П.01. Производная

Рассмотрим некоторую функцию $f(x)$, зависящую от аргумента x. Пусть эта функция определена в точке x_0 и некоторой ее окрестности, непрерывна в этой точке и ее окрестностях. Рассмотрим небольшое изменение аргумента функции Δx. Пусть при этом функция изменилась на $\Delta f(x)$. Тогда **производной функции в данной точке называется следующее отношение**:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

Итак, как определяется производная. Берем значение функции в некоторой точке. Чуть-чуть изменяем аргумент и смотрим, как изменилось значение функции. Считаем отношение $\Delta f(x)$ к Δx. Ответ готов.

Если у функции можно рассчитать производную, то функцию называют **дифференцируемой**. А саму операцию вычисления производной называют **дифференцированием.**

В математике принято обозначать производную следующим образом:

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{df}{dx}$$

Все обозначения равнозначны. Допустимо использовать любое.

На практике, конечно, так никто не делает. Все проще. Для начала надо запомнить таблицу производных элементарных функций. По определению, все элементарные функции (те функции, которые Вы изучали в школе) дифференцируемы на всей области определения. Итак:

Функция $f(x)$	**Производная** $f'(x)$
const	0
x	1
x^p	px^{p-1}
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\mathrm{tg}x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\mathrm{ctg}x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\mathrm{arctg}x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\mathrm{arcctg}x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

А дальше нужно запомнить простые правила вычисления производной.

1. Производная константы равна нулю
$$(\text{const})' = 0$$
2. Если функция $f(x)$ дифференцируема, а $k = \text{const}$ – число, то

$$\left(kf(x)\right)' = kf'(x)$$

3. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы, то

$$\left(f(x) \pm g(x)\right)' = f'(x) \pm g'(x)$$

4. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы, то

$$\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

5. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы и $g(x) \neq 0$, то

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

ПРИМЕР. *Найти производную функции* $f(x) = 4 - x + 2x^2$.

$$f'(x) = \left(4 - x + 2x^2\right)' = \left(4\right)' - \left(x\right)' + 2\left(x^2\right)' = 0 - 1 + 2 \cdot 2x = 4x - 1.$$

ПРИМЕР. *Найти производную функции* $f(x) = x \sin x$.

$$f'(x) = \left(x \cdot \sin x\right)' = \left(x\right)' \sin x + x\left(\sin x\right)' = \sin x + x \cos x.$$

ПРИМЕР. *Найти производную функции* $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

$$f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{\left(\ln x\right)' \cdot x - \ln x \cdot \left(x\right)'}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

ПРИМЕР. *Найти производную функции* $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{x}$.

$$f'(x) = \left(\sqrt{x}\right)' + \left(\frac{1}{x}\right)' = \left(x^{1/2}\right)' + \left(x^{-1}\right)' = \frac{1}{2} x^{-1/2} - 1 \cdot x^{-2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}.$$

УПРАЖНЕНИЕ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ.

$f(x)$	**Ответ**	$f(x)$	**Ответ**
$x^3-3x^2+\sqrt{x}+5$	$3x^2-6x+\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}(x+\sin x)$	$\frac{3}{2}\sqrt{x}+\sqrt{x}\cos x+\frac{\sin x}{2\sqrt{x}}$
$x\sqrt[3]{x}-\frac{1}{x}$	$\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x^2}$	$(\ln x+x)(\sin x-x)$	$\left(\frac{1}{x}+1\right)(\sin x-x)+$ $+(\ln x+x)(\cos x-1)$
$\sqrt{x\sqrt{x}}$	$\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$	$\sin x\cdot\arcsin x$	$\cos x\cdot\arcsin x+\frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}$
$\frac{1}{x\sqrt{3x}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x^5}}$	$\left(1-x+x\sqrt{x}\right)e^x$	$e^x\left(-x+x\sqrt{x}+\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)$
$5x^4-7x^3-2\sqrt{x}+\frac{5}{x}$	$20x^3-21x^2-\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{5}{x^2}$	$\frac{\operatorname{arctg}x}{x}$	$\frac{1}{x(1+x^2)}-\frac{\operatorname{arctg}x}{x^2}$
$x\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^3}$	$\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}-\frac{2}{x^3}+\frac{9}{x^4}$	$\frac{x+1}{x-1}$	$-\frac{2}{(x-1)^2}$
$6x^3-\frac{4}{x^4}+\frac{2}{x^6}-\sqrt{\pi}$	$18x^2+\frac{16}{x^5}-\frac{12}{x^7}$	$\frac{\sqrt{x}}{x-2}$	$-\frac{x+2}{2\sqrt{x}(x-2)^2}$
$\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}+\sqrt[5]{6}$	$\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$	$(x+1)(x-1)-(x+2)(x-2)$	0
$3x^2\sqrt{x}+4x^7-\frac{8}{x^5}+3x^4$	$\frac{15}{2}x\sqrt{x}+28x^6+\frac{40}{x^6}+12x^3$	$\frac{x\cos x}{e^x}$	$\frac{\cos x-x\sin x-x\cos x}{e^x}$
$\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$	$\frac{7}{8\sqrt[8]{x}}$	$x\arccos x$	$\arccos x-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
$\frac{3x^2+2x-1}{x^2}$	$-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}$	$\frac{\cos x}{1+\sin x}$	$-\frac{1}{1+\sin x}$
$\frac{2x+3}{x^2+4}$	$\frac{6x^2+6x+8}{(x^2+4)^2}$	e^x+5	e^x
$\left(3x^2-5x\right)^2$	$36x^3-90x^2+50x$	$3x^2-\log_5 x$	$6x-\frac{1}{x\ln 5}$
$\frac{3\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1}$	$\frac{2}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)^2}$	$x\cdot\sin x\cdot\ln x$	$\sin x(\ln x+1)+x\cdot\cos x\cdot\ln x$
$x\sin x$	$\sin x+x\cos x$	$\sin x\cdot 10^x$	$10^x(\cos x+\sin x\cdot\ln 10)$
$\sin x+2\cos x$	$\cos x-2\sin x$	$(x\sin x+1)(\cos x-2)$	$\frac{1}{2}\sin 2x-3\sin x+$ $+x\cos 2x-2x\cos x$

П.02. Производная сложной функции

Пусть аргументом функции f является функция $g(x)$. То есть мы рассматриваем сложную функцию $h(x)=f\left(g(x)\right)$.

ПРИМЕР. $h(x)=\sin 2x$. Здесь $f(x)=\sin x$, $g(x)=2x$.

ПРИМЕР. $h(x)=\ln^2 x$. Здесь $f(x)=x^2$, $g(x)=\ln x$.

ПРИМЕР. $h(x)=e^{\sin x+1}$. Здесь $f(x)=e^x$, $g(x)=\sin x+1$.

Для вычисления производной сложной функции применятся формула:

$$h'(x)=f'\left(g(x)\right)\cdot g'(x).$$

То есть вначале мы берем производную от функции f, только везде вместо аргумента x пишем $g(x)$, а потом все полученное выражение умножаем на производную функции $g(x)$.

ПРИМЕР. *Найти производную функции* $h(x)=\sin 2x$.

$$h'(x)=\left(\sin 2x\right)'=\begin{bmatrix} f(x)=\sin x \\ g(x)=2x \end{bmatrix}=\cos 2x\cdot(2x)'=2\cos 2x.$$

ПРИМЕР. *Найти производную функции* $h(x)=\ln(x^2+1)$.

$$h'(x)=\left(\ln(x^2+1)\right)'=\begin{bmatrix} f(x)=\ln x \\ g(x)=x^2+1 \end{bmatrix}=\frac{1}{x^2+1}\cdot(x^2+1)'=\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x=\frac{2x}{x^2+1}.$$

ПРИМЕР. *Найти производную функции* $h(x)=\sqrt{1+x^3}$.

$$h'(x)=\left(\sqrt{1+x^3}\right)'=\begin{bmatrix} f(x)=\sqrt{x} \\ g(x)=1+x^3 \end{bmatrix}=\frac{1}{2\sqrt{1+x^3}}\cdot(x^3)'=\frac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}$$

ПРИМЕР. *Найти производную функции* $h(x)=\ln^2 x$.

$$h'(x)=\left(\ln^2 x\right)'=\begin{bmatrix} f(x)=x^2 \\ g(x)=\ln x \end{bmatrix}=2\ln x\cdot\left(\ln x\right)'=\frac{2\ln x}{x}.$$

ПРИМЕР. *Найти производную функции* $h(x)=\left(x^2+1\right)^{19}$.

$$h'(x)=\left(\left(x^2+1\right)^{19}\right)'=\begin{bmatrix} f(x)=x^{19} \\ g(x)=x^2+1 \end{bmatrix}=19\left(x^2+1\right)^{18}\cdot\left(x^2+1\right)'=38x\left(x^2+1\right)^{18}.$$

ПРИМЕР. *Найти производную функции* $h(x)=\sin\sqrt{\ln x}$.

$h'(x)=\left(\sin\sqrt{\ln x}\right)'=\begin{bmatrix} f(x)=\sin x \\ g(x)=\sqrt{\ln x} \end{bmatrix}=\cos\sqrt{\ln x}\cdot\left(\sqrt{\ln x}\right)'$. Здесь надо сделать паузу. Дело в том, что сама функция $\sqrt{\ln x}$ является сложной. Не пугаемся, продолжаем вычисления.

$$h'(x)=\cos\sqrt{\ln x}\cdot\left(\sqrt{\ln x}\right)'=\cos\sqrt{\ln x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\ln x}}\cdot\left(\ln x\right)'=\frac{\cos\sqrt{\ln x}}{2x\sqrt{\ln x}}.$$

УПРАЖНЕНИЕ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ.

$f(x)$	**Ответ**	$f(x)$	**Ответ**
$\left(3x^3-2x+1\right)^4$	$4\left(3x^3-2x+1\right)^3(9x^2-2)$	$e^{3x}-3x$	$3e^{3x}-3$
$\sqrt{3x-1}$	$\dfrac{3}{2\sqrt{3x-1}}$	$x\ln 3x$	$\ln 3x-1$
$\sqrt{5-x}$	$-\dfrac{1}{2\sqrt{5-x}}$	$\ln\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)$	$\dfrac{1}{\sin x}$
$\sqrt{1-2x^3}$	$-\dfrac{3x^2}{\sqrt{1-2x^3}}$	$\lg^2(2x)$	$\dfrac{2\lg 2x}{x\ln 10}$
$x\sqrt{1+x^2}$	$\dfrac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$	$\arcsin\sqrt{x+1}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{-x}\sqrt{x+1}}$
$\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos\sqrt{\cos x}$	$\dfrac{\sin x}{2\sqrt{1-\cos x}\sqrt{\cos x}}$
$\sqrt{x+\sqrt{x}}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)$	$10^{\ln x+1}$	$10^{\ln x+1}\cdot\ln 10\cdot\dfrac{1}{x}$
$\sin 2x\cdot\operatorname{tg} x$	$2\sin 2x$	e^{e^x}	e^{e^x+x}
$\dfrac{x}{x-\sqrt{x^2-4}}$	$\dfrac{4}{\left(x-\sqrt{x^2-4}\right)^2\cdot\sqrt{x^2-4}}$	$\sin\left(\sin x\right)$	$\cos(\sin x)\cdot\cos x$
$\sin 3x$	$3\cos 3x$	$\sqrt{\dfrac{1}{1+\ln x}}$	$-\dfrac{1}{2x(1+\ln x)^{3/2}}$
$\cos^2 x$	$-2\sin 2x$	$\operatorname{arctg}\sqrt{\cos(x+1)}$	$-\dfrac{1}{1+\cos(x+1)}\dfrac{\sin(x+1)}{2\sqrt{\cos(x+1)}}$
$\sin^2 2x$	$2\sin 4x$	$\ln\left(\ln\left(\ln x\right)\right)$	$\dfrac{1}{x\cdot\ln x\cdot\ln(\ln x)}$
$2x\cdot\operatorname{tg}2x$	$2\operatorname{tg}2x+\dfrac{4x}{\cos^2 2x}$	$\cos^2(x+\cos x)$	$-\sin\left(2(x+\cos x)\right)\cdot(1-\sin x)$
$\dfrac{4}{2-\cos 3x}$	$-\dfrac{12\sin 3x}{(2-\cos 3x)^2}$	$5^{\sin x}$	$5^{\sin x}\cdot\ln 5\cdot\cos x$
$\sin 3x\cos 3x$	$3\cos 6x$	$\cos\left(2^{\cos x}\right)$	$-\sin\left(2^{\cos x}\right)\cdot 2^{\cos x}\cdot\ln 2\cdot\sin x$
$\sin^4 x-\cos^4 x$	$2\sin 2x$	$\sin^4\left(\ln^2\sqrt{x+1}\right)$	$4\sin^3\left(\ln^2\sqrt{x+1}\right)\times$ $\times\cos\left(\ln^2\sqrt{x+1}\right)\cdot\dfrac{\ln\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}$
$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\times$ $\times\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right)$	$\cos\left(\ln^2\left(\lg\left(\sin\sqrt{x}\right)\right)\right)$	$-\sin\left(\ln^2\left(\lg\left(\sin\sqrt{x}\right)\right)\right)\times$ $\times 2\ln\left(\lg\left(\sin\sqrt{x}\right)\right)\times$ $\times\dfrac{\operatorname{ctg}\sqrt{x}}{\lg\left(\sin\sqrt{x}\right)\cdot\ln 10\cdot 2\sqrt{x}}$

П.03. Производные от функций с модулями.

ПРИМЕР. *Найти производную функции* $f(x)=|x+3|$.

При $x<-3$ $f(x)=-3-x$. Значит, $f'(x)=-1$. При $x>-3$ $f(x)=x+3$. Значит, $f'(x)=1$. В точке $x=3$ производная не существует, так как в зависимости от того, с какой стороны мы приближаемся к этой точке, производная имеет различные значения.

УПРАЖНЕНИЕ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ.

Найти производные следующих функций.

$f(x)$	Ответ
$\lvert x\rvert$	$\begin{cases}1, & x>0\\ -1, & x<0\\ \text{не существует при } x=0\end{cases}$
$\lvert x^2-5x+6\rvert$	$\begin{cases}2x-5, & x<0 \text{ и } x>3\\ 5-2x, & 2<x<3\\ \text{не существует при } x=2 \text{ и } x=3\end{cases}$
$\left\lvert\frac{x}{x-1}\right\rvert$	$\begin{cases}-\frac{1}{(x-1)^2}, & x<0 \text{ и } x>1\\ \frac{1}{(x-1)^2}, & 0<x<1\\ \text{не существует при } x=0 \text{ и } x=1\end{cases}$
$\lvert\ln x\rvert$	$\begin{cases}-\frac{1}{x}, & 0<x<1\\ \frac{1}{x}, & x>1\\ \text{не существует при } x=1\end{cases}$
$\ln\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x}, \quad x\neq 0$
$\lvert 2-\lvert x-3\rvert\rvert$	$\begin{cases}1, & x\in(1;3)\cup(5;\infty)\\ -1, & x\in(-\infty;1)\cup(3;5)\\ \text{не существует при } x=1,\ x=3 \text{ и } x=5\end{cases}$
$\lvert x^2-5\lvert x\rvert+6\rvert$	$\begin{cases}2x+5, & x\in(-\infty;-3)\cup(-2;0)\\ -2x-5, & x\in(-3;-2)\\ 2x-5, & x\in(0;2)\cup(3;\infty)\\ -2x+5, & x\in(2;3)\\ \text{не существует при } x=0,\ x=\pm2 \text{ и } x=\pm3\end{cases}$

П.04. Возрастание и убывание функции. Точки максимума и минимума.

Простейшее применение производной – определение промежутков возрастания и убывания функций. Для этого необходимо взять производную и посмотреть на ее знак. **Не забывайте про область определения функции!!!**

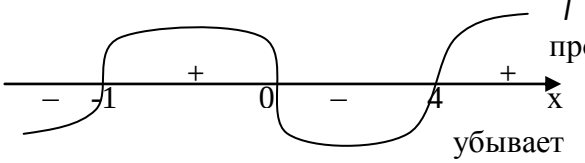
Если непрерывная функция имеет положительную производную в каждой точке интервала $(a;b)$, то она возрастает в каждой точке этого интервала.
Если же производная функции отрицательна, то функция на интервале убывает.
Там, где функция сохраняет характер возрастания или убывания, она называется **монотонной**. Например, функция $f(x)=x$ монотонно возрастает на всей числовой оси. Функция $f(x)=x^2$ монотонно убывает при $x<0$ и монотонно возрастает при $x>0$.

ПРИМЕР. *Найти промежутки возрастания и убывания функции* $f(x)=x^3-3x$.
Данная функция определена на $D(f)=\mathbb{R}$. Вычисляем производную $f'(x)=3x^2-3$ и решаем неравенство $3x^2-3>0$. Очевидно, что решение этого неравенства $x\in(-\infty;-1)\cup(1;\infty)$. Теперь решаем неравенство $3x^2-3<0$. Решением имеет вид $x\in(-1;1)$. Итак, функция $f(x)=x^3-3x$ возрастает на интервале $x\in(-\infty;-1)\cup(1;\infty)$ и убывает на интервале $x\in(-1;1)$.

Очевидно, что функция в некоторых точках имеет максимальное или минимальное значение. Такие точки называются **точками максимума и минимума** соответственно. Точки максимума и минимума называются точками **экстремума** функции. Для их нахождения надо действовать по следующей схеме:

1. Найти область определения функции.
2. Найти критические точки функции, то есть точки, где производная обращается в нуль или не существует.
3. Найти промежутки возрастания и убывания функции.
4. Если при переходе через критическую точку знак производной меняется с «+» на «-», то есть функция вначале возрастала, а потом стала убывать, то эта точка – точка МАКСИМУМА функции.
5. Если при переходе через критическую точку знак производной меняется с «-» на «+», то есть функция вначале убывала, а далее возрастает, то эта точка – точка МИНИМУМА функции.
6. Если при переходе через критическую точку знак производной не меняется, то эта точка не является точкой экстремума функции.

ПРИМЕР. *Исследовать функцию* $f(x)=x^4-4x^3-8x^2+3$ *на возрастание и убывание. Найти точки экстремума функции.*
Данная функция определена и дифференцируема на $D(f)=\mathbb{R}$. Имеем: $f'(x)=4x^3-12x^2-16x=4x(x-4)(x+1)$. Исследуем знак производной методом интервалов. Можно сделать вывод, что функция возрастает на интервалах $x\in(-1;0)\cup(4;\infty)$ и убывает на промежутках $x\in(-\infty;-1)\cup(0;4)$. Учитывая характер изменения знака производной, получаем, что точка $x=0$ – точка максимума, а точки $x=-1$ и $x=4$ – точки минимума.



УПРАЖНЕНИЕ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ.

Найти промежутки возрастания и убывания, а также точки максимума и минимума функции:

Функция $y = f(x)$	**Ответ**
$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 5$	Возрастает на $x \in \mathbb{R}$ Точек максимума и минимума нет
$y = 6 - 6x - 2x^3 + 3x^2$	Убывает на $x \in \mathbb{R}$ Точек максимума и минимума нет
$y = x + \frac{1}{1+x^2}$	Возрастает на $x \in \mathbb{R}$ Точек максимума и минимума нет
$y = 2x + \sin x$	Возрастает на $x \in \mathbb{R}$ Точек максимума и минимума нет
$y = 2x^3 + 3x^2 - 2$	Возрастает на $x \in (-\infty;-1) \cup (0;\infty)$ Убывает на $x \in (-1;0)$ $x = -1$ – точка максимума $x = 0$ – точка минимума
$y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x$	Возрастает на $x \in (-\infty;-3) \cup (2;\infty)$ Убывает на $x \in (-3;2)$ $x = -3$ – точка максимума $x = 2$ – точка минимума
$y = \frac{x^3}{6} + \frac{3}{4}x^2 - 5x + \frac{25}{12}$	Возрастает на $x \in (-\infty;-5) \cup (2;\infty)$ Убывает на $x \in (-5;2)$ $x = -5$ – точка максимума $x = 2$ – точка минимума
$y = 3x^2 - x^3$	Возрастает на $x \in (0;2)$ Убывает на $x \in (-\infty;0) \cup (2;\infty)$ $x = 2$ – точка максимума $x = 0$ – точка минимума
$y = -\frac{3}{4}x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 5$	Возрастает на $x \in (-\infty;0)$ Убывает на $x \in (0;\infty)$ $x = 0$ – точка максимума
$y = x^4 - 2x^3$	Возрастает на $x \in \left(\frac{3}{2};\infty\right)$ Убывает на $x \in \left(-\infty;\frac{3}{2}\right)$ $x = \frac{3}{2}$ – точка минимума
$y = x^5 - x^3 - 2x$	Возрастает на $x \in (-\infty;-1) \cup (1;\infty)$ Убывает на $x \in (-1;1)$ $x = -1$ – точка максимума $x = 1$ – точка минимума
$y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 5$	Возрастает на $x \in (-1;0) \cup (1;\infty)$ Убывает на $x \in (-\infty;-1) \cup (0;1)$ $x = 0$ – точка максимума $x = -1$ и $x = 1$ – точки минимума

$y=-x(x-2)^2$	Возрастает на $x\in\left(\frac{2}{3};2\right)$ Убывает на $x\in\left(-\infty;\frac{2}{3}\right)\cup(2;\infty)$ $x=1$ – точка максимума $x=\frac{2}{3}$ – точка минимума
$y=-x^4+4x^3+8x^2-3$	Возрастает на $x\in(-\infty;-1)\cup(0;4)$ Убывает на $x\in(-1;0)\cup(4;\infty)$ $x=-1$ и $x=4$ – точки максимума $x=0$ – точка минимума
$y=\frac{x^3}{x^2+3}$	Возрастает на $x\in\mathbb{R}$ Точек максимума и минимума нет
$y=\frac{-x^2+10x-16}{x^2}$	Возрастает на $x\in\left(0;\frac{16}{5}\right)$ Убывает на $x\in(-\infty;0)\cup\left(\frac{16}{5};\infty\right)$ $x=\frac{16}{5}$ – точка максимума
$y=\frac{x}{4}+\frac{4}{x}$	Возрастает на $x\in(-\infty;-4)\cup(4;\infty)$ Убывает на $x\in(-4;0)\cup(0;4)$ $x=-4$ – точка максимума $x=4$ – точка минимума
$y=\frac{x^2}{x^3-1}$	Возрастает на $x\in\left(-\sqrt[3]{2};0\right)$ Убывает на $x\in\left(-\infty;-\sqrt[3]{2}\right)\cup(0;1)\cup(1;\infty)$ $x=0$ – точка максимума $x=-\sqrt[3]{2}$ – точка минимума
$y=\frac{x^3+4}{x^2}$	Возрастает на $x\in(-\infty;0)\cup(2;\infty)$ Убывает на $x\in(0;2)$ $x=2$ – точка минимума
$y=\frac{(x-2)^2}{x+1}$	Возрастает на $x\in(-\infty;-4)\cup(2;\infty)$ Убывает на $x\in(-4;-1)\cup(-1;2)$ $x=-4$ – точка максимума $x=2$ – точка минимума
$y=\frac{x+3}{x^2-4}$	Возрастает на $x\in\left(-3-\sqrt{5};-2\right)\cup\left(-2;-3+\sqrt{5}\right)$ Убывает на $x\in\left(-\infty;-3-\sqrt{5}\right)\cup\left(-3+\sqrt{5};2\right)\cup(2;\infty)$ $x=-3+\sqrt{5}$ – точка максимума $x=-3-\sqrt{5}$ – точка минимума
$y=\frac{x(x+2)}{x-1}$	Возрастает на $x\in\left(-\infty;1-\sqrt{3}\right)\cup\left(1+\sqrt{3};\infty\right)$ Убывает на $x\in\left(1-\sqrt{3};1\right)\cup\left(1;1+\sqrt{3}\right)$ $x=1-\sqrt{3}$ – точка максимума $x=1+\sqrt{3}$ – точка минимума

$y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$	Возрастает на $x\in(-\infty;-1)\cup(-1;0)$ Убывает на $x\in(0;1)\cup(1;\infty)$ $x=0$ – точка максимума
$y=\dfrac{6x}{x^2+1}$	Возрастает на $x\in(-1;1)$ Убывает на $x\in(-\infty;-1)\cup(1;\infty)$ $x=1$ – точка максимума $x=-1$ – точка минимума
$y=x\cdot e^{-3x}$	Возрастает на $x\in\left(-\infty;\dfrac{1}{3}\right)$ Убывает на $x\in\left(\dfrac{1}{3};\infty\right)$ $x=\dfrac{1}{3}$ – точка максимума
$y=x-\ln x$	Возрастает на $x\in(1;\infty)$ Убывает на $x\in(0;1)$ $x=1$ – точка минимума
$y=x\cdot e^{-x^2}$	Возрастает на $x\in\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ Убывает на $x\in\left(-\infty;-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};\infty\right)$ $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ – точка максимума $x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ – точка минимума
$y=x+\ln(1-2x)$	Возрастает на $x\in\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)$ Убывает на $x\in\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$ $x=-\dfrac{1}{2}$ – точка максимума
$y=x^2-\ln(1-2x)$	Возрастает на $x\in\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$ Убывает на $x\in\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)$ $x=-\dfrac{1}{2}$ – точка минимума
$y=x^2\cdot e^{-x}$	Возрастает на $x\in(0;2)$ Убывает на $x\in(-\infty;0)\cup(2;\infty)$ $x=2$ – точка максимума $x=0$ – точка минимума
$y=x^3\cdot e^{-x}$	Возрастает на $x\in(-\infty;3)$ Убывает на $x\in(3;\infty)$ $x=3$ – точка максимума

$y=\dfrac{\ln x}{x}$	Возрастает на $x\in(0;e)$ Убывает на $x\in(e;\infty)$ $x=e$ – точка максимума
$y=\dfrac{e^x}{x}$	Возрастает на $x\in(1;\infty)$ Убывает на $x\in(-\infty;0)\cup(0;1)$ $x=1$ – точка минимума
$y=x^2\cdot\ln x$	Возрастает на $x\in\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}};\infty\right)$ Убывает на $x\in\left(0;\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$ $x=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ – точка минимума
$y=\dfrac{x^2}{\ln x}$	Возрастает на $x\in\left(\sqrt{e};\infty\right)$ Убывает на $x\in(0;1)\cup\left(1;\sqrt{e}\right)$ $x=\sqrt{e}$ – точка минимума
$y=x^2\cdot e^{x^2}$	Возрастает на $x\in(0;\infty)$ Убывает на $x\in(-\infty;0)$ $x=0$ – точка минимума
$y=\dfrac{x^2}{e^{x^2}}$	Возрастает на $x\in(-\infty;-1)\cup(0;1)$ Убывает на $x\in(-1;0)\cup(1;\infty)$ $x=-1$ и $x=1$ – точки максимума $x=0$ – точка минимума
$y=x-6\sin\dfrac{x}{3}$	Возрастает на $x\in(\pi+6\pi k;5\pi+6\pi k),\quad k\in\mathbb{Z}$ Убывает на $x\in(-\pi+6\pi k;\pi+6\pi k),\quad k\in\mathbb{Z}$ $x=-\pi+6\pi k,\quad k\in\mathbb{Z}$ – точки максимума $x=\pi+6\pi k,\quad k\in\mathbb{Z}$ – точки минимума
$y=\ln\sin x$	Возрастает на $x\in\left(2\pi k;\dfrac{\pi}{2}+2\pi k\right),\quad k\in\mathbb{Z}$ Убывает на $x\in\left(\dfrac{\pi}{2}+2\pi k;\pi+2\pi k\right),\quad k\in\mathbb{Z}$ $x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\quad k\in\mathbb{Z}$ – точки максимума

П.05. Определение максимальных и минимальных значений функции на отрезке.

Рассмотрим некоторую непрерывную и дифференцируемую функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[a;b]$. Значение A называется **глобальным максимумом (или просто максимумом)** функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, если для любых $x \in [a;b]$ выполняется неравенство $f(x) \le A$. Максимум функции обозначается $\max\limits_{[a;b]} f(x)$.

Значение B называется **глобальным минимумом (или просто минимумом)** функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, если для любых $x \in [a;b]$ выполняется неравенство $f(x) \ge B$. Минимум функции обозначается $\min\limits_{[a;b]} f(x)$.

Для определения максимумов и минимумов функции необходимо действовать по следующему алгоритму:

1. Проверить, попадает ли отрезок в область определения функции $f(x)$.
2. Находим все критические точки функции, **лежащие внутри отрезка**.
3. Вычисляем значения функции в найденных критических точках, а также на концах отрезка.
4. Сравниваем полученные значения и делаем вывод.

ПРИМЕР. *Найти наибольшее и наименьшее значения функции* $f(x) = \frac{x}{3} + \frac{3}{x}$ *на отрезке* $[1;4]$.

Имеем $f'(x) = \frac{1}{3} - \frac{3}{x^2}$. Для определения критических точек находим все точки, где производная не определена (это точка $x = 0$, не попадающая в область определения функции), и точки, в которых производная обращается в нуль (это точки $x = \pm 3$). Очевидно, что в отрезок $[1;4]$ попадает единственная критическая точка $x = 3$. Вычисляем значения функции в этой точке и на концах отрезка: $f(1) = \frac{10}{3}$, $f(3) = 2$, $f(4) = \frac{25}{12}$. Сравниваем полученные числа, и получаем, что $\max\limits_{[1;4]} f(x) = \frac{10}{3}$, а $\min\limits_{[1;4]} f(x) = 2$.

УПРАЖНЕНИЕ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ.

Найти наибольшее и наименьшее значение функции на заданном отрезке.

Функция $y=f(x)$ **и отрезок** $[a;b]$	**Ответ**
$y=\frac{3}{2}x^4-6x+3,\quad x\in[-1;2]$	$\max\limits_{[-1;2]} f(x)=15$ $\min\limits_{[-1;2]} f(x)=-\frac{3}{2}$
$y=\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2+2,\quad x\in[-2;2]$	$\max\limits_{[-2;2]} f(x)=2$ $\min\limits_{[-2;2]} f(x)=-\frac{4}{3}$
$y=x^3-4x^2+4x+3,\quad x\in[1;3]$	$\max\limits_{[1;3]} f(x)=6$ $\min\limits_{[1;3]} f(x)=3$
$y=2\sin x+\cos 2x,\quad x\in[0;\pi]$	$\max\limits_{[0;\pi]} f(x)=\frac{3}{2}$ $\min\limits_{[0;\pi]} f(x)=1$
$y=12x-x^3,\quad x\in[-1;3]$	$\max\limits_{[-1;3]} f(x)=16$ $\min\limits_{[-1;3]} f(x)=-11$
$y=x^4-\frac{x}{2}+1,\quad x\in[-1;1]$	$\max\limits_{[-1;1]} f(x)=\frac{5}{2}$ $\min\limits_{[-1;1]} f(x)=\frac{13}{16}$
$y=x^5-5x^4+5x^3+2,\quad x\in[-1;2]$	$\max\limits_{[-1;2]} f(x)=3$ $\min\limits_{[-1;2]} f(x)=-9$
$y=x\sqrt{3}-\cos 2x,\quad x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$	$\max\limits_{\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]} f(x)=1+\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$ $\min\limits_{\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]} f(x)=1-\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$
$y=x^2\sqrt{3-x},\quad x\in[1;3]$	$\max\limits_{[1;3]} f(x)=\frac{144}{25}\sqrt{\frac{3}{5}}$ $\min\limits_{[1;3]} f(x)=0$
$y=\frac{x}{4}+\frac{4}{x},\quad x\in[1;4]$	$\max\limits_{[1;4]} f(x)=\frac{10}{3}$ $\min\limits_{[1;4]} f(x)=2$
$y=\frac{x}{x^2+1},\quad x\in[-2;2]$	$\max\limits_{[-2;2]} f(x)=\frac{1}{2}$ $\min\limits_{[-2;2]} f(x)=-\frac{1}{2}$
$y=\sqrt{2x-x^2},\quad x\in\left[\frac{1}{2};2\right]$	$\max\limits_{\left[\frac{1}{2};2\right]} f(x)=1$ $\min\limits_{\left[\frac{1}{2};2\right]} f(x)=0$

$y=\sin^2 2x, \quad x\in\left[-\frac{\pi}{12};\frac{\pi}{8}\right]$	$\max\limits_{\left[-\frac{\pi}{12};\frac{\pi}{8}\right]} f(x)=\frac{1}{2}$ $\min\limits_{\left[-\frac{\pi}{12};\frac{\pi}{8}\right]} f(x)=0$
$y=x+\cos^2 x, \quad x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$	$\max\limits_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} f(x)=\frac{\pi}{2}$ $\min\limits_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} f(x)=1$
$y=x^2e^{2x}, \quad x\in[-2;1]$	$\max\limits_{[-2;1]} f(x)=e^2$ $\min\limits_{[-2;1]} f(x)=0$
$y=\cos^2 x+\sin x, \quad x\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$	$\max\limits_{\left[0;\frac{\pi}{4}\right]} f(x)=\frac{5}{4}$ $\min\limits_{\left[0;\frac{\pi}{4}\right]} f(x)=1$
$y=2x^2-\ln x, \quad x\in[1;e]$	$\max\limits_{[1;e]} f(x)=2e^2-1$ $\min\limits_{[1;e]} f(x)=2$

П.06. Геометрический смысл производной.

Производная имеет четкий геометрический смысл. Численное значение производной в данной точке равно угловому коэффициенту (тангенсу угла наклона) касательной, проведенной к графику функции в данной точке.

Итак, угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $f(x)$ в точке $M(x_0; f(x_0))$ с абсциссой $x = x_0$ и ординатой $y_0 = f(x_0)$, равен $f'(x_0)$. Соответственно, уравнение касательной, проведенной в графику в данной точке, имеет вид

$$y = f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0).$$

ПРИМЕР. *Написать уравнение касательной к графику функции* $f(x) = \sqrt{2-5x}$ *в точке пересечения этой кривой с осью ординат.*

Очевидно, что абсцисса точки касания $x_0 = 0$. Тогда $f(x_0) = \sqrt{2}$. Имеем $f'(x) = -\dfrac{5}{2\sqrt{2-5x}}$. Значит $f'(x_0) = -\dfrac{5}{2\sqrt{2}}$. Подставляя полученные числовые значения в общее уравнение касательной, получаем уравнение касательной $y = -\dfrac{5}{2\sqrt{2}}(x-0) + \sqrt{2} = -\dfrac{5}{2\sqrt{2}}x + \sqrt{2}$.

ПРИМЕР. *На кривой* $f(x) = x^2 - x + 1$ *найти точку, в которой касательная параллельна прямой* $y = 3x - 1$.

Поскольку касательная параллельна прямой $y = 3x - 1$, то угловой коэффициент касательной равен 3. Следовательно, если x_0 – абсцисса точки касания, то $f'(x_0) = 3$. Имеем уравнение $2x_0 - 1 = 3$, откуда $x_0 = 2$ и $f(x_0) = 3$. Тогда искомая точка касания имеет координаты $(2;3)$.

УПРАЖНЕНИЕ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ.

Составить уравнение касательной к графику функции в указанной точке.

Функция $y=f(x)$ и точка касания	**Ответ**
$y=x^3$ в точке $x=-1$	$y=3x+2$
$y=\sin x$ в точке $x=0$	$y=x$
$y=-\frac{2}{x}$ в точке $x=1$	$y=2x-4$
$y=\sqrt{x}$ в точке $x=4$	$y=\frac{1}{4}x+1$
$y=x^3-3x$ в точке $x=2$	$y=9x-16$
$y=3-2x^2$ в точке $x=-2$	$y=8x+11$
$y=\frac{3}{x^2}$ в точке $x=1$	$y=-6x+9$
$y=\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ в точке $x=\frac{\pi}{2}$	$y=2x+1-\pi$
$y=\frac{1}{2}\left(e^{x/2}+e^{-x/2}\right)$ в точке $x=2\ln 2$	$y=\frac{3}{8}x-\frac{3}{4}\ln 2+\frac{5}{4}$
$y=\sin 2x$ в точке $x=\frac{\pi}{12}$	$y=x\sqrt{3}-\frac{\pi\sqrt{3}}{12}+\frac{1}{2}$
$y=\sqrt{2x-1}$ в точке $x=5$	$y=\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$
$y=(3x-7)^3$ в точке $x=3$	$y=36x-100$
$y=\frac{x^2-1}{x}$ в точке $x=-2$	$y=\frac{5}{4}x+1$
$y=\sin^2 3x$ в точке $x=\frac{\pi}{12}$	$y=3x+\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}$
$y=x^2e^{-x}$ в точке $x=1$	$y=\frac{1}{e}x$
$y=x\sqrt{x-1}$ в точке $x=2$	$y=2x-2$
$y=\frac{x-1}{x^2+1}$ в точке пересечения с осью абсцисс	$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$
$y=x^2-4$ в точке пересечения с осью ординат	$y=-4$
$y=2x^2-4x$ в точке пересечения с осью абсцисс	$y=-4x$ $y=4x-8$

УПРАЖНЕНИЕ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ.

Решить текстовые задачи.

Текст условия	Ответ
Существует ли на кривой $y=\sqrt{x^2+1}$ точка, в которой касательная параллельна прямой $y=x$?	Не существует
Существуют ли на графике функции $y=2x^3+x^2+5x+3$ точки, в которых касательная параллельна оси абсцисс?	Не существует
Написать уравнение касательной к кривой $y=x^2-7x+3$, которая параллельна прямой $5x+y-3=0$.	$y=-5x+2$
На графике функции $y=x(x-4)^3$ найти точки, в которых касательная параллельна оси абсцисс.	$x=4$ или $x=1$
При каких значениях a и b прямая $y=7x-2$ касается графика функции $y=ax^2+bx+1$ в точке $A(1;5)$?	$a=3,\quad b=1$
На параболе $y=x^2$ взяты две точки с абсциссами $x=1$ и $x=3$. Через эти точки проведена секущая. В какой точке параболы касательная к ней будет параллельна секущей? Записать уравнение этой касательной.	$(2;4)$, $y=4x-4$
При каком значении x касательная в линии $y=x^2-2x+5$ параллельна прямой $y=2x$?	$x=2$
Найти касательные к графику функции $y=2x^2+2$, проходящие через точку $(0;1)$	$y=2\sqrt{2}x+1,\ y=-2\sqrt{2}x+1$
Записать уравнения всех касательных к кривой $y=x^3-3x+1$, которые параллельны прямой $9x-y=5$.	$y=9x-15$, $y=9x+17$
Найти угол между касательными к графику функции $y=x^3-x$ в точках с абсциссами $x_1=-1$ и $x_2=1$.	$0°$
Определить, под какими углами парабола $y=x^2+2x-8$ пересекает ось абсцисс.	$\operatorname{arctg}(-6)$ и $\operatorname{arctg}6$
Написать уравнение касательной к кривой $y=\sqrt{2x-1}$, образующей с осью абсцисс угол 45°.	$y=x$
В какой точке нужно провести касательную к графику функции $y=\frac{x+5}{x+3}$, чтобы она прошла через начало координат?	$\left(\sqrt{10}-5;\frac{5+\sqrt{10}}{3}\right)$ и $\left(-5-\sqrt{10};\frac{5-\sqrt{10}}{3}\right)$
Найти абсциссу точки, в которой касательная к кривой $y=5-x^2$ образует с осью OX угол 75°.	$x=\frac{\sqrt{3}+1}{2\left(1-\sqrt{3}\right)}$
На кривой $y=x^2-x+5$ найти точку, касательная в которой образует угол 45° с осью абсцисс.	$x=1,\ y=5$
В каких точках касательная к графику функции $y=\frac{x+2}{x-2}$ образует с осью абсцисс угол 135°?	$x=0$ или $x=4$

П.07. Задачи на оптимизацию.

В этом параграфе рассмотрим особый тип задач, в которых необходимо определить экстремальное (максимальное или минимальное) значение некоторой функции, описывающей реальный физический или экономический процесс. Алгоритм решения этих задач сводится к следующему:

1. Определить параметр задачи – ту ЕДИНСТВЕННУЮ величину, от которой зависит искомая функция.
2. Составить функциональную зависимость между исследуемой функцией и введенным параметром.
3. Определить область определения введенной функции.
4. Исследовать функцию на максимум и минимум на всей области определения, для чего определить точки экстремума, рассчитать значения функции в точках экстремума и на границах области определения. Сделать вывод.

ПРИМЕР. *В шар радиуса R вписать цилиндр максимального объема и определить этот объем.*

Пусть в шар вписан цилиндр радиусом r и высотой h. Очевидно, что они связаны соотношением $r^2 + \frac{h^2}{4} = R^2$. Выберем в качестве параметра высоту цилиндра h. Тогда его объем определяется соотношением

$$V = V(h) = \pi r^2 h = \pi h\left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right).$$

Обратите внимание, что мы выбрали в качестве параметра ЕДИНСТВЕННУЮ величину – высоту цилиндра, так, чтобы его объем функционально зависел только от высоты, а не от двух параметров: высоты и радиуса.

Исследуем функцию $V(h)$ на экстремум. Для этого выясним ее область определения. Очевидно, что $h \in [0; 2R]$. Считаем производную от функции $V(h)$, учитывая, что радиус шара R постоянен:

$$V'(h) = \left(\pi R^2 h - \pi\frac{h^3}{4}\right)' = \pi R^2 - \frac{3}{4}\pi h^2 = 0.$$

Отсюда имеем, что $h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$. Считаем значения функции $V(h)$ на границах области определения и в единственной критической точке

$$V(0) = V(2R) = 0$$

$$V\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right) = \pi \cdot \frac{2R}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{3}R^2 = \frac{4\sqrt{3}\pi}{9}R^3.$$

Очевидно, что максимальный объем вписанного цилиндра равен $V_{\max} = \frac{4\sqrt{3}\pi}{9}R^3$.

УПРАЖНЕНИЕ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ.

Решить текстовые задачи.

Условие	Ответ
Найти наименьшее значение суммы трех сторон прямоугольника при заданной площади S.	$2\sqrt{2S}$
Из цилиндрического бруса радиусом R требуется изготовить прямоугольную балку максимальной прочности. Каковы должны быть размеры этой балки, если известно, что ее прочность пропорциональна ширине и квадрату высоты?	Ширина $\frac{2R}{\sqrt{3}}$ Высота $\frac{2\sqrt{2}R}{\sqrt{3}}$
В прямоугольный треугольник с гипотенузой 8 см и углом 60^0 вписан прямоугольник наибольшей площади так, что одна из его сторон лежит на гипотенузе. Определить большую из сторон прямоугольника.	4 см
В шар вписан цилиндр наибольшего объема. Найти отношение объема шара к площади основания цилиндра, если радиус шара равен 5 см.	10 см
В шар радиуса R вписан цилиндр, имеющий наибольшую боковую поверхность. Найти объем этого цилиндра.	$\frac{\pi R^3}{\sqrt{2}}$
Сумма квадратов двух положительных чисел равна 300. Подобрать эти числа так, чтобы произведение одного из них на квадрат другого было наибольшим.	$10;\ \ 10\sqrt{2}$
Найти кратчайшее расстояние от точки M до точек графика функции: $y = x^2,\ \ M(0;\ 2{,}81)$.	1,6
Найти кратчайшее расстояние от точки M до точек графика функции: $y = \sqrt{x + e^{-x}},\ \ M(0;\ 0)$.	1

П.08. Вторая производная и ее применение.

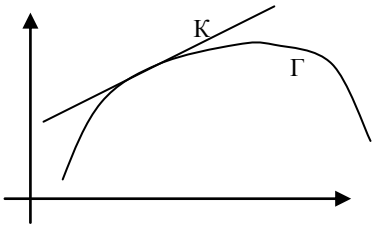
Второй производной данной функции называется производная ее производной. То есть $f''(x) = \left(f'(x)\right)'$.

ПРИМЕР. *Найти вторую производную функции* $f(x) = \ln x + \sin x - 2x$.

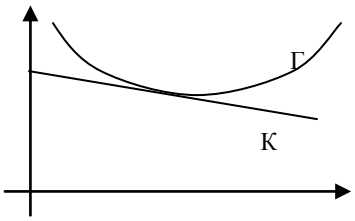
$$f'(x) = \frac{1}{x} + \cos x - 2;$$
$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} - \sin x$$

.

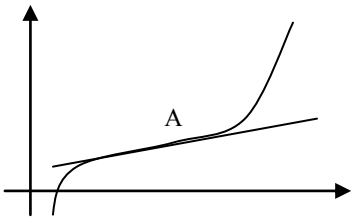
Вторая производная функции применяется для исследования ее выпуклости. Что это такое?



Функция называется выпуклой вверх, если ее график Г лежит ниже касательной К (см. рисунок). Выпуклая вверх функции может быть и убывающей, и возрастающей. На рисунке функция возрастает до точки максимума, далее убывает. Но везде остается выпуклой вверх.



Функция называется выпуклой вниз, если ее график Г лежит выше касательной К (см. рисунок). Выпуклая вниз функция также может и возрастать, и убывать.



Точка, в которая функция меняет тип выпуклости, называется точкой перегиба графика функции. На рисунке это точка А. В точке перегиба график функции пересекает свою касательную.

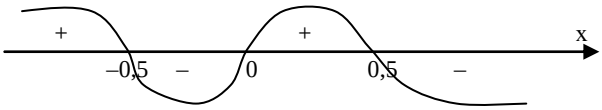
Функция выпукла вверх, если в данной точке ее вторая производная меньше нуля $f''(x) < 0$**. Функция выпукла вниз, если в данной точке ее вторая производная больше нуля** $f''(x) > 0$**. Точка А является точкой перегиба графика функции, если в данной точке ее вторая производная обращается в нуль, а при переходе через эту точку вторая производная изменяет знак.**

ПРИМЕР. *Исследовать функцию на выпуклость, определить точки перегиба графика функции, если* $f(x) = x^2 - 3$.

Для начала заметим, что $D(f) = \mathbb{R}$. Считаем вторую производную $f''(x) = \left(2x\right)' = 2 > 0$. Поскольку вторая производная не обращается в нуль ни в одной точке на области определения, точек перегиба у функции нет. Так как $f''(x) > 0$, то функция выпукла вниз.

ПРИМЕР. *Исследовать функцию на выпуклость, определить точки перегиба графика функции, если* $f(x) = \frac{5}{6}x^3 - x^5$.

Очевидно, что $D(f)=\mathbb{R}$. Считаем вторую производную



$$f''(x)=\left(\frac{15}{6}x^2-5x^4\right)'=5x-20x^3=5x(1-2x)(1+2x).$$

Очевидно, что вторая производная обращается нуль в точках $x=-0,5$, $x=0$ и $x=0,5$. Исследуем знак второй производной методом интервалов. Поэтому функция выпукла вверх при $x\in(-0,5;0)\cup(0,5;\infty)$ и выпукла вниз при $x\in(-\infty;-0,5)\cup(0;0,5)$. Поскольку при переходе через все три подозрительные точки вторая производная меняет знак, то точки $x=-0,5$, $x=0$ и $x=0,5$ являются точками перегиба графика функции.

УПРАЖНЕНИЕ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ.

Исследовать на выпуклость, определить точки перегиба графика функции.

$f(x)$	**Ответ**
$\sin x$	Выпукла вверх при $x\in(2\pi k;\pi+2\pi k),\quad k\in\mathbb{Z}$ Выпукла вниз при $x\in(-\pi+2\pi k;2\pi k),\quad k\in\mathbb{Z}$ Точки перегиба $x=\pi k,\quad k\in\mathbb{Z}$
e^x	Выпукла вниз при $x\in\mathbb{R}$ Точек перегиба нет
$\mathrm{tg}x$	Выпукла вверх при $x\in\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k;\pi k\right),\quad k\in\mathbb{Z}$ Выпукла вниз при $x\in\left(\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi k\right),\quad k\in\mathbb{Z}$ Точки перегиба $x=\pi k,\quad k\in\mathbb{Z}$
$6x^2-x^4$	Выпукла вверх при $x\in(-\infty;-1)\cup(1;\infty)$ Выпукла вниз при $x\in(-1;1)$ Точки перегиба $x=\pm1$
$x+\sqrt[3]{x^5}$	Выпукла вверх при $x>0$ Выпукла вниз при $x<0$ Точка перегиба $x=0$
$\frac{a^3}{x^2+a^2}$	Выпукла вверх при $x\in\left(-\frac{a}{\sqrt{3}};\frac{a}{\sqrt{3}}\right)$ Выпукла вниз при $x\in\left(-\infty;-\frac{a}{\sqrt{3}}\right)\cup\left(\frac{a}{\sqrt{3}};\infty\right)$ Точки перегиба $x=\pm\frac{a}{\sqrt{3}}$

П.09. Исследование и построение графика функции.

Проводится по следующему алгоритму.

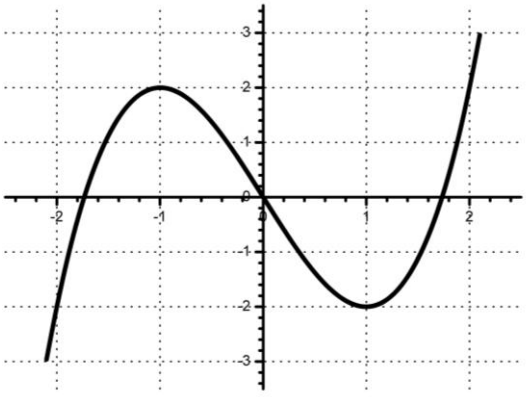
1. Находим область определения функции.
2. Исследуем функцию на четность и периодичность.
3. Находим точки пересечения графиком функции осей координат.
4. Находим вертикальные асимптоты функции (там, где знаменатель функции обращается в нуль).
5. Находим первую производную, исследуем функцию на возрастание и убывание, находим точки максимума и минимума, определяем значение функции в точках экстремума.
6. Находим вторую производную, исследуем функцию на выпуклость, определяем точки перегиба графика, находим значение функции в точках перегиба.
7. Результаты заносим в таблицу.
8. Рассчитываем значения функции при нескольких конкретных значениях аргумента.
9. Строим эскиз графика.

ПРИМЕР. *Исследовать функцию, построить ее график.* $f(x)=x^3-3x$.

1. $D(f)=\mathbb{R}$.
2. Функция нечетная, непериодическая.
3. Функция пересекает координатные оси в точках $M\left(-\sqrt{3};0\right)$, $O(0;0)$ и $N\left(\sqrt{3};0\right)$.
4. Вертикальных асимптот нет.
5. $f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$. Критические точки $x=\pm1$. Функция возрастает при $x\in(-\infty;-1)\cup(1;\infty)$. Функция убывает при $x\in(-1;1)$. Точка $x=-1$ – точка максимума, а $x=1$ – точка минимума. Значения функции в этих точках $f(-1)=2$, $f(1)=-2$.
6. $f''(x)=6x$. При $x<0$ функция выпукла вверх, а при $x>0$ – выпукла вниз. Точка $x=0$ – точка перегиба графика функции. Значение функции в этой точке $f(0)=0$.
7. а

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;0)$	0	$(0;1)$	1	$(1;\infty)$
$f(x)$	возрастает, выпукла вверх	2	убывает, выпукла вверх	0	убывает, выпукла вниз	–2	возрастает, выпукла вниз
$f'(x)$	>0	0	<0	<0	<0	0	>0
$f''(x)$	<0	<0	<0	0	>0	>0	>0
Вид графика функции							

8. Нет необходимости рассчитывать дополнительные значения функции
9.



УПРАЖНЕНИЕ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ.

Исследовать функцию, построить ее график.

1. $y = \dfrac{x^2}{x^2+1}$.
2. $y = \dfrac{x^2+3}{x^2+1}$.
3. $y = x^4 - x^2$.
4. $y = x^3 - x^2$
5. $y = xe^x$.
6. $y = x^2e^x$.
7. $y = \dfrac{x}{x^2-1}$.
8. $y = \dfrac{x^2}{x^2-1}$.