЧИ

Г. Б. Филипповский, г. Киев

Французский математик и механик Пьер Вариньон (1654–1722), который руководил «Журналом учёных» в Париже и написал учебник по элементарной геометрии, очевидно первым обратил внимание на, казалось бы, довольно очевидный факт: середины сторон произвольного выпуклого четырёхугольника являются вершинами параллелограмма.

Действительно, $KLMN$ — параллелограмм (*рис. 1*), поскольку $KL = MN = \frac{1}{2}AC$ (средние линии треугольников ABC и ADC). Кроме того, $KL \parallel AC$ и $MN \parallel AC$ (по той же причине), а значит, $KL \parallel MN$.

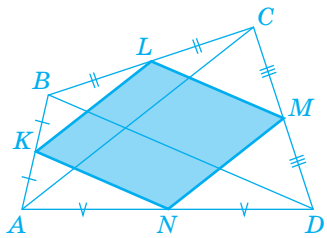


Рис. 1

В дальнейшем мы будем называть параллелограмм $KLMN$ ***параллелограммом Вариньона,*** а отрезки KM и LN, соединяющие середины противоположных сторон, — средними линиями четырёхугольника $ABCD$. Заметим также, что в задачах, которые будут рассмотрены ниже, все четырёхугольники выпуклые. А подборка задач призвана убедить в том, что параллелограмм Вариньона — надёжный помощник при решении трудных, в том числе и олимпиадных, планиметрических задач.

Задача 1. Периметр параллелограмма Вариньона равен сумме длин его диагоналей. Докажите.

Доказательство

$$KL = MN = \frac{1}{2}AC \text{ и } LM = KN = \frac{1}{2}BD$$

(*рис. 1*).

Тогда $P_{KLMN} = AC + BD$.

Задача 2. Докажите, что средние линии четырёхугольника $ABCD$ точкой пересечения делятся пополам.

Доказательство. Поскольку KM и LN — диагонали параллелограмма Вариньона, то, очевидно, что точкой пересечения они делятся пополам.

Задача 3. Можно ли составить треугольник из половин диагоналей и какой-либо из средних линий четырёхугольника $ABCD$?

Решение. Можно, поскольку параллелограмм Вариньона $KLMN$ существует для любого четырёхугольника $ABCD$. Тогда треугольники KLM и KMN — искомые (*рис. 2*).

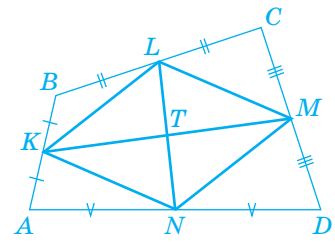


Рис. 2

Задача 4. Средние линии четырёхугольника $ABCD$ равны a и b, угол между ними — 60°. Найдите диагонали.

Решение. Пусть

$$KM = a,\ LN = b \text{ и } \angle LTM = 60^\circ$$

(*рис. 3*). Тогда

$$TM = \frac{a}{2} \text{ и } LT = \frac{b}{2}.$$

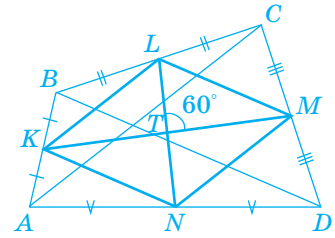


Рис. 3

Из треугольника LTM по теореме косинусов:

$$LM^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot \cos 60^\circ.$$

Но $LM = \frac{1}{2}BD$.

Поэтому

$\frac{BD^2}{4}=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-\frac{ab}{4}$, или $BD=\sqrt{a^2+b^2-ab}$.

Аналогично из треугольника TNM найдём MN, а затем и AC.

$$AC=\sqrt{a^2+b^2+ab}.$$

Задача 5. Постройте ромб с вершинами на сторонах прямоугольника $ABCD$.

Решение. Поскольку диагонали прямоугольника равны, то параллелограмм Вариньона для прямоугольника $ABCD$ и будет искомым ромбом $KLMN$ (*рис. 4*).

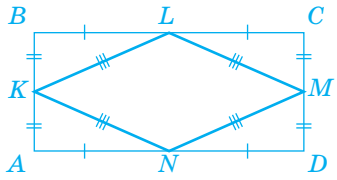


Рис. 4

Задача 6. Сумма квадратов диагоналей четырёхугольника вдвое больше суммы квадратов его средних линий. Докажите.

Доказательство. В параллелограмме Вариньона $KLMN$ (рис. 3), как и в любом другом параллелограмме, сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех его сторон, или

$$KM^2+LN^2=2\left(KL^2+LM^2\right).$$

Учитывая, что $KL=\frac{1}{2}AC$ и $LM=\frac{1}{2}BD$, получим:

$$KM^2+LN^2=\frac{1}{2}\left(AC^2+BD^2\right).$$

Задача 7. Докажите, что площадь параллелограмма Вариньона $KLMN$ равна половине площади четырёхугольника $ABCD$.

Доказательство. $S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD\cdot\sin\angle 1$.

$S_{KLMN}=KL\cdot KN\cdot\sin\angle 2$ (*рис. 5*).

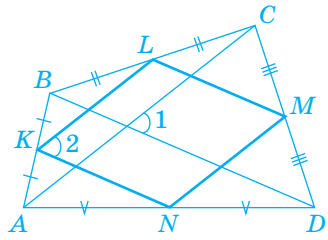


Рис. 5

Учитывая, что

$$\angle 1=\angle 2 \text{ и } KL=\frac{1}{2}AC,\ KN=\frac{1}{2}BD,$$

получим необходимое.

Задача 8. (Всеукраинские олимпиады). Все четырёхугольники, имеющие общие середины сторон, — равновеликие. Докажите.

Доказательство. Действительно, все эти четырёхугольники имеют один и тот же параллелограмм Вариньона. Поскольку его площадь равна половине площади каждого из исходных четырёхугольников (задача 7), то тем самым их равновеликость доказана.

Задача 9. Диагонали четырёхугольника $ABCD$ равны d_1 и d_2, а средние линии четырёхугольника равны между собой. Найдите его площадь.

Решение. В параллелограмме Вариньона $KLMN$ (рис. 5) диагонали KM и LN равны (по условию). Значит, $KLMN$ — прямоугольник, и

$$S_{KLMN}=KL\cdot KN.$$

Но $KL=\frac{1}{2}AC$ и $KN=\frac{1}{2}BD$. Тогда

$$S_{KLMN}=\frac{1}{4}d_1d_2.$$

Однако $S_{KLMN}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$ (задача 7). Значит,

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}d_1d_2.$$

Задача 10. Докажите, что площадь четырёхугольника равна произведению средней линии на одну из диагоналей и на синус угла между ними.

Доказательство. Необходимо доказать (*рис. 6*), что $S_{ABCD}=AC\cdot LN\cdot\sin\varphi$.

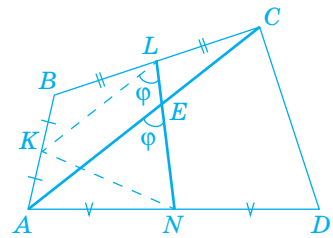


Рис. 6

Треугольник KLN — половина параллелограмма Вариньона $KLMN$.

$$S_{KLN}=\frac{1}{2}KL\cdot LN\cdot\sin\varphi$$

$$\left(\angle AEN=\angle KLN=\varphi\right).$$

Но $KL=\frac{1}{2}AC$.

Тогда

$$S_{KLN}=\frac{1}{4}AC\cdot LN\cdot\sin\varphi,\ \text{а}\ S_{KLMN}=\frac{1}{2}AC\cdot LN\cdot\sin\varphi.$$

Поскольку $S_{KLMN}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$, то

$$S_{ABCD}=AC\cdot LN\cdot\sin\varphi,$$

что и требовалось доказать.

Задача 11. (Всеукраинские олимпиады). Если диагонали четырёхугольника равны, то его площадь равна произведению средних линий. Докажите.

Доказательство. В случае равенства диагоналей AC и BD параллелограмм Вариньона $KLMN$ становится ромбом, а площадь ромба равна половине произведения его диагоналей:

$$S_{KLMN}=\frac{1}{2}KM\cdot LN.$$

Тогда $S_{ABCD}=2S_{KLMN}=KM\cdot LN$.

Задача 12. Одна из средних линий четырёхугольника равна a. Его диагонали равны $\frac{3}{2}a$ и $\frac{5}{2}a$. Найдите площадь четырёхугольника.

Решение. Пусть в четырёхугольнике $ABCD$ (рис. 6) $LN=a$, $AC=\frac{3}{2}a$ и $BD=\frac{5}{2}a$.

Тогда

$$KL=\frac{1}{2}AC=\frac{3}{4}a \text{ и } KN=\frac{1}{2}BD=\frac{5}{4}a.$$

По формуле Герона несложно найти площадь треугольника KLN:

$$S_{KLN}=\sqrt{\frac{3}{2}a\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{3a}{4}\cdot\frac{a}{4}}=\frac{3a^2}{8}.$$

Значит, $S_{ABCD}=4S_{KLN}=\frac{3a^2}{2}$.

Задача 13. Докажите, что

$$S_1+S_3=S_2+S_4=\frac{1}{4}S_{ABCD}$$

(*рис. 7*).

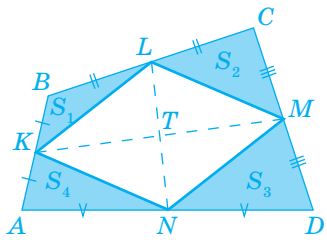


Рис. 7

Доказательство. Поскольку $KLMN$ — параллелограмм и диагонали разбивают его на 4 равновеликих треугольника, то для решения задачи достаточно доказать, что

$$S_{TKBL}+S_{TMDN}=S_{TLCM}+S_{TNAK}.$$

Покажем это.

Известно, что медиана делит треугольник на две равновеликие части. Поэтому равны площади, указанные соответствующими буквами на *рис. 8*. При этом

$$S_{TKBL}+S_{TMDN}=x+y+z+t$$

и

$$S_{TLCM}+S_{TNAK}=x+y+z+t.$$

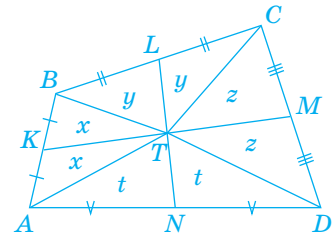


Рис. 8

Теперь становится очевидным, что, согласно рис. 7, $S_1+S_3=S_2+S_4=\frac{1}{4}S_{ABCD}$.

Задача 14. . (Польские олимпиады). Внутри четырёхугольника $ABCD$ найдите такую точку F, чтобы площади четырёхугольников, полученных при соединении точки F с серединами сторон, были равны.

Решение. $S_{KBL}+S_{NMD}=\frac{1}{4}S_{ABCD}$ (задача 13). Но и $S_{NFMD}=\frac{1}{4}S_{ABCD}$ — согласно условию (*рис. 9*). Тогда $S_{KBL}=S_{NFM}$ и $h_1=h_2$. Поэтому точка F находится на прямой, параллельной MN, проведенной на расстоянии h_1 от MN.

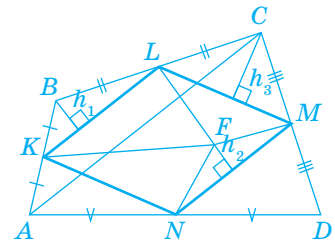


Рис. 9

Аналогично можно показать, что точка F находится на прямой, параллельной KN, проведенной на расстоянии h_3 от KN. Пересечение проведенных прямых даст искомую точку F.

Задача 15. (Киевские олимпиады). Внутри четырёхугольника $ABCD$ площади S взяли точ-

ку E и отобразили относительно середин всех его сторон. Получили новый четырёхугольник $A_1B_1C_1D_1$. Докажите, что $S_{A_1B_1C_1D_1}=2S$.

Доказательство. Стороны параллелограмма Вариньона $KLMN$ и параллелограмма $A_1B_1C_1D_1$ соответственно параллельны (*рис. 10*), и

$$KL=\frac{1}{2}A_1B_1,\ \ KN=\frac{1}{2}A_1D_1$$

(средние линии треугольников A_1EB_1 и A_1ED_1).

Тогда $S_{A_1B_1C_1D_1}=4S_{KLMN}=2S_{ABCD}=2S$, что и требовалось доказать.

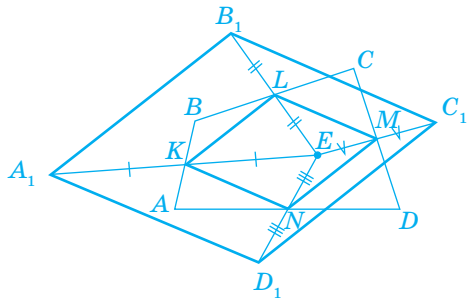


Рис. 10

Задача 16. (Всероссийские олимпиады). В четырёхугольнике $ABCD$ обозначены точки E и F — середины диагоналей AC и BD соответственно (*рис. 11*). Докажите, что $S_{ELFN}<\frac{1}{2}S_{ABCD}$.

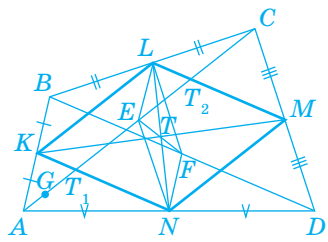


Рис. 11

Доказательство. Достаточно доказать, что точки E и F лежат строго внутри параллелограмма Вариньона $KLMN$, поскольку

$$S_{KLMN}=\frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

Очевидно, что

$$T_1T_2=KL=\frac{1}{2}AC\ \text{ и }\ AE=EC=\frac{1}{2}AC.$$

Пусть точка E совпадает с точкой G и лежит вне $KLMN$. Но тогда

$$GC=\frac{1}{2}AC>T_1T_2,$$

а $T_1T_2=\frac{1}{2}AC$ — противоречие.

Если же $E\equiv T_1$, то $T_1C=\frac{1}{2}AC=T_1T_2$, чего также быть не может. Значит, точка E лежит внутри $KLMN$.

Аналогично показываем, что и точка F лежит внутри параллелограмма $KLMN$. Тогда

$$S_{ELFN}<S_{KLMN}=\frac{1}{2}S_{ABCD},$$

что и требовалось доказать.

Задача 17. Средние линии четырёхугольника $ABCD$ и отрезок, соединяющий середины его диагоналей, пересекаются в одной точке и делятся ею пополам. Докажите.

Доказательство. Заметим, что LN — диагональ как параллелограмма Вариньона, так и параллелограмма $ELFN$ (рис. 11).

Пусть T — середина диагонали LN. Тогда

$$T=LN\cap KM\ \text{ и }\ T=LN\cap EF.$$

Тем самым доказаны оба утверждения задачи.

Задача 18. Сумма квадратов сторон четырёхугольника равна сумме квадратов его диагоналей и четырёх квадратов отрезка, соединяющего середины диагоналей. Докажите.

Доказательство. Согласно рис. 11 необходимо доказать, что

$$AB^2+BC^2+CD^2+AD^2=AC^2+BD^2+4EF^2.$$

По формуле медианы для треугольника ELN:

$$ET^2=\frac{EF^2}{4}=\frac{2\left(EL^2+EN^2\right)-LN^2}{4},$$

где $EL=\frac{1}{2}AB,\ \ EN=\frac{1}{2}CD.$

Откуда $LN^2=\frac{AB^2+CD^2}{2}-EF^2.$

Применяя аналогично формулу медианы для треугольника KFM и учитывая, что

$$KF=\frac{1}{2}AD,\ \ FM=\frac{1}{2}BC\ \text{ и }\ TF=\frac{1}{2}EF,$$

получим:

$$KM^2=\frac{AD^2+BC^2}{2}-EF^2.$$

В параллелограмме Вариньона $KLMN$

$$LN^2+KM^2=2\left(KL^2+KN^2\right)=\frac{AC^2+BD^2}{2}.$$

Значит, получим:

$$\frac{AB^2+BC^2+CD^2+AD^2}{2}-2EF^2=\frac{AC^2+BD^2}{2},$$

или

$$AB^2+BC^2+CD^2+AD^2=AC^2+BD^2+4EF^2.$$

Задача 19. Восстановите пятиугольник по серединам его сторон.

Решение. Пусть K, L, M, G, H — соответственно середины сторон AB, BC, CD, DE, EA пятиугольника $ABCDE$ (*рис. 12*).

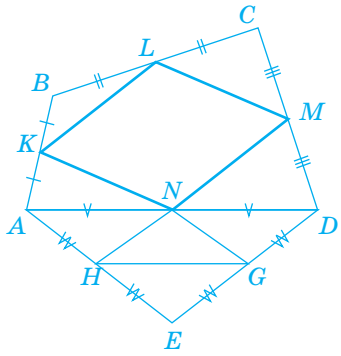


Рис. 12

Анализ показывает, что зная точки K, L, M, можно построить параллелограмм Вариньона $KLMN$ для четырёхугольника $ABCD$. Теперь несложно построить треугольник AED по трём точкам H, N, G — серединам его сторон. Дальнейшее очевидно.

Задача 20. Постройте трапецию по двум диагоналями, одному из углов и отрезку, соединяющему середины оснований.

Решение. Пусть в трапеции $ABCD$, которую необходимо построить, известны длины диагоналей AC и BD, отрезка LN и величина угла A (*рис. 13*).

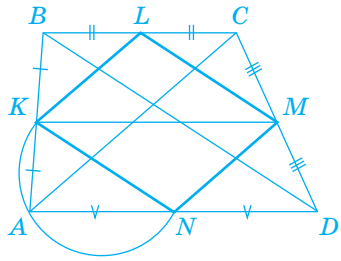


Рис. 13

Поскольку

$$KL=\frac{1}{2}AC \text{ и } KN=\frac{1}{2}BD,$$

по трём сторонам несложно построить треугольник KLN. Далее достроим KLN до параллелограмма Вариньона $KLMN$.

На отрезке KN построим сегмент, который содержит угол A. Через точку N проведём прямую параллельно KM, которая пересечёт сегмент в точке A. Дальнейшее построение очевидно.

Несколько задач, которые решают с помощью параллелограмма Вариньона, предложим *для самостоятельного решения.*

Задача 21. Восстановите параллелограмм $ABCD$ по точкам K, L, M — серединам трёх его сторон.

Задача 22. Точка пересечения средних линий четырёхугольника есть центроид системы четырёх точек, лежащих в его вершинах. Докажите.

Задача 23. При последовательном соединении середин сторон трапеции получили квадрат со стороной a. Найдите площадь трапеции.

Ответ. $2a^2$.

Задача 24. Дана трапеция $ABCD$ и точка E на её средней линии. С помощью только линейки постройте параллелограмм Вариньона трапеции $ABCD$.

Задача 25. Вершины четырёхугольника — середины сторон ромба со стороной 4 и углом 120°. Определите вид четырёхугольника и найдите его площадь.

Ответ. Прямоугольник. $S=4\sqrt{3}$.

Задача 26. $KLMN$ — параллелограмм Вариньона произвольного четырёхугольника $ABCD$ (рис. 2). Докажите, что $S_{ABCD}\le KM\cdot LN$.

Задача 27. Восстановите $(2n+1)$-угольник по серединам его сторон.

Задача 28. (Всероссийские олимпиады). Докажите, что в обозначениях рис. 8

$$S_{ATB}+S_{CTB}=\frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

Задача 29. (Всероссийские олимпиады). В четырёхугольник $ABCD$ вписывают все возможные параллелограммы, стороны которых параллельны диагоналям этого четырёхугольника. Какой из этих параллелограммов имеет наибольшую площадь?

Ответ. Параллелограмм Вариньона!..

Литература

1. *Бородин А. Н., Бугай А. С.* Биографический словарь деятелей в области математики. — К. : Радянська школа, 1979.
2. *Заславский А. А.* Олимпиады имени И. Ф. Шарыгина. — М. : Бюро «Квантум», 2009.
3. *Заславский А. А.* Геометрические преобразования. — М. : МЦНМО, 2004.
4. *Вышенский В. А.* и др. Сборник задач Киевских математических олимпиад. — К. : Вища школа, 1984.
5. *Шарыгин И. Ф.* Задачи по геометрии. Планиметрия. — М. : Наука, 1986.